Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кучеренко, Н. Л. Василевский, Оператор сдвига, порожденный тригонометрической системой, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 539–548

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:52:38

УДК 517

ОПЕРАТОР СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В. В. Кучеренко, Н. Л. Василевский

В работе изучается изометрический оператор, порожденный тригонометрической системой. Этот оператор используется в задачах с косой производной и в теории рядов Фурье. Доказано, что этот изометрический оператор является оператором чистого сдвига, и дано применение этого факта к обратной задаче магнитопроводности.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ две полные ортонормированные системы функций

$$\{1; \sqrt{2} \cos(\pi n \eta), n = 1, 2, \dots\}, \quad \{\sqrt{2} \sin(\pi n \eta), n = 1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Определим на $L_2[0, 1]$ линейный оператор D соотношением

$$Df \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n \eta) \int_0^1 \sin(\pi n \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1. Оператор D изометричен.

2. Ортогональное дополнение к области значений $R(D)$ одномерно и состоит из констант.

3. Справедливы соотношения

$$D^* f = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n \eta) \int_0^1 \cos(\pi n \xi) f(\xi) d\xi, \quad D^* D = I, \quad D D^* = I - P, \quad (3)$$

где P есть ортогональный проектор на функцию $f(x) \equiv 1$, т.е. $Pg \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 g(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Очевидно, для произвольной функции $f(\eta) \in L_2[0, 1]$ имеем

$$f(\eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n \eta) \int_0^1 \sin(\pi n \xi) f(\xi) d\xi.$$

Поэтому в силу ортонормированности систем (1) получим

$$(Df, Dg) = (f, g), \quad (4)$$

т.е. D – изометрический оператор.

2. Далее, для произвольного элемента $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell_2$ функция

$$f(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sin(\pi j \eta) \in L_2[0, 1].$$

Очевидно,

$$Df = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(\pi n \xi), \quad x \in \ell_2, \quad (5)$$

и ортогональное дополнение к функциям вида (5) в силу полноты системы

$$\{1; \sqrt{2} \cos(\pi n \xi), n = 1, 2, \dots\}$$

есть одномерное подпространство констант.

3. Формула (3) для оператора D^* с очевидностью следует из формулы (2). Очевидно, изометрический оператор D удовлетворяет соотношениям: $D^*D = I$, $DD^* = I - P$, где P – ортопроектор на подпространство $R(D)^\perp$. Из пункта 2 следует, что $R^\perp(D)$ есть одномерное подпространство констант (постоянных функций на $[0, 1]$).

Рассмотрим функции $\varphi_k(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} D^k 1$, $k = 0, 1, \dots$. Пусть L_D есть замыкание линейной оболочки векторов $\varphi_k(\eta)$ в $L_2[0, 1]$, а $L_D^\perp$ – его ортогональное дополнение: $L_2[0, 1] = L_D \oplus L_D^\perp$.

ЛЕММА 1. 1. Подпространства $L_D, L_D^\perp$ инвариантны относительно операторов D, D^* . Функции $\{\varphi_k(\eta), k = 0, 1, \dots\}$ образуют ортонормированную систему.

2. Ограничение $D_s \stackrel{\text{def}}{=} D|_{L_D}$ есть оператор чистого сдвига.

3. Ограничение $D_U \stackrel{\text{def}}{=} D|_{L_D^\perp}$ есть унитарный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Имеем $(\varphi_k, \varphi_j) = (D^k 1, D^j 1)$. Пусть, например, $k \geq j$. Тогда в силу равенства $D^*D = I$ получим

$$(\varphi_k, \varphi_j) = (D^{k-j} 1, 1) = (1, (D^*)^{k-j} 1). \quad (6)$$

Отсюда в силу равенства $D^* 1 = 0$ и соотношения $(1, 1) = 1$ получаем, что $(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{kj}$.

2. Элементы подпространства L_D представимы в виде ряда Фурье:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Поскольку $D\varphi_k = \varphi_{k+1}$, то, очевидно, $DL_D \subseteq L_D$.

Далее, ввиду равенств $D^*D = I$, $D^*1 = 0$ имеем

$$D^*f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{k-1}, \quad \text{т.е. } D^*L_D \subseteq L_D. \quad (7)$$

Очевидно, что на подпространстве L_D оператор D унитарно эквивалентен оператору чистого сдвига: $U^*DU\{c_1, c_2, \dots\} = \{0, c_1, c_2, \dots\}$.

3. Теперь докажем инвариантность $L_D^\perp$ относительно D, D^* . Пусть $f \in L_D^\perp$, т.е. $(f, D^k 1) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда $(Df, D^k 1) = (f, D^{k-1} 1) = 0$ при $k \geq 1$ и $(Df, 1) = (f, D^* 1) = 0$, ибо $D^* 1 = 0$. Следовательно, Df также принадлежит L_D .

Аналогично получим, что $D^*L_D^\perp \subset L_D^\perp$.

Покажем, что $D|_{L_D^\perp}$ унитарен. Поскольку D изометричен, то для унитарности его ограничения на $L_D^\perp$ достаточно доказать, что $DL_D^\perp = L_D^\perp$. Допустим противное. Тогда в $L_D^\perp$ существует элемент $g \neq 0$ такой, что $(DL_D^\perp, g) = 0$. Значит, $(L_D^\perp, D^*g) = 0$. Поэтому в силу разложения $L_2 = L_D \oplus L_D^\perp$ имеем включение $D^*g \subset L_D$. Из инвариантности L_D относительно оператора D и равенства $DD^* = I - P$ следует, что $(g - Pg) \in L_D$. Поскольку $Pg = (g, 1) \in L_D$, то, следовательно, $g \in L_D$. Это противоречит включению $g \in L_D^\perp$. Полученное противоречие доказывает, что $DL_D^\perp = L_D^\perp$, а значит, $D|_{L_D^\perp}$ есть унитарный оператор.

Пункт 3 леммы есть уточнение разложения Уолда [1] в случае одномерного подпространства $R(D)^\perp$.

Оператор D , очевидно, можно определить для двух произвольных полных ортонормированных систем, однако для тригонометрических систем (1) он обладает следующим нетривиальным свойством.

ТЕОРЕМА. *Функции $D^k 1$, $k = 0, 1, \dots$, образуют ортонормированный базис в $L_2[0, 1]$, а значит, оператор D унитарно эквивалентен оператору чистого сдвига.*

Доказательство теоремы приводится в следующем параграфе. Оно основано на интегральном представлении функций $\varphi_k(\eta)$ через степени сингулярного интегрального оператора с ядром типа Гильберта [2].

ЛЕММА 2. *На функциях из $L_2[0, 1]$ справедливо представление*

$$(Dg)(\eta) = \int_0^1 g(\xi) \frac{\sin(\pi\xi)}{\cos(\pi\eta) - \cos(\pi\xi)} d\xi, \quad (8)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$2 \sum_{n=1}^N \sin(\pi n \xi) \cos(\pi n \eta) = \sum_{n=1}^N \sin[\pi n(\eta + \xi)] - \sum_{n=1}^N \sin[\pi n(\eta - \xi)]. \quad (9)$$

Как известно,

$$\sum_{n=1}^N \sin(n\alpha) = \frac{\sin^2((N+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin[(N+1)\alpha]. \quad (10)$$

Следовательно,

$$2 \sum_{n=1}^N \sin(\pi n \xi) \cos(\pi n \eta) = \frac{\sin^2[(N+1)(\xi+\eta)\pi/2]}{\sin[\pi(\xi+\eta)/2]} \cos \frac{\pi(\xi+\eta)}{2} - \frac{1}{2} \sin[\pi(N+1)(\xi+\eta)] - \frac{\sin^2[(N+1)(\eta-\xi)\pi/2]}{\sin[\pi(\eta-\xi)/2]} \cos \frac{\pi(\eta-\xi)}{2} + \frac{1}{2} \sin[\pi(N+1)(\eta-\xi)]. \quad (11)$$

Заметим, что ограниченные интегральные операторы с ядрами $\sin[\pi(N+1)(\eta \pm \xi)]$ при $N \rightarrow +\infty$ слабо сходятся к нулю на пространстве $L_2[0, 1]$.

Для функций $f(\xi) \in L_2[0, 1]$, равных нулю в окрестности точек $\xi = 0, 1$, нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\xi) \frac{\sin^2[(N+1)\pi(\xi+\eta)/2]}{\sin[\pi(\xi+\eta)/2]} \cos \frac{\pi(\xi+\eta)}{2} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\xi) \frac{\cos[\pi(\xi+\eta)/2]}{\sin[\pi(\xi+\eta)/2]} d\xi. \quad (12)$$

Далее, для непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в окрестности точек $\xi = 0, 1$, прямыми вычислениями убеждаемся в справедливости предельных равенств

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\xi) \frac{\sin^2[(N+1)\pi(\eta-\xi)/2]}{\sin[\pi(\eta-\xi)/2]} \cos \frac{\pi(\eta-\xi)}{2} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\xi) \frac{\cos[\pi(\eta-\xi)/2]}{\sin[\pi(\eta-\xi)/2]} d\xi. \quad (13)$$

Резюмируя, получим, что на множестве $K[0, 1]$, состоящем из непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности точек $\xi = 0, 1$, справедливо представление

$$Df = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\xi) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\eta+\xi)}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\eta-\xi)}{2} \right\} d\xi. \quad (14)$$

Из соотношения (14) приведением подобных членов получим, что на $K[0, 1]$ справедливо соотношение (8).

Поскольку оператор D изометричен, то в силу [3], [4] предельным переходом соотношение (8) распространяется со множества $K[0, 1]$ на все $L_2[0, 1]$.

Интегральное представление (8) заменой переменных приводится к интегралу с ядром Гильберта $(x-t)^{-1}$. С этой целью положим $\eta = \pi^{-1} \arccos x$, $\xi = \pi^{-1} \arccos t$. Очевидно, что

$$(Dg)(\pi^{-1} \arccos x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(\pi^{-1} \arccos t) (x-t)^{-1} dt. \quad (15)$$

Теперь функция $\tilde{g}(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(\pi^{-1} \arccos x)$, где $g(t) \in L_2[0, 1]$, принадлежит пространству $L_2([-1, 1], \rho)$ с весом $\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1-x^2)^{-1/2}$.

Поэтому из изометричности оператора D в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что оператор

$$(Af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) (x-t)^{-1} dt \quad (16)$$

изометричен в пространстве $L_2([-1, 1], \rho)$.

Положим $\tilde{\varphi}_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k(\pi^{-1} \arccos x)$, где $\varphi_k(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} D^k 1$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}_k(x) \in L_2([-1, 1], \rho)$ и

$$\tilde{\varphi}_k(x) = A\tilde{\varphi}_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \varphi_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1. \quad (17)$$

Следуя [2], сведем оператор (16) к оператору на полуоси заменой $x = (z - 1)/(z + 1)$, $t = (s - 1)/(s + 1)$, $z, s \in \mathbb{R}_+^1$. В результате для функций $\bar{\varphi}_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}_k((z - 1)/(z + 1))$ получим выражение

$$\frac{\bar{\varphi}_k(z)}{1+z} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}_{k-1}(s)}{1+s} \frac{ds}{z-s}, \quad \bar{\varphi}_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1. \quad (18)$$

Очевидно, функции $\bar{\varphi}_k(z)$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}_+, \bar{\rho})$ с весом $\bar{\rho}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^{-1/2}(1+z)^{-1}$ и ортогональны с этим весом.

§ 2. Доказательство теоремы

Очевидно, утверждение теоремы эквивалентно плотности линейной оболочки функций $\bar{\varphi}_k(z)$ (см. (18)) в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, \bar{\rho})$. Для доказательства этого факта воспользуемся преобразованием Меллина.

1. Представление функций $\bar{\varphi}_k(z)/(1+x)$ через преобразование Меллина. Воспользуемся формулами для прямого и обратного преобразования Меллина, определяющими изометрическое отображение $L_2(\mathbb{R}^+)$ на $L_2(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} x^{-i\lambda-1/2} f(x) dx, \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{i\lambda-1/2} \hat{f}(\lambda) d\lambda. \quad (19)$$

Используя выражение (18), в силу формул работы [2] получим интегральное представление

$$\frac{\bar{\varphi}_k(x)}{1+x} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{i\lambda-1/2} \{\text{th}(\pi\lambda)\}^k g_0(\lambda) d\lambda, \quad (20)$$

где

$$g_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^{-i\lambda-1/2} (1+t)^{-1} dt. \quad (21)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1. *Имеет место представление*

$$g_0(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi} i e^{\pi(\lambda-i/2)}}{1 - e^{2\pi(\lambda-i/2)}}. \quad (22)$$

2. *Функция $g_0(\lambda - i/4)/g_0(\lambda + i/4)$ на прямой $\{\lambda : \text{Im } \lambda = 0\}$ по модулю равна 1 и определяется формулой*

$$\frac{g_0(\lambda - i/4)}{g_0(\lambda + i/4)} = -i \frac{1 + i e^{2\pi\lambda}}{1 - i e^{2\pi\lambda}}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2 - \delta$. Из формулы (21) следует, что на дуге окружности $t = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, подынтегральная функция имеет порядок $R^{-(1+\delta)}$ и, значит, интеграл по дуге окружности от функции $t^{-i\lambda-1/2}/(1+t)$ стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. Поэтому, поворачивая контур интегрирования $[0, +\infty)$ на угол 2π , получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-i\lambda-1/2}}{(1+t)} dt = \sqrt{2\pi} i e^{\pi(\lambda-i/2)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi(\lambda-i/2)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-i\lambda-1/2}}{1+t} dt. \quad (24)$$

В результате k вращений контура интегрирования, т.е. при повороте на угол $2\pi k$, аналогично получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-i\lambda-1/2}}{1+t} dt &= \sqrt{2\pi} i \sum_{n=0}^{k-1} e^{\pi(\lambda-i/2)+2\pi n(\lambda-i/2)} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi k(\lambda-i/2)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-i\lambda-1/2}}{1+t} dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Переходя к пределу в (25) при $k \rightarrow +\infty$ в области $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2 - \delta$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-i\lambda-1/2}}{1+t} dt = \sqrt{2\pi} i \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\pi(\lambda-i/2)+2\pi n(\lambda-i/2)}.$$

В силу формулы для суммы членов геометрической прогрессии отсюда следует формула (22) в области $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2 - \delta$.

В области $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\operatorname{Im} \lambda| < 1/2 - \delta\}$ вращением контура интегрирования против часовой стрелки мы также получаем формулу (22). Из формулы (21) непосредственно следует, что функция $g_0(\lambda)$ аналитична в области $\{\lambda : |\operatorname{Im} \lambda| < 1/2\}$. Поэтому, используя аналитическое продолжение, получим формулу (22) во всей комплексной плоскости. Формула (23) прямо следует из формулы (22).

Из утверждения 2 непосредственно следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1. Функции $\{\operatorname{th}(\pi\lambda)\}^k g_0(\lambda)$, $k = 0, 1, \dots$, аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и удовлетворяют в этой полосе оценке

$$|\{\operatorname{th}(\pi\lambda)\}^k g_0(\lambda)| \leq C(\varepsilon, k) e^{-\pi|\lambda|}.$$

2. В интегральном представлении (20) в качестве контура интегрирования можно взять произвольную прямую $\lambda = s + i\sigma$, $s \in \mathbb{R}^1$, $|\sigma| < 1/2$, параллельную вещественной оси.

2. Доказательство плотности линейной оболочки функций $\overline{\varphi}_k(z)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^1, \overline{\rho})$ с весом $\overline{\rho} = z^{-1/2}(1+z)^{-1}$. Плотность системы $\overline{\varphi}_k(z)$ эквивалентна утверждению, что из условий

$$\int_0^{+\infty} \overline{\varphi}_k(z) f^*(z) z^{-1/2} (1+z)^{-1} dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

следует, что $f(z) = 0$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^1, \bar{\rho})$. Для $f \in L_2(\mathbb{R}_+^1, \bar{\rho})$ положим $f_\mu \stackrel{\text{def}}{=} z^{-1/4}(1 + \mu\sqrt{z})^{-1}f$. Очевидно, для комплексных значений параметра μ в $\mathbb{C} \setminus \{-\infty, 0\}$ имеем $f_\mu \in L_2(\mathbb{R}_+^1)$. Ясно, что условие (26) полноты системы $\{\bar{\varphi}_k(z)\}$ можно переформулировать так: из равенств

$$\int_0^{+\infty} (z^{-1/4} + \mu z^{1/4}) \frac{\bar{\varphi}_k(z)}{1+z} f_\mu(z) dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (27)$$

для функций $f_\mu \in L_2(\mathbb{R}_+^1)$ следует, что $f_\mu(z) = 0$ в $L_2(\mathbb{R}_+^1)$.

Далее, изучим условие полноты в форме (27). Сдвигая контур интегрирования в интегральном представлении (20) на $\pm i/4$, получим равенство

$$(z^{-1/4} + \mu z^{1/4}) \frac{\bar{\varphi}_k(z)}{1+z} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{i\lambda-1/2} \left\{ \left[\operatorname{th} \left(\pi \left(\lambda + \frac{i}{4} \right) \right) \right]^k g_0 \left(\lambda + \frac{i}{4} \right) + \mu \left[\operatorname{th} \left(\pi \left(\lambda - \frac{i}{4} \right) \right) \right]^k g_0 \left(\lambda - \frac{i}{4} \right) \right\} d\lambda. \quad (28)$$

Теперь, воспользовавшись унитарностью преобразования Меллина (19) и формулой (28), мы запишем условие полноты (27) в следующей форме: если функция $\hat{f}(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+^1)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\operatorname{th} \left(\pi \left(\lambda + \frac{i}{4} \right) \right) \right]^k g_0 \left(\lambda + \frac{i}{4} \right) + \mu \left[\operatorname{th} \left(\pi \left(\lambda - \frac{i}{4} \right) \right) \right]^k g_0 \left(\lambda - \frac{i}{4} \right) \right\} \hat{f}(\lambda) d\lambda = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (29)$$

то $\hat{f}(\lambda) = 0$ в $L_2(\mathbb{R}_+^1)$. Далее, произведем в интеграле (29) замену $\lambda = \lambda(w)$, где $w(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{1 + e^{-2\pi(\lambda+i/4)}\}^{-1}$. Как известно [5], отображение $w(\lambda)$ переводит вещественную ось в верхнюю половину дуги окружности: $w(\varphi) = 1/2 + e^{i\varphi}/2$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. При этом [6] $w(+\infty) = 1$, $w(-\infty) = 0$, $2w(\lambda) - 1 = \operatorname{th}[\pi(\lambda + i/4)]$. Следовательно, в результате замены представим интеграл (29) как интеграл по верхней половине дуги окружности, которую в дальнейшем обозначим через Γ :

$$\int_0^\pi \left\{ (2w-1)^k g_0 \left(\lambda(w) + \frac{i}{4} \right) + \mu (2w^*-1)^k g_0 \left(\lambda(w) - \frac{i}{4} \right) \right\} \frac{\hat{f}(\lambda(w))|_\Gamma}{|w(\varphi)(1-w(\varphi))|} d\varphi = 0, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (30)$$

Здесь $\hat{f}(\lambda(w(\varphi)))/\sqrt{|w(\varphi)(1-w(\varphi))|} \in L_2[0, \pi]$. Преобразуем подынтегральное выражение в (30). Из формул (22), (23) получим выражения

$$\frac{g_0(\lambda - i/4)}{g_0(\lambda + i/4)} \Big|_\Gamma = ie^{-i\varphi}, \quad (31)$$

$$g_0 \left(\lambda + \frac{i}{4} \right) \Big|_\Gamma = -\sqrt{2\pi i} w(\varphi) \sqrt{\frac{1-w(\varphi)}{w(\varphi)}}. \quad (32)$$

С учетом формул (31), (32) интеграл (30) можно представить в виде

$$\int_0^\pi \{e^{ik\varphi} + i\mu e^{-i\varphi(k+1)}\} \frac{\widehat{f}(\lambda(w(\varphi)))e^{i\psi(\varphi)}}{\sqrt{|w(\varphi)(1-w(\varphi))|}} d\varphi = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (33)$$

Здесь $\psi(\varphi)$ – непрерывная вещественная функция на $[0, \pi]$. Поскольку

$$\left| \frac{d\lambda}{d\varphi} \right| \Big|_\Gamma = \frac{1}{2\pi|w(\varphi)(1-w(\varphi))|},$$

то, как отмечено выше, из условия $\widehat{f}(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ следует, что функция $\widehat{f}(\lambda(w(\varphi)))/\sqrt{|w(\varphi)(1-w(\varphi))|}$ принадлежит $L_2[0, \pi]$.

Из проведенных преобразований следует, что если система функций $\{\overline{\varphi}_k(z)\}$ не плотна, то существует не равная нулю в $L_2(\mathbb{R}_+^1, \overline{\rho})$ функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям (26), а значит, не равная нулю в $L_2[0, \pi]$ функция $\widehat{f}_\mu(\lambda(w(\varphi)))/\sqrt{|w(\varphi)(1-w(\varphi))|}$ ортогональна системе функций

$$e^{ik\varphi} + i\mu e^{-i\varphi(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{-\infty, 0\}, \quad (34)$$

на $[0, \pi]$.

В свою очередь, из обратимости проделанных преобразований следует, что из полноты системы (34) вытекает полнота системы $\{\overline{\varphi}_k(z)\}$. Положим значение параметра $\mu = i$. Получим

$$e^{i\varphi k} - e^{-i\varphi(k+1)} = e^{-i\varphi/2} [e^{i\varphi(k+1/2)} - e^{-i\varphi(k+1/2)}] = 2ie^{-i\varphi/2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi, \quad (35)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Как хорошо известно, система $\sin(k + 1/2)\varphi$, $k = 0, 1, \dots$, полна в $L_2[0, \pi]$. Следовательно, система (35), а значит, и система $\{\overline{\varphi}_k(z)\}$ полны. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку мы доказали, что полнота системы $\{\overline{\varphi}_k(z)\}$ и системы (34) эквивалентны, то из полноты системы $\{\overline{\varphi}_k(z)\}$, в частности, следует полнота систем (34) для всех значений параметра $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{-\infty, 0\}$. Полнота систем (34) другим методом была доказана в [7].

§ 3. Обратная задача магнетосопротивления

Рассмотрим металлический образец в форме параллелепипеда

$$V = \{x, y, z : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq c, 0 \leq z \leq b\}$$

в однородном магнитном поле B параллельном оси y . Пусть на поверхности параллелепипеда на плоскостях перпендикулярных осям z и y нормальные токи J_z, J_y равны нулю, а на двух торцах перпендикулярных оси x заданы потенциалы $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$. Итак,

$$J_z|_{z=0,b} = 0, \quad J_y|_{y=0,c} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_0(z), \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_1(z).$$

Вектор тока J выражается через электрическое поле и тензор проводимости $\|\sigma_{ik}\|$: $J = \|\sigma_{ik}\|E$.

При изотропном законе дисперсии электронов [8] можно показать, что электрическое поле $E_y = 0$ и $(E_x, E_z) = -\text{grad}_{x,z} \varphi(x, z)$, где потенциал φ удовлетворяет следующей краевой задаче с косой производной в прямоугольнике $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x, z : 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b\}$:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad (x, y) \in V_1, \\ \varphi|_{x=0} &= \varphi_0(z), \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_1(z), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{z=0,b} = 0, \\ \varphi &\in W_2^1(V_1), \quad \varphi_\gamma \in W_2^1[0, b], \quad \gamma = 0, 1. \end{aligned}$$

Дивергенция вектора тока J в параллелепипеде равна нулю [8], и нормальные токи на плоскостях параллельных оси x равны нулю. Поэтому средний ток по сечению перпендикулярному оси x не зависит от выбора сечения. Введем обозначения

$$\langle J_x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b} \int_0^b J_x(x, z) dz, \quad \overline{\varphi}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_\gamma(z) dz$$

и определим магнетосопротивление $R(B)$ по формуле $R(B) = \sigma_0(\overline{\varphi}_0 - \overline{\varphi}_1)/a\langle J_x \rangle$. Нетрудно показать, что сопротивление $R(B)$ выражается через потенциал φ по формуле

$$R(B) = (1 + B^2) \frac{(\overline{\varphi}_0 - \overline{\varphi}_1)}{a} \left\{ -\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) dz + \frac{B}{b} [\varphi(x, b) - \varphi(x, 0)] \right\}^{-1}.$$

Магнетосопротивление $R(B)$ и средние значения $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1$ измеряются в эксперименте. Мы ставим обратную задачу: восстановить потенциалы φ_0, φ_1 по магнетосопротивлению $R(B)$ и известным средним значениям $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1$. Эта задача ранее не рассматривалась, поскольку функция $R(B)$ была неизвестна.

Недавно, в работе [9] для функции $R(B)$ была получена асимптотическая формула в предположении $b/a \ll 1$. Так, в случае $\varphi_1 \equiv 0$ эта формула имеет вид

$$R^{-1}(B) = 1 + \frac{\frac{b}{a} B^2 a(B) - a^0(B)/\overline{\varphi}_0}{1 - \frac{b}{a} B^2 a(B)} + O(e^{-\pi a/b}). \quad (36)$$

Здесь функции $a(B), a^0(B)$ аналитичны в области $|B| < 1$ и определяются формулами

$$a(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} B^{2k} \left(\eta - \frac{1}{2}, D^{2k+1} 1 \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (37)$$

$$a^0(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B^m (\varphi^0(\eta b) - \overline{\varphi}^0, D^{m+1} 1). \quad (38)$$

Асимптотической обратной задачей магнетосопротивления будем называть восстановление потенциала $\varphi_0(\eta b)$ по асимптотической формуле для $R^{-1}(B)$, полученной из формулы (36) отбрасыванием экспоненциально малых членов $O(e^{-\pi a/b})$.

ЛЕММА 3. По функции

$$R_0^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\frac{b}{a}B^2a(B) - a^0(B)/\overline{\varphi}_0}{1 - \frac{b}{a}B^2a(B)}$$

в области $|B| < 1$ и значению $\overline{\varphi}_0$ однозначно восстанавливается граничный потенциал $\varphi_0(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $a(B)$ не зависит от потенциала φ_0 и определяется рядом (37). Функция $a^0(B)$ в силу формулы для R_0^{-1} однозначно выражается через известные функции $a(B)$, $R_0^{-1}(B)$. Коэффициенты разложения функции $a^0(B)$ в ряд Тейлора по B определяются формулой (38). Из доказанной в §§ 1–2 теоремы о полноте, ортогональности и ортонормируемости системы функций $D^n 1$, $n = 0, 1, \dots$, следует, что

$$\varphi_0(\eta b) - \overline{\varphi}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (D^n 1)(\varphi_0(\eta b) - \overline{\varphi}_0, D^n 1).$$

Коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(\eta b) - \overline{\varphi}_0$ по системе $D^n 1$, $n \geq 1$, в силу формулы (38) равны коэффициентам степенного ряда Тейлора функции $a^0(B)$ по параметру B , умноженным на $(-1)^{n-1}$. Значит, функция $\varphi_0(\eta b) - \overline{\varphi}_0$ однозначно восстанавливается по коэффициентам Тейлора функции $a^0(B)$ в области $|B| < 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sz-Nagy B., Foias C. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. Amsterdam–London: North-Holland Publ. Company, 1970.
- [2] Gohberg I., Krupnik N. One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. V. 1: Birkhäuser Verlag, 1992.
- [3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. V. 1, 2. М.: Мир, 1965.
- [4] Кашин А.Б., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [5] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Физматлит, 1987.
- [6] Ramirez de Arellano E., Vasilevskii N. N. Algebras of singular integral operators generated by three orthogonal projections // Integr. Equat. Oper. Th. 1996. V. 25. P. 277–288.
- [7] Девдариани Г.Г. Базисность одной системы синусов // Тр. ин-та прикл. матем. им. И. Н. Векюа. Т. 19. Тбилиси, 1987. С. 26–35.
- [8] Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
- [9] Гуревич Ю.Г., Кучеренко В.В., Рамирес де Ареллано Э. О задаче с косою производной в теории гальваномагнитных эффектов // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 4. С. 520–532.

Departamento Matematicas, ESFM, IPN, Mexico

Поступило

Departamento Matematicas, CINVESTAV, IPN, Mexico

06.04.1998

E-mail: valeri@esfm.ipn.mx, nvasilev@math.cinvestav.mx

Исправленный вариант

03.11.1999