Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π , *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 583–593

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:06:29

О мере иррациональности числа π

В. Х. Салихов

В работе получена новая оценка меры иррациональности числа π . Прежний результат (М. Хата, 1993 г.) улучшен за счет применения другой интегральной конструкции.

Библиография: 8 названий.

Введение. В 1953 г. Малер [1] получил первую оценку снизу порядка приближения числа π рациональными дробями:

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-30} \quad \text{для всех } p, q \in \mathbb{N}, \quad q \geq q_0.$$

Позднее Миньотт [2] улучшил этот результат, заменив показатель 30 на 20, а Чудновский [3] – на 19.8899944... В ряде работ Хата [4]–[6] снизил этот показатель до 8.016045... Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$, выполняется неравенство

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > q^{-\nu}, \quad \text{где } \nu = 7.606308 \dots \quad (1)$$

Формулировка и краткая схема доказательства этой теоремы были опубликованы в сообщении [7].

1. Интегральная конструкция. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} J &\equiv \frac{1}{i} \int_{4-2i}^{4+2i} \frac{(x-4+2i)^{3n}(x-4-2i)^{3n}(x-5)^{3n}(x-6+2i)^{3n}(x-6-2i)^{3n}}{x^{5n+1}(10-x)^{5n+1}} dx \\ &\equiv \frac{1}{i} \int_{4-2i}^{4+2i} R(x) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

где n четно, $n \rightarrow +\infty$, путь интегрирования от $4-2i$ до $4+2i$ проходит через точки перевала x_1 и x_2 (укажем ниже) и точку $x_3 = 5$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00743).

Очевидно, что $R(x) \in \mathbb{Q}(x)$, ввиду четности n имеем $R(10-x) = R(x)$. Поэтому разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей можно представить в следующем виде:

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=0}^{5n} \left(\frac{a_j}{x^{j+1}} + \frac{a_j}{(10-x)^{j+1}} \right), \quad P(x) = \sum_{\nu=0}^{5n-2} b_{\nu} x^{\nu}, \quad (3)$$

где все $a_j \in \mathbb{Q}$, все $b_{\nu} \in \mathbb{Z}$.

Имеем из (2) и (3)

$$J = J_1 + J_2 + J_3, \quad (4)$$

где

$$J_1 = \int_{4-2i}^{4+2i} P(x) dx, \quad r_1 = \frac{1}{i} J_1 \in \mathbb{Q}, \quad (5)$$

$$J_2 = \int_{4-2i}^{4+2i} \left(\sum_{j=1}^{5n} \left(\frac{a_j}{x^{j+1}} + \frac{a_j}{(10-x)^{j+1}} \right) \right) dx, \quad r_2 = \frac{1}{i} J_2 \in \mathbb{Q}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{4-2i}^{4+2i} \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_0}{10-x} \right) dx = a_0 (\log x - \log(10-x)) \Big|_{4-2i}^{4+2i} \\ &= a_0 (\log(4+2i) - \log(4-2i) + \log(6+2i) - \log(6-2i)) \\ &= a_0 i \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} a_0 i \pi, \quad \frac{1}{i} J_3 = \frac{1}{2} a_0 \pi, \end{aligned} \quad (7)$$

мы использовали ветвь $\log z = \log |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$.

Из (4)–(7) имеем

$$\varepsilon'_n \equiv \frac{1}{i} J = \frac{1}{2} a_0 \pi + r_1 + r_2. \quad (8)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\varepsilon_n = q_n \pi - p_n$, $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| \leq -\tau, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| = \delta, \quad \tau, \delta > 0. \quad (9)$$

Тогда неравенство (1) выполняется для любого $\nu > 1 + \delta/\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. замечание 2.1 работы [6].

Для применения леммы 1 мы вычислим знаменатель рациональных чисел a_0 , r_1 , r_2 (далее п. 3) и с помощью метода перевала аналогично работе [6] получим оценки (9) (далее п. 4). Мы начнем с вычисления коэффициентов a_j в разложении (3), а кроме того, установим некоторые арифметические свойства коэффициентов β_{ν} в разложении многочлена $P(x)$ из (3)

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{5n-2} \beta_{\nu} (x - (4-2i))^{\nu}. \quad (10)$$

2. Арифметические свойства коэффициентов разложений (3) и (10).

Пусть в рамках данного пункта

$$D_0(f(x)) = f(0), \quad D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Обозначим для $m = 0, 1, \dots, 3n$

$$d(m) = \frac{3n(3n-1) \cdots (3n-m+1)}{m!} = \frac{(3n)!}{(3n-m)!m!},$$

для $m \in \mathbb{Z}^+$

$$d'(m) = \frac{(5n+1) \cdots (5n+m)}{m!} = \frac{(5n+m)!}{m!(5n)!}.$$

Пусть для $s = 0, 1, \dots, 5n$

$$M_s = \{\bar{m} = (m_1, \dots, m_6) \mid \text{все } m_k \in \mathbb{Z}^+; m_k \leq 3n, k = 1, \dots, 5; m_1 + \dots + m_6 = 5n - s\}.$$

По формуле Лейбница для $j = 0, \dots, 5n$ из (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} a_j &= D_{5n-j}(R(x)x^{5n+1}) \\ &= \sum_{\bar{m} \in M_j} D_{m_1}(x-4+2i)^{3n} D_{m_2}(x-4-2i)^{3n} D_{m_3}(x-6+2i)^{3n} \\ &\quad \times D_{m_4}(x-6-2i)^{3n} D_{m_5}(x-5)^{3n} D_{m_6}(10-x)^{-5n-1} \\ &= \sum_{\bar{m} \in M_j} (-1)^{m_1+\dots+m_5} \gamma(\bar{m}) (4-2i)^{3n-m_1} (4+2i)^{3n-m_2} (6-2i)^{3n-m_3} \\ &\quad \times (6+2i)^{3n-m_4} 5^{3n-m_5} 10^{-5n-1-m_6}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\gamma(\bar{m}) = d(m_1) \cdots d(m_5) d'(m_6). \quad (12)$$

Обозначим $K = \{c + di \mid c, d \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо гауссовых чисел, пусть $\theta_N = \{N/2\}$ – дробная доля числа $N/2$ для $N \in \mathbb{Z}^+$.

ЛЕММА 2. Для $j = 0, \dots, 5n$ справедливо представление вида

$$a_j = 5^{-n-1+j} 2^{2.5n-1+1.5j-\theta_j} A_j, \quad (13)$$

где

$$A_j = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \rho(\bar{m}), \quad \text{все } \rho(\bar{m}) \in K, \quad A_j \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для $m \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^{2m} = 2^m i^m, \quad (1+i)^{2m+1} = 2^m i^m (1+i) = 2^{0.5(2m+1)-0.5} i^m (1+i),$$

т.е.

$$(1+i)^N = 2^{0.5N-\theta_N} \lambda_N, \quad \lambda_N \in K.$$

Равенство (11) можно представить в виде

$$a_j = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) A(\bar{m}) B(\bar{m}) C(\bar{m}), \quad (14)$$

где

$$A(\bar{m}) = (2-i)^{3n-m_1+3n-m_4} (2+i)^{3n-m_2+3n-m_3} 5^{-2n-1-m_5-m_6}, \quad (15)$$

$$B(\bar{m}) = 2^{3n-m_1+3n-m_2} 2^{3n-m_3+3n-m_4} (1+i)^{3n-m_3+3n-m_4} 2^{-5n-1-m_6}, \quad (16)$$

$$C(\bar{m}) = (-1)^{m_1+\dots+m_5} (-i)^{3n-m_3} \in K \quad (17)$$

и мы воспользовались очевидными равенствами $4 - 2i = 2(2 - i)$, $4 + 2i = 2(2 + i)$, $6 - 2i = -2i(1 + i)(2 + i)$, $6 + 2i = 2(1 + i)(2 - i)$.

Обозначим

$$m = \min(m_1 + m_4, m_2 + m_3), \quad M = \max(m_1 + m_4, m_2 + m_3).$$

Имеем из (15)

$$A(\overline{m}) = 5^{6n-M} 5^{-2n-1-m_5-m_6} k_1(\overline{m}),$$

$$k_1(\overline{m}) \in K, \quad k_1(\overline{m}) = \begin{cases} (2+i)^{M-m}, & \text{если } m = m_2 + m_3, \\ (2-i)^{M-m}, & \text{если } m = m_1 + m_4. \end{cases}$$

Но $m_5 + m_6 + M \leq m_1 + \dots + m_6 = 5n - j$, т.е.

$$A(\overline{m}) = 5^{-n-1+j} k_2(\overline{m}), \quad k_2(\overline{m}) \in K. \quad (18)$$

Аналогично из (16)

$$B(\overline{m}) = 2^{7n-1-m_1-m_2-m_3-m_4-m_6} 2^{3n-0.5(m_3+m_4)-\theta_{m_3+m_4}} k_3(\overline{m}), \quad k_3(\overline{m}) \in K.$$

Но $m_1 + m_2 + m_6 + 1.5(m_3 + m_4) + \theta_{m_3+m_4} \leq 1.5(5n - j) + \theta_j$. Поэтому

$$B(\overline{m}) = 2^{2.5n+1.5j-1-\theta_j} k_4(\overline{m}), \quad k_4(\overline{m}) \in K. \quad (19)$$

Из (14), (17), (18) и (19) следует искомое представление (13). Имеем $A_j \in \mathbb{Z}$ ввиду $a_j \in \mathbb{Q}$ и $A_j \in K$, и лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для коэффициентов β_ν из (10) справедливо представление вида (ср. с (13))

$$\beta_\nu = 2^{2.5n-1.5\nu-3-\theta_\nu} k_\nu, \quad k_\nu \in K, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+, \quad 1.5\nu + \theta_\nu \leq 2.5n - 3. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $t = x - 4 + 2i$. Рассмотрим два разложения по степеням t функции $R(x)$ из (2). Во-первых, очевидно из (2), что при $|t| < |4 - 2i| = \sqrt{20}$

$$R(x) = \sum_{\nu=3n}^{\infty} B_\nu t^\nu, \quad B_\nu \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i. \quad (21)$$

Теперь получим аналогичное разложение $R(x)$ с помощью (3). Имеем при $|t| < \sqrt{20}$, $j = 0, \dots, 5n$

$$\frac{1}{x^{j+1}} = \frac{1}{(4 - 2i + t)^{j+1}} = \frac{1}{(4 - 2i)^{j+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j} (-1)^\nu t^\nu}{(4 - 2i)^\nu},$$

где

$$d_{\nu,j} = \frac{(j+1) \cdots (j+\nu)}{\nu!} \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{(10 - x)^{j+1}} = \frac{1}{(6 + 2i - t)^{j+1}} = \frac{1}{(6 + 2i)^{j+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j} t^\nu}{(6 + 2i)^\nu}.$$

Из (3), (10) и (21) следует, что

$$\sum_{\nu=3n}^{\infty} B_{\nu} t^{\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^{5n-2} \beta_{\nu} t^{\nu} + \sum_{j=0}^{5n} \frac{a_j}{(4-2i)^{j+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j} (-1)^{\nu} t^{\nu}}{(4-2i)^{\nu}} + \sum_{j=0}^{5n} \frac{a_j}{(6+2i)^{j+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j} t^{\nu}}{(6+2i)^{\nu}}.$$

Поэтому для $\nu < 3n$

$$\beta_{\nu} = - \sum_{j=0}^{5n} a_j d_{\nu,j} \left(\frac{(-1)^{\nu}}{(4-2i)^{\nu+j+1}} + \frac{1}{(6+2i)^{\nu+j+1}} \right). \quad (22)$$

Стандартным образом

$$\begin{aligned} (4-2i)^{-\nu-j-1} &= 2^{-\nu-j-1} 5^{-\nu-j-1} k_{\nu,j}, & k_{\nu,j} &\in K, \\ (6+2i)^{-\nu-j-1} &= 2^{-1.5\nu-1.5j-\theta_{\nu+j+1}-1.5} 5^{-\nu-j-1} \tilde{k}_{\nu,j}, & \tilde{k}_{\nu,j} &\in K. \end{aligned}$$

Из леммы 2 и (22) имеем

$$\beta_{\nu} = 2^{2.5n-1.5\nu-3-\theta_{\nu}} 5^{-n-\nu-2} k'_{\nu}, \quad k'_{\nu} \in K.$$

Но

$$\sum_{\nu=0}^{5n-2} b_{\nu} (t+4-2i)^{\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^{5n-2} \beta_{\nu} t^{\nu}, \quad \text{где все } b_{\nu} \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому все $\beta_{\nu} \in K$, но тогда

$$\beta_{\nu} = 2^{2.5n-1.5\nu-3-\theta_{\nu}} k''_{\nu}, \quad k''_{\nu} \in K,$$

и лемма доказана.

3. Вычисление знаменателей чисел r_1 и r_2 из (5) и (6). Следующая лемма является аналогом леммы 2.2 работы [6].

ЛЕММА 4. Пусть p – простое число,

$$\begin{aligned} T_n &= \left\{ p > \sqrt{5n} \mid \frac{1}{3} \leq \left\{ \frac{n}{p} \right\} < \frac{2}{5} \right\}, \\ \Delta_1(n) &= \prod_{p \leq \sqrt{5n}} p^{(\log 5n)/\log p}, & \Delta_2(n) &= \prod_{\sqrt{5n} < p \leq 5n} p, & \Delta_3(n) &= \prod_{p \in T_n} p, \\ \Delta(n) &= \frac{\Delta_1(n) \Delta_2(n)}{\Delta_3(n)}. \end{aligned}$$

Тогда для всех $j \in \{1, \dots, 5n\}$

$$\frac{\Delta(n)}{j} \gamma(\overline{m}) \in \mathbb{N},$$

где $\overline{m} \in M_j$, $\gamma(\overline{m})$ определено формулой (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть лишь простые $p \in T_n$, которые являются делителями числа j , и показать, что все они входят во все $\gamma(\overline{m})$, $\overline{m} \in M_j$, в степени $\nu(p) \geq 1$, ибо $p^2 > 5n \geq j$, т.е. j не делится на p^2 . Кроме того, для $p \in T_n$ имеем $p \leq 3n$, ибо в противном случае $n/p \in (0; 1/3)$, $\{n/p\} \notin [1/3; 2/5)$, поэтому

$\Lambda_3(n)$ – делитель $\Lambda_2(n)$. Очевидные соображения ($p^k \leq 5n \Rightarrow k \leq [\log 5n / \log p]$) показывают, что все возможные простые делители p числа j , $p \notin T_n$, входят в $\Delta(n)$ в не меньшей степени, нежели в j .

Итак, пусть далее $p \in T_n$,

$$j = 5n - m_1 - \dots - m_6 = pq, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Имеем стандартно для произвольного $\gamma(\overline{m})$ из (12)

$$\nu(p) \geq \sum_{k=1}^5 \left(\left[\frac{3n}{p} \right] - \left[\frac{3n - m_k}{p} \right] - \left[\frac{m_k}{p} \right] \right) + \left[\frac{5n + m_6}{p} \right] - \left[\frac{5n}{p} \right] - \left[\frac{m_6}{p} \right]. \quad (24)$$

Обозначим

$$\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{5} \right), \quad \theta_k = \left\{ \frac{m_k}{p} \right\}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Тогда

$$\frac{n}{p} = \left[\frac{n}{p} \right] + \omega, \quad [3\omega] = [5\omega] = 1.$$

Упростим правую часть (24), рассмотрев по отдельности составляющие ее слагаемые. Начнем со слагаемых под знаком суммы.

$$\begin{aligned} \frac{3n}{p} &= 3 \left[\frac{n}{p} \right] + 3\omega, & \left[\frac{3n}{p} \right] &= 3 \left[\frac{n}{p} \right] + 1, & \frac{m_k}{p} &= \left[\frac{m_k}{p} \right] + \theta_k, \\ \frac{3n - m_k}{p} &= 3 \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{m_k}{p} \right] + 3\omega - \theta_k, & \left[\frac{3n - m_k}{p} \right] &= 3 \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{m_k}{p} \right] + [3\omega - \theta_k], \end{aligned}$$

где очевидно, $[3\omega - \theta_k] \in \{0; 1\}$. Далее

$$\left[\frac{3n}{p} \right] - \left[\frac{3n - m_k}{p} \right] - \left[\frac{m_k}{p} \right] = 1 - [3\omega - \theta_k], \quad k = 1, \dots, 5.$$

Перейдем теперь к последним трем слагаемым, стоящим отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{5n + m_6}{p} &= 5 \left[\frac{n}{p} \right] + 5\omega + \left[\frac{m_6}{p} \right] + \theta_6, & \left[\frac{5n + m_6}{p} \right] &= 5 \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{m_6}{p} \right] + [5\omega + \theta_6], \\ \left[\frac{5n}{p} \right] &= \left[5 \left[\frac{n}{p} \right] + 5\omega \right] = 5 \left[\frac{n}{p} \right] + 1, \\ \left[\frac{5n + m_6}{p} \right] - \left[\frac{5n}{p} \right] - \left[\frac{m_6}{p} \right] &= [5\omega + \theta_6] - 1, \quad \text{где } [5\omega + \theta_6] \in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

Подставляя все это в (24), имеем

$$\nu(p) \geq \sum_{k=1}^5 (1 - [3\omega - \theta_k]) + [5\omega + \theta_6] - 1 = 4 + [5\omega + \theta_6] - \sum_{k=1}^5 [3\omega - \theta_k],$$

и для доказательства леммы осталось показать, что

$$\sum_{k=1}^5 [3\omega - \theta_k] \leq 3 + [5\omega + \theta_6]. \quad (25)$$

Из (23) имеем

$$\frac{5n}{p} - \frac{m_1}{p} - \dots - \frac{m_6}{p} = q,$$

или

$$\begin{aligned} 5 \left[\frac{n}{p} \right] + 5\omega - \left[\frac{m_1}{p} \right] - \dots - \left[\frac{m_6}{p} \right] - \theta_1 - \dots - \theta_6 &= q, \\ \theta_1 + \dots + \theta_6 &= 5 \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{m_1}{p} \right] - \dots - \left[\frac{m_6}{p} \right] - q + 5\omega, \end{aligned}$$

т.е. $\{\theta_1 + \dots + \theta_6\} = \{5\omega\} = 5\omega - 1$, $\theta_1 + \dots + \theta_6 = 5\omega - 1 + r$, где, очевидно, $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$,

$$1 - r + \theta_6 = 5\omega - (\theta_1 + \dots + \theta_5). \quad (26)$$

Но тогда из (26), применяя простейшие свойства целых частей (для $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1$), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 [3\omega - \theta_k] &\leq [15\omega - (\theta_1 + \dots + \theta_5)] = [10\omega + 1 - r + \theta_6] \leq 1 + [10\omega + \theta_6] \\ &\leq 1 + [5\omega] + [5\omega + \theta_6] + 1 = 3 + [5\omega + \theta_6], \end{aligned}$$

и (25), а вместе с ним и лемма доказана.

Далее мы получим два варианта знаменателя для числа r_1 из (5), использующие представления многочлена $P(x)$ в виде (3) и в виде (10).

Вычислим сначала коэффициенты b_ν из (3), разлагая $R(x)$ по степеням $1/x$. Имеем из (2) при $|x| > 10$

$$\begin{aligned} R(x) \equiv \sum_{\nu=-\infty}^{5n-2} b_\nu x^\nu &= -x^{5n-2} \left(1 - \frac{4-2i}{x}\right)^{3n} \left(1 - \frac{4+2i}{x}\right)^{3n} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{3n} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{6-2i}{x}\right)^{3n} \left(1 - \frac{6+2i}{x}\right)^{3n} \left(1 - \frac{10}{x}\right)^{-5n-1}. \quad (27) \end{aligned}$$

Так как для $k \in K$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{3n} &= \sum_{m=0}^{3n} \frac{(3n)!}{(3n-m)!m!} \left(\frac{k}{x}\right)^m, \\ \left(1 - \frac{10}{x}\right)^{-5n-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(5n+1) \dots (5n+m)}{m!} \left(\frac{10}{x}\right)^m, \end{aligned}$$

то с учетом (12) получим из (27)

$$b_\nu = \sum_{\overline{m} \in M_{\nu+2}} \gamma(\overline{m}) k(\overline{m}), \quad \nu = 5n-2, 5n-3, \dots, \quad (28)$$

где все $k(\overline{m}) \in K$.

ЛЕММА 5. В обозначениях леммы 4

$$\frac{\Delta(n)\gamma(\overline{m})}{\nu+1} \in \mathbb{N}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 5n-2, \quad \overline{m} \in M_{\nu+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Внесем некоторые изменения в доказательство леммы 4. Вместо (23) имеем

$$\nu + 1 = 5n - 1 - m_1 - \dots - m_6 = pq, \quad q \in \mathbb{N},$$

откуда

$$5 \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{m_1}{p} \right] - \dots - \left[\frac{m_6}{p} \right] + 5\omega - \frac{1}{p} - \theta_1 - \dots - \theta_6 = q,$$

$$\{\theta_1 + \dots + \theta_6\} = \left\{ 5\omega - \frac{1}{p} \right\} = 5\omega - \frac{1}{p} - 1, \quad \theta_1 + \dots + \theta_6 = 5\omega - \frac{1}{p} - 1 + r,$$

где $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$, т.е. вместо (26) получим

$$\frac{1}{p} + 1 - r + \theta_6 = 5\omega - (\theta_1 + \dots + \theta_5).$$

Снова необходимо доказать неравенство (25). Имеем

$$\sum_{k=1}^5 [3\omega - \theta_k] \leq [15\omega - (\theta_1 + \dots + \theta_5)] = \left[10\omega + \theta_6 + \frac{1}{p} + 1 - r \right] \leq \left[10\omega + \theta_6 + \frac{1}{p} \right] + 1.$$

Так как $5\omega \in [5/3; 2)$, $5\omega = L/p$, $L \in \mathbb{N}$, то $L \leq 2p - 1$.

Рассмотрим два случая.

1) Если $L = 2p - 1$, то

$$5\omega + \frac{1}{p} = 2, \quad \left[10\omega + \theta_6 + \frac{1}{p} \right] + 1 = [5\omega + \theta_6] + 3,$$

и (25) выполнено.

2) Если $L < 2p - 1$, то

$$5\omega + \frac{1}{p} < 2, \quad \left[5\omega + \frac{1}{p} \right] = 1, \quad 1 + \left[10\omega + \theta_6 + \frac{1}{p} \right] \leq 1 + 1 + \left[5\omega + \frac{1}{p} \right] + [5\omega + \theta_6] = 3 + [5\omega + \theta_6],$$

и снова (25) выполнено.

Лемма доказана.

В следующей лемме подводится итог всем исследованиям пп. 2 и 3: мы предъявим знаменатель коэффициентов линейной формы (8).

ЛЕММА 6. Пусть

$$Q_n = 5^{n+1} 2^{-2.5n+2} \Delta(n),$$

где $\Delta(n)$ определено в условии леммы 4. Тогда для линейной формы (8) справедливо

$$\varepsilon_n \equiv Q_n \varepsilon'_n \equiv q_n \pi - p_n, \quad q_n, p_n \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 2 при $j = 0$ имеем

$$a_0 = 5^{-n-1} 2^{2.5n-1} A_0, \quad \text{где } A_0 \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$Q_n \frac{1}{2} a_0 = \Delta(n) A_0 \in \mathbb{Z}.$$

Для доказательства (29) осталось показать, что $Q_n r_1, Q_n r_2 \in \mathbb{Z}$.

2) Вычислим r_2 , применяя лемму 2. Из (6) имеем

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{5n} \left(-\frac{a_j}{jx^j} + \frac{a_j}{j(10-x)^j} \right) \Bigg|_{4-2i}^{4+2i} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{5n} \frac{a_j}{j} \left(\frac{1}{(4-2i)^j} - \frac{1}{(4+2i)^j} - \frac{1}{(6+2i)^j} + \frac{1}{(6-2i)^j} \right) \\ &= \frac{1}{i} \cdot 5^{-n-1} 2^{2.5n-2} \sum_{j=1}^{5n} \frac{A_j}{j} (2^{0.5j+1-\theta_j} (2+i)^j - 2^{0.5j+1-\theta_j} (2-i)^j \\ &\quad - 2^{1-2\theta_j} (2+i)^j k_{1,j} - 2^{1-2\theta_j} (2-i)^j k_{2,j}), \end{aligned}$$

где все $k_{1,j}, k_{2,j} \in K$.

Но $1-2\theta_j \in \mathbb{Z}^+$, $0.5j - \theta_j \in \mathbb{Z}^+$ при $j \geq 1$. Поэтому

$$r_2 = 5^{-n-1} 2^{2.5n-2} \sum_{j=1}^{5n} \frac{A_j}{j} k_{3,j}, \quad \text{все } k_{3,j} \in K,$$

а тогда по лемме 2

$$r_2 = 5^{-n-1} 2^{2.5n-2} \sum_{j=1}^{5n} k_{3,j} \sum_{\overline{m} \in M_j} \frac{\gamma(\overline{m})}{j} \rho(\overline{m}), \quad \rho(\overline{m}) \in K.$$

По лемме 4 все

$$\Delta(n) \frac{\gamma(\overline{m})}{j} \in \mathbb{N}, \quad \overline{m} \in M_j,$$

поэтому

$$5^{n+1} 2^{-2.5n+2} \Delta(n) r_2 \in K.$$

Но $r_2 \in \mathbb{Q}$, поэтому $Q_n r_2 \in \mathbb{Z}$.

3) Вычислим, наконец, r_1 двумя способами.

Из (5) имеем, используя (3),

$$r_1 = \frac{1}{i} \sum_{\nu=0}^{5n-2} \frac{b_\nu}{\nu+1} ((4+2i)^{\nu+1} - (4-2i)^{\nu+1}) \equiv \sum_{\nu=0}^{5n-2} \frac{b_\nu}{\nu+1} d_\nu, \quad d_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Из (28) и леммы 5 стандартно получим, что $\Delta(n)b_\nu/(\nu+1) \in \mathbb{Z}$, а тогда

$$\Delta(n)r_1 \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Используем теперь для вычисления r_1 представление $P(x)$ в виде (10) и лемму 3. Имеем

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{i} \int_{4-2i}^{4+2i} \sum_{\nu=0}^{5n-2} \beta_\nu (x - (4-2i))^\nu dx = \sum_{\nu=0}^{5n-2} \frac{\beta_\nu}{\nu+1} i^\nu 4^{\nu+1} \\ &= 2^{2.5n-1} \sum_{\nu=0}^{5n-2} \frac{1}{\nu+1} 2^{0.5\nu-\theta_\nu} k_\nu, \quad \text{где все } k_\nu \in K, \end{aligned}$$

и мы воспользовались представлением (20) для всех $\nu = 0, 1, \dots, 5n-2$, ибо в случае $1.5\nu + \theta_\nu > 2.5n - 3$ (20) также справедливо ввиду $\beta_\nu \in K$, $\nu = 0, 1, \dots, 5n-2$.

Очевидно, что

$$\frac{\Delta_1(n)\Delta_2(n)}{\nu+1} \in \mathbb{Z}$$

(см. условие леммы 4), $0.5\nu - \theta_\nu \in \mathbb{Z}^+$, поэтому ввиду $r_1 \in \mathbb{Q}$ получим

$$2^{-2.5n+2}\Delta_1(n)\Delta_2(n)r_1 \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Из (30) и (31) имеем $2^{-2.5n+2}\Delta(n)r_1 \in \mathbb{Z}$, т.е. $Q_n r_1 \in \mathbb{Z}$, и лемма доказана.

Впервые подобный прием сокращения на 2^{-N} , $N \in \mathbb{N}$, был применен в работе [8] при получении оценки меры иррациональности числа $\log(5/3)$.

4. Вычисление τ и δ . Завершение доказательства теоремы 1. Обозначим (см. (2))

$$f(x) = \frac{(x-4+2i)^3(x-4-2i)^3(x-5)^3(x-6+2i)^3(x-6-2i)^3}{x^5(10-x)^5}. \quad (32)$$

Далее действуем в точности, как в работе [6]. Точки перевала – нули функции $f'(x)$, отличные от нулей $f(x)$. Используя симметрию, сделаем в (32) замену $t = (x-5)^2$. Получим

$$f(x) = \frac{((x-4)^2+4)^3((x-6)^2+4)^3(x-5)^3}{(10x-x^2)^5} = \frac{(t^2+6t+25)^3 t^{1.5}}{(25-t)^5} \equiv g(t).$$

Найдем корни уравнения $g'(t) = 0$, отличные от корней $g(t)$. Имеем

$$\frac{1.5}{t} + \frac{3(2t+6)}{t^2+6t+25} - \frac{5}{t-25} = 0,$$

или

$$t^3 - 76.2t^2 - 305t - 375 = 0. \quad (33)$$

Корни уравнения (33):

$$t_3 = 80.067767\dots, \quad t_{1,2} = -1.933883\dots \pm i0.971403\dots$$

Согласно методу перевала имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1| = \log |g(t_3)|. \quad (34)$$

Вычислим теперь асимптотику Q_n . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_1(n)\Lambda_2(n) = 5; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_3(n) = \psi\left(\frac{2}{5}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right),$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Следовательно,

$$\chi \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Q_n = 5 - \left(\psi\left(\frac{2}{5}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) \right) + \log 5 - 2.5 \log 2. \quad (35)$$

Так как из (8) и (29) следует, что $q_n = 0.5Q_n a_0$, то (см. (9)) из (34) и (35)

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| = \log |g(t_3)| + \chi. \quad (36)$$

Обозначим $x_{1,2} = 5 + \sqrt{t_{1,2}}$, где значение корней выберем из условия $\operatorname{Re} \sqrt{t_{1,2}} < 0$, т.е.

$$x_1 = 5 - 0.339310 \dots - i1.431438 \dots, \quad x_2 = 5 - 0.339310 \dots + i1.431438 \dots$$

Укажем теперь путь интегрирования l в интеграле (2): $l = l_1 \cup l_2$, где l_1 – ломаная, соединяющая точки $4 - 2i$, x_1 и 5 , а l_2 – ломаная, соединяющая точки 5 , x_2 и $4 + 2i$.

Имеем

$$J = \int_{l_1 \cup l_2} R(x) dx, \quad |J| \leq \left| \int_{l_1} R(x) dx \right| + \left| \int_{l_2} R(x) dx \right|.$$

Но тогда, учитывая, что $|g(t_1)| = |g(t_2)|$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |J| \leq \log |g(t_1)|.$$

Поэтому из (8), (29) и (35)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| \leq \log |g(t_1)| + \chi,$$

т.е. в (9) можно выбрать $\tau = -(\log |g(t_1)| + \chi)$.

По лемме 1 для линейной формы (29) имеем с учетом (36), что неравенство (1) выполняется для любого

$$\nu > 1 - \frac{\log |g(t_3)| + \chi}{\log |g(t_1)| + \chi} = 7.606308 \dots,$$

и теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, “On the approximation of π ”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **56**:1 (1953), 30–42.
- [2] M. Mignotte, “Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres”, *Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém.*, **37** (1974), 121–132.
- [3] G. V. Chudnovsky, “Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π ”, *The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications* (Bures-sur-Yvette/New York, 1979/1980), *Lecture Notes in Math.*, **925**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 299–322 71–84.
- [4] M. Hata, “Legendre type polynomials and irrationality measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **407**:1 (1990), 99–125.
- [5] M. Hata, “A lower bound for rational approximations to π ”, *J. Number Theory*, **43**:1 (1993), 51–67.
- [6] M. Hata, “Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349.
- [7] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности числа π ”, *УМН*, **63**:3 (2008), 163–164.
- [8] Е. С. Сальникова, “Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов”, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 428–438.

В. Х. Салихов

Брянский государственный технический университет
E-mail: svdh@rambler.ru

Поступило

25.11.2009