Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский, Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 605–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:11:19

Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах

Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский

Мы получаем новую оценку суммы значений мультипликативного характера по модулю q на последовательности сдвинутых простых чисел $p + a$, $p \leq N$. Наша оценка нетривиальна при $N \geq q^{8/9+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – любое число. Это уточняет оценку З. Х. Рахмонова, нетривиальную лишь при $N \geq q^{1+\varepsilon}$.

Библиография: 9 названий.

Посвящается памяти А. А. Карацубы

1. Введение

Пусть q – произвольное положительное число, χ – неглавный характер по модулю q . Наша цель состоит в том, чтобы оценить сумму значений характеров вида

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) \chi(n + a), \quad (1)$$

где a – целое число, взаимно простое с q , и, как обычно,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n \text{ – степень простого } p, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

– функция Мангольда.

В случае простого модуля q Карацуба [1], уточняя результат Виноградова, доказал, что в такой сумме взаимное погашение слагаемых можно уловить уже при $N > q^{1/2+\varepsilon}$. Позже Рахмонов [2], [3] показал, что подобную осцилляцию можно уловить и в более сложном случае составного модуля q , но в менее широком диапазоне значений: $N > q^{1+\varepsilon}$. Наша цель состоит в том, чтобы перенести последний результат на более широкий диапазон. Хотя наш метод работает и в случае больших значений N , для того, чтобы максимально упростить изложение, мы будем предполагать, что $N \leq q^{16/9}$, тем более, что при $N > q^{16/9}$ теорема из работы [3] приводит к более точной оценке. Мы дадим доказательство лишь для случая примитивных характеров, что также позволяет частично упростить рассуждения. Перенос главного

Работа первого автора выполнена при поддержке NSERC (Канада) (грант A5123), а также Ellentuck Fund (осень 2009) во время работы в Институте перспективных исследований. Работа второго автора выполнена при поддержке NNSF (КНР) (грант 10671056). Работа третьего автора выполнена при поддержке ARC (Австралия) (грант DP0881473).

результата на случай непримитивных характеров осуществляется подобно тому, как это сделано в [3], но с использованием лемм, доказанных в настоящей статье.

ТЕОРЕМА 1. При $N \leq q^{16/9}$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \chi(n+a) \right| \leq (N^{7/8} q^{1/9} + N^{33/32} q^{-1/18}) q^{o(1)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $N \geq q^{8/9+\varepsilon}$ имеет место оценка

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) \chi(n+a) \ll N q^{-\delta},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит от ε .

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Некоторые известные неравенства и замечания общего характера.

Для целого $n \geq 2$ через $\tau(n)$ мы будем обозначать число положительных делителей n . Кроме того, $\varphi(n)$ обозначает функцию Эйлера числа n , а $\omega(n)$ есть число различных простых делителей n . Напомним следующие хорошо известные неравенства:

$$\tau(n) \leq n^{o(1)}, \quad \varphi(n) \gg \frac{n}{\ln \ln(n+2)}, \quad \omega(n) \ll \frac{\ln(n+1)}{\ln \ln(n+2)}. \quad (2)$$

Нам понадобится также одно простое следствие решета Эратосфена.

ЛЕММА 1. Для любых целых чисел $q, U \geq 1$ справедливо равенство

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^U 1 = \frac{\varphi(q)}{q} U + O(2^{\omega(q)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь значениями $\mu(d)$ функции Мёбиуса на делителях числа q для того, чтобы учесть условие взаимной простоты, и меняя затем порядок суммирования, приходим к формуле Лежандра

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^U 1 = \sum_{d|q} \mu(d) \left[\frac{U}{d} \right] = U \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(\sum_{d|q} |\mu(d)| \right),$$

из которой сразу следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Для любых целых чисел $u_0, U \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{u=1}^U \frac{(u_0, u)}{u} \ll \tau(u_0) \ln U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{u=1}^U \frac{(u_0, u)}{u} = \sum_{d|u_0} d \sum_{\substack{u=1 \\ (u_0, u)=d}}^U \frac{1}{u} \ll \sum_{d|u_0} d \sum_{v \leq U/d} \frac{1}{vd} = \sum_{d|u_0} \sum_{v \leq U/d} \frac{1}{v}.$$

Последнее неравенство и завершает доказательство.

Поскольку в теореме 1 мы ограничиваемся случаем $N \leq q^{16/9}$, то мы будем предполагать выполнение этого неравенства и при доказательстве вспомогательных утверждений, несмотря на то, что некоторые из их оценок остаются содержательными и в более широком диапазоне.

2.2. Тожество Вона. Нам понадобится следующее утверждение из [4] (см. также [5]):

ЛЕММА 3. *Для произвольной комплекснозначной функции $f(n)$ и любых вещественных чисел $U, V > 1$ с условием $UV \leq N$ имеет место неравенство*

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) f(n) \ll \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + |\Sigma_4|,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left| \sum_{n \leq U} \Lambda(n) f(n) \right|, & \Sigma_2 &= (\ln UV) \sum_{v \leq UV} \left| \sum_{s \leq N/v} f(sv) \right|, \\ \Sigma_3 &= (\ln N) \sum_{v \leq V} \max_{w \geq 1} \left| \sum_{w \leq s \leq N/v} f(sv) \right|, & \Sigma_4 &= \sum_{\substack{k\ell \leq N \\ k > V, \ell > U}} \Lambda(\ell) \sum_{d|k, d \leq V} \mu(d) f(k\ell). \end{aligned}$$

Мы применим это тождество в случае

$$f(n) = \begin{cases} \chi(n+a), & \text{если } (n, q) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

2.3. Оценка Виноградова–Пойа. Начнем с одного небольшого обобщения оценки Виноградова–Пойа на случай примитивных характеров. Доказательство проводится по стандартной схеме (см., например, [6; теорема 12.5]).

ЛЕММА 4. *Для произвольных целых чисел $d \geq 1$, M и $N \geq 1$, для произвольного примитивного характера χ по модулю q справедлива оценка*

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn+a) \right| \leq N(d, q) q^{-1/2} + q^{1/2+o(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn+a) = \sum_{x=1}^q \chi(x) \sum_{M < n \leq M+N} \frac{1}{q} \sum_{\lambda=1}^q e\left(\frac{\lambda(x-dn-a)}{q}\right),$$

где, как обычно, $e(\alpha)$ означает $\exp(2\pi i \alpha)$. Из классической оценки суммы Гаусса (см., например, [6; оценка (12.48)]) находим

$$\left| \sum_{x=1}^q \chi(x) e\left(\frac{\lambda x}{q}\right) \right| \leq q^{1/2}.$$

Положим $d = d_0(d, q)$, $q = q_0(d, q)$, так что $(d_0, q_0) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| &\leq q^{-1} \sum_{|\lambda| \leq q/2} \left| \sum_{M < n \leq M+N} e\left(\frac{-\lambda(nd + a)}{q}\right) \right| \left| \sum_{x=1}^q \chi(x) e\left(\frac{\lambda x}{q}\right) \right| \\ &\leq (d, q) q^{-1/2} \sum_{|\lambda| \leq q_0/2} \left| \sum_{M < n \leq M+N} e\left(\frac{\lambda d_0 n}{q_0}\right) \right| \\ &\leq (d, q) q^{-1/2} \left(N + \sum_{1 \leq |\lambda| \leq q_0/2} \frac{q_0}{|\lambda|} \cdot (\lambda, q_0) \right). \end{aligned}$$

Последнее неравенство наряду с леммой 2 завершают доказательство.

Сейчас нами будет доказана

ЛЕММА 5. *Для любых целых чисел M и R справедлива оценка*

$$\left| \sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r, q)=1}} \chi(r + a) \right| \leq q^{1/2+o(1)} + Rq^{-1/2+o(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай $1 \leq R \leq q$. Пользуясь, как и в лемме 1, решетом Эратосфена, запишем исходную сумму в виде

$$\sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r, q)=1}} \chi(r + a) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{M/d < n \leq (M+R)/d} \chi(dn + a).$$

Применяя ко внутренней сумме оценку леммы 4, будем иметь

$$\sum_{M/d < n \leq (M+R)/d} \chi(dn + a) \leq (Rd^{-1} + 1)dq^{-1/2} + q^{1/2+o(1)} \leq q^{1/2+o(1)}.$$

Суммируя теперь по $\tau(q)$ значениям d и пользуясь оценкой (2), находим

$$\left| \sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r, q)=1}} \chi(r + a) \right| \leq q^{1/2+o(1)}.$$

Чтобы доказать лемму для больших значений R , разобьем промежутки суммирования на не более чем $Rq^{-1} + 1$ промежутков, длина каждого из которых, кроме, быть может, последнего, более короткого, равна q , и применим к каждой из получившихся сумм доказанную выше оценку. Так получим искомое неравенство.

2.4. Оценки Берджесса. Для оценок более коротких сумм значений характеров мы воспользуемся некоторыми результатами и идеями Берджесса [7]–[9]. В частности, нам потребуется следующая оценка (теорема В из работы [9]).

ЛЕММА 6. *Для любого примитивного характера χ по модулю q и любого целого $V < q^{1/6}$ справедлива оценка*

$$\sum_{v_1, \dots, v_6=1}^V \left| \sum_{x=1}^q \chi\left(\prod_{i=1}^3 (x + v_i)\right) \bar{\chi}\left(\prod_{i=4}^6 (x + v_i)\right) \right| \leq V^3 q^{1+o(1)}.$$

ЛЕММА 7. Для любого примитивного характера χ по модулю q , любых целых чисел M и $N \geq 1$ и любого целого d с условием $dN \leq q^{7/12}$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+o(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $q_0(\varepsilon)$ такая, что

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}$$

при всех $q > q_0(\varepsilon)$. Докажем эту оценку индукцией по N . Наши рассуждения будут подобны тем, что используются в [6] для доказательства теоремы 12.6.

При $N \leq q^{1/3}$ оценка становится тривиальной, что и составляет базу индукции. Отметим также, что ввиду условия $dN \leq q^{7/12}$ оценка становится тривиальной и при $d > q^{1/14}$. Таким образом, можно считать, что

$$N > q^{1/3} \quad \text{и} \quad d \leq q^{1/14}. \quad (4)$$

Положим

$$U = [0.5Ndq^{-1/6}], \quad V = [0.5d^{-1}q^{1/6}]$$

и обозначим через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ следующие множества целых чисел:

$$\mathcal{U} = \{1 \leq u \leq U : (u, dq) = 1\}, \quad \mathcal{V} = \{1 \leq v \leq V : (v, q) = 1\}.$$

В силу предположения индукции для любого целого $h \leq H < N$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq \left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(d(n+h) + a) \right| + 2d^{5/6} H^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}.$$

Положим $H = UV$. Взяв $h = uv$, где $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, получим

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq \frac{1}{\#\mathcal{U}\#\mathcal{V}} |W| + 2d^{5/6} (UV)^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}, \quad (5)$$

где

$$W = \sum_{u \in \mathcal{U}} \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{M < n \leq M+N} \chi(d(n+uv) + a) = \sum_{u \in \mathcal{U}} \chi(u) \sum_{M < n \leq M+N} \sum_{v \in \mathcal{V}} \chi((dn+a)u^{-1} + dv).$$

Таким образом,

$$|W| \leq \sum_{x=1}^q \nu(x) \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} \chi(x + dv) \right|,$$

где $\nu(x)$ – число представлений вида $x \equiv (dn + a)u^{-1} \pmod{q}$ с условиями $M < n \leq M + N$ и $u \in \mathcal{U}$.

Согласно неравенству Гёльдера

$$|W|^6 \leq \sum_{x=1}^q \nu^2(x) \left(\sum_{x=1}^q \nu(x) \right)^4 \sum_{x=1}^q \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} \chi(x + dv) \right|^6.$$

Очевидно, что

$$\sum_{x=1}^q \nu(x) = N\#\mathcal{U}, \quad \sum_{x=1}^q \nu^2(x) = T,$$

где T – число решений сравнения

$$(dn_1 + a)u_2 \equiv (dn_2 + a)u_1 \pmod{q}, \quad M < n_1, n_2 \leq M + N, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{U}.$$

Поэтому, применяя лемму 6 (что допустимо, поскольку $V \leq d^{-1}q^{1/6}$), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^q \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} \chi(x + dv) \right|^6 &= \sum_{v_1, \dots, v_6 \in \mathcal{V}} \sum_{x=1}^q \chi \left(\prod_{i=1}^3 (x + dv_i) \right) \bar{\chi} \left(\prod_{i=4}^6 (x + dv_i) \right) \\ &\leq \sum_{v_1, \dots, v_6=1}^V \left| \sum_{x=1}^q \chi \left(\prod_{i=1}^3 (x + dv_i) \right) \bar{\chi} \left(\prod_{i=4}^6 (x + dv_i) \right) \right| \leq d^3 V^3 q^{1+o(1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|W|^6 \leq T(N\#\mathcal{U})^4 d^3 V^3 q^{1+o(1)}. \quad (6)$$

Чтобы оценить величину T , запишем равенство

$$(dn_1 + a)u_2 - (dn_2 + a)u_1 = kq, \quad (7)$$

где k – некоторое целое число, и заметим, что

$$\left| k - \frac{a(u_2 - u_1)}{q} \right| = \frac{d|n_1 u_2 - n_2 u_1|}{q} \leq \frac{dNU}{q}.$$

Значит, для заданных u_1, u_2 имеется лишь $O(dNU/q + 1)$ возможностей для k . Если же заданы u_1, u_2 и k , то из (7) следует, что n_2 принадлежит к некоторому фиксированному классу вычетов по модулю

$$\frac{u_2}{(du_1, u_2)} = \frac{u_2}{(u_1, u_2)}$$

(поскольку $(u_2, d) = 1$) и может принимать, следовательно, не более

$$\frac{N(u_1, u_2)}{u_2} + 1 \ll \frac{N(u_1, u_2)}{u_2}$$

значений. (Здесь мы пользуемся тем, что $u_2 \leq U \leq N$.) После того, как все перечисленные параметры зафиксированы, значение n_1 находится из (7) однозначно. Отсюда, пользуясь леммой 2 и оценкой (2), мы заключаем, что

$$T \ll \left(\frac{dNU}{q} + 1 \right) N \sum_{u_1, u_2 \in \mathcal{U}} \frac{(u_1, u_2)}{u_2} = \left(\frac{dNU}{q} + 1 \right) NU q^{o(1)}.$$

Подставляя эту оценку в (6), находим

$$|W|^6 \leq \left(\frac{dNU}{q} + 1 \right) NU (N\#\mathcal{U})^4 d^3 V^3 q^{1+o(1)} \leq \left(\frac{dNU}{q} + 1 \right) (NU)^5 d^3 V^3 q^{1+o(1)}.$$

Из леммы 1 и оценок (2) с помощью (4) несложно вывести, что для выбранных U и V выполнено

$$\#\mathcal{U} = Uq^{o(1)} \quad \text{и} \quad \#\mathcal{V} = Vq^{o(1)}.$$

Собирая все полученные оценки вместе, из (5) мы заключаем, что

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{1/2} \left(\frac{d^{1/6} N}{V^{1/2}} + \frac{N^{5/6} q^{1/6}}{U^{1/6} V^{1/2}} \right) q^{o(1)} + 2d^{5/6} (UV)^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}.$$

Возвращаясь к определению чисел U и V , находим

$$(UV)^{2/3} \leq \left(\frac{1}{4} N \right)^{2/3} \leq \frac{2}{5} N^{2/3}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{1/2} \left(\frac{d^{2/3} N}{q^{1/12}} + d^{1/3} N^{2/3} q^{1/9} \right) q^{o(1)} + \frac{4}{5} d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}.$$

Заметим теперь, что при $dN \leq q^{7/12}$ справедливо неравенство

$$\frac{d^{2/3} N}{q^{1/12}} \leq d^{1/3} N^{2/3} q^{1/9}.$$

Поэтому полученная выше оценка преобразуется к более простому виду

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+o(1)} + \frac{4}{5} d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+\varepsilon} \leq d^{5/6} N^{2/3} q^{1/9+\varepsilon}$$

в случае, когда q становится больше некоторой границы. Но эта граница зависит лишь от ε и оказывается одной и той же на каждом шаге рассуждений. Этим и завершается доказательство.

Сейчас мы докажем одно утверждение, уточняющее оценку леммы 5 в случае малых значений R .

ЛЕММА 8. *Для любых целых чисел M и R с условием $R \leq q^{7/12}$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r,q)=1}} \chi(r + a) \right| \leq R^{5/7} q^{2/21+o(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 5, снова воспользуемся решетом Эратосфена. Имеем

$$\sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r,q)=1}} \chi(r + a) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{M/d < n \leq (M+R)/d} \chi(dn + a).$$

Для тех d , для которых $d < R^{2/7} q^{-2/21}$, внутреннюю сумму оценим с помощью леммы 7, а для больших значений d воспользуемся тривиальной границей $Rd^{-1} + 1$. Тогда искомая оценка будет следовать из (2).

Наконец, для работы со средними по величине значениями имеется следующий аналог леммы 6 (см. [7; лемма 8]).

ЛЕММА 9. Для любого примитивного характера χ по модулю q и произвольного целого положительного числа V справедлива оценка

$$\sum_{v_1, \dots, v_4=1}^V \left| \sum_{x=1}^q \chi \left(\prod_{i=1}^2 (x + v_i) \right) \bar{\chi} \left(\prod_{i=3}^4 (x + v_i) \right) \right| \leq V^2 q + V^4 q^{1/2+o(1)}.$$

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 7, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 10. Для любого примитивного характера χ по модулю q , произвольных целых чисел M и $N \geq 1$, для любого целого d с условием $dN \leq q^{5/8}$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{3/4} N^{1/2} q^{3/16+o(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 7, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $q_0(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{3/4} N^{1/2} q^{3/16+\varepsilon}$$

при всех $q > q_0(\varepsilon)$. Это утверждение мы докажем индукцией по N , база которой получается при любом $N \leq q^{3/8}$. Кроме того, мы можем считать, что

$$N > q^{3/8} \quad \text{и} \quad d \leq q^{1/10}. \quad (8)$$

Положим

$$U = \left\lfloor \frac{1}{3} N d q^{-1/4} \right\rfloor, \quad V = \left\lfloor \frac{1}{3} d^{-1} q^{1/4} \right\rfloor$$

и определим для этих новых значений U и V множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ точно так же, как это было сделано выше. Тогда в силу предположения индукции вместо (5) получаем следующее неравенство:

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq \frac{1}{\#\mathcal{U} \#\mathcal{V}} |W| + 2d^{3/4} (UV)^{1/2} q^{3/16+\varepsilon}, \quad (9)$$

где в силу неравенства Гёльдера

$$|W|^4 \leq \sum_{x=1}^q \nu^2(x) \left(\sum_{x=1}^q \nu(x) \right)^2 \sum_{x=1}^q \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} \chi(x + dv) \right|^2.$$

Следовательно, пользуясь леммой 9, вместо (6) получим

$$|W|^4 \leq T(N \#\mathcal{U})^2 d^2 V^2 q^{1+o(1)}.$$

Так приходим к оценке

$$|W|^4 \leq \left(\frac{dNU}{q} + 1 \right) (NU)^3 d^2 V^2 q^{1+o(1)}.$$

Обращаясь к (8), с помощью леммы 1 легко устанавливаем, что для таким образом определенных U и V справедливы равенства

$$\#\mathcal{U} = Uq^{o(1)} \quad \text{и} \quad \#\mathcal{V} = Vq^{o(1)}.$$

Собирая все полученные оценки вместе, с помощью (9) находим

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{1/2} \left(\frac{d^{1/4}N}{V^{1/2}} + \frac{N^{3/4}q^{1/4}}{U^{1/4}V^{1/2}} \right) q^{o(1)} + 2d^{3/4}(UV)^{1/2}q^{3/16+\varepsilon}.$$

Далее, по выбору U и V имеем

$$(UV)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{9}N \right)^{1/2} \leq \frac{1}{3}N^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{1/2} \left(\frac{d^{3/4}N}{q^{1/8}} + d^{1/4}N^{1/2}q^{3/16} \right) q^{o(1)} + \frac{2}{3}d^{3/4}N^{1/2}q^{3/16+\varepsilon}.$$

Заметим теперь, что при $dN \leq q^{5/8}$ справедливо неравенство

$$\frac{d^{3/4}N}{q^{1/8}} \leq d^{1/4}N^{1/2}q^{3/16}.$$

Поэтому найденная выше оценка записывается в виде

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(dn + a) \right| \leq d^{3/4}N^{1/2}q^{3/16+o(1)} + \frac{2}{3}d^{3/4}N^{1/2}q^{3/16+\varepsilon} \leq d^{3/4}N^{1/2}q^{3/16+\varepsilon},$$

если только q достаточно велико. Это завершает шаг индукции.

Наконец, применяя лемму 10 по той же схеме, что лемму 5 (для больших значений R) и лемму 8 (для малых значений R), получаем следующую оценку, справедливую для средних значений.

ЛЕММА 11. Для любых целых чисел M и R с условием $R \leq q^{5/8}$ имеем

$$\left| \sum_{\substack{M < r \leq M+R \\ (r,q)=1}} \chi(r + a) \right| \leq R^{3/5}q^{3/20+o(1)}.$$

3. Оценки сумм Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$

3.1. Сумма Σ_1 . Для функции $f(n)$, определенной равенством (3), выполнено $|f(n)| \leq 1$. Следовательно, из теоремы о простых числах получаем

$$\Sigma_1 \leq \sum_{n \leq U} \Lambda(n) \ll U.$$

3.2. Сумма Σ_2 . К сумме Σ_2 мы применим оценку леммы 5 (при $v \leq Nq^{-5/8}$), оценку леммы 11 (при $Nq^{-5/8} \leq v \leq Nq^{-7/12}$) и оценку леммы 8 (при $Nq^{-7/12} \leq v \leq UV$). Так сумма представится в виде

$$\Sigma_2 = (\ln UV) \sum_{\substack{v \leq UV \\ (v,q)=1}} \left| \sum_{\substack{s \leq N/v \\ (s,q)=1}} \chi(s + av^{-1}) \right| = (\ln UV)(\Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2} + \Sigma_{2,3}),$$

где суммы $\Sigma_{2,1}$, $\Sigma_{2,2}$ и $\Sigma_{2,3}$ отвечают указанным выше промежуткам изменения v .

Из леммы 5 получаем

$$\Sigma_{2,1} \leq \sum_{v \leq Nq^{-5/8}} (Nv^{-1}q^{-1/2+o(1)} + q^{1/2+o(1)}) \leq Nq^{-1/8+o(1)}.$$

Далее, для $\Sigma_{2,2}$ по лемме 11 имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,2} &\leq \sum_{Nq^{-5/8} \leq v \leq Nq^{-7/12}} \left(\frac{N}{v} \right)^{3/5} q^{3/20+o(1)} = N^{3/5} q^{3/20+o(1)} \sum_{Nq^{-5/8} \leq v \leq Nq^{-7/12}} v^{-3/5} \\ &\leq N^{3/5} q^{3/20+o(1)} \left(\frac{N}{q^{7/12}} \right)^{2/5} = Nq^{-1/12+o(1)}. \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь леммой 8, сумму $\Sigma_{2,3}$ оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,3} &\leq \sum_{Nq^{-7/12} \leq v \leq UV} \left(\frac{N}{v} \right)^{5/7} q^{2/21+o(1)} \\ &= N^{5/7} q^{2/21+o(1)} \sum_{Nq^{-7/12} \leq v \leq UV} v^{-5/7} \leq N^{5/7} q^{2/21+o(1)} (UV)^{2/7}. \end{aligned}$$

Собирая все эти оценки вместе, получаем

$$\Sigma_2 \leq Nq^{-1/12+o(1)} + N^{5/7} U^{2/7} V^{2/7} q^{2/21+o(1)}.$$

3.3. Сумма Σ_3 . Подобно тому, как мы оценили сумму Σ_2 , находим

$$\Sigma_3 = (\ln N) \sum_{\substack{v \leq V \\ (v,q)=1}} \max_{w \geq 1} \left| \sum_{\substack{w \leq s \leq N/v \\ (s,q)=1}} \chi(s + av^{-1}) \right| \leq Nq^{-1/12+o(1)} + N^{5/7} V^{2/7} q^{2/21+o(1)}.$$

3.4. Сумма Σ_4 . Для суммы Σ_4 имеем равенство

$$\Sigma_4 = \sum_{\substack{U < k \leq N/V \\ (k,q)=1}} \Lambda(k) \sum_{V < \ell \leq N/k} A(\ell) \chi(k\ell + a),$$

где

$$A(\ell) = \begin{cases} \sum_{d|\ell, d \leq V} \mu(d) & \text{при } (\ell, q) = 1, \\ 0, & \text{при } (\ell, q) > 1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\Lambda(k) \leq \ln k \leq k^{o(1)} \quad \text{и} \quad |A(\ell)| \leq \tau(\ell) \leq \ell^{o(1)}.$$

Чтобы оценить Σ_4 , рассмотрим положительный параметр Δ с условием

$$\frac{1}{U} \leq \Delta < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Определим теперь множество

$$\Omega = \{U(1 + \Delta)^j : 0 \leq j \leq R\}, \quad \text{где} \quad R = \left\lfloor \frac{\ln(N/UV)}{\ln(1 + \Delta)} \right\rfloor \ll \Delta^{-1} \ln N.$$

Поскольку для $W \leq k \leq W(1 + \Delta)$ выполняются неравенства

$$\frac{N}{W} - \frac{N}{k} \leq \frac{N\Delta}{k} \leq \frac{N\Delta}{W},$$

то

$$\begin{aligned} |\Sigma_4| &\leq \sum_{W \in \Omega} \sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \Lambda(k) \left| \sum_{V < \ell \leq N/k} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right| \\ &\leq q^{o(1)} \sum_{W \in \Omega} \sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \left(\left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right| + \frac{N\Delta}{W} \right) \\ &\leq q^{o(1)} \left(\sum_{W \in \Omega} \sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right| + N\Delta \right). \end{aligned}$$

Разобьем теперь множество Ω на три подмножества

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ W \in \Omega : \frac{N}{W} \leq q^{1/6} \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ W \in \Omega : q^{1/6} < \frac{N}{W} \leq q^{1/4} \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ W \in \Omega : q^{1/4} < \frac{N}{W} \right\} \end{aligned}$$

и рассмотрим вклад от чисел W , принадлежащих каждому из этих множеств, в исходную сумму

$$\Sigma_4(\Omega_i) = \sum_{W \in \Omega_i} \sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так находим

$$|\Sigma_4| \leq (\Sigma_4(\Omega_1) + \Sigma_4(\Omega_2) + \Sigma_4(\Omega_3) + N\Delta) q^{o(1)}. \quad (11)$$

Используя неравенство Гёльдера наряду с условием (10), согласно которому $W\Delta \geq 1$ при $W \in \Omega$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right| \right)^{2r} \\ &\leq (W\Delta)^{2r-1} \sum_{\substack{W \leq k \leq W(1+\Delta) \\ (k,q)=1}} \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + ak^{-1}) \right|^{2r} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\leq (W\Delta)^{2r-1} \left(\frac{W\Delta}{q} + 1 \right) \sum_{k=1}^q \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + k) \right|^{2r},$$

которое будем использовать в дальнейшем лишь при $r = 2, 3$.

Заметим теперь, что для любого вещественного α выполняются оценки

$$\sum_{\substack{W \in \Omega \\ A \leq W \leq B}} W^\alpha \ll \Delta^{-1} (B^\alpha + A^\alpha) \ln N \leq \Delta^{-1} (B^\alpha + A^\alpha) q^{o(1)}. \quad (13)$$

С помощью леммы 6 для $W \in \Omega_1$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + k) \right|^6 &\leq q^{o(1)} \sum_{\ell_1, \dots, \ell_6 \leq N/W} \left| \sum_{k=1}^q \chi \left(\prod_{i=1}^3 (k + \ell_i) \right) \overline{\chi} \left(\prod_{i=4}^6 (k + \ell_i) \right) \right| \\ &\leq \left(\frac{N}{W} \right)^3 q^{1+o(1)}. \end{aligned}$$

Согласно (12), (13) суммарный вклад от чисел $W \in \Omega_1$ оценивается как

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\Omega_1) &\leq \sum_{W \in \Omega_1} (W\Delta)^{5/6} \left(\frac{W\Delta}{q} + 1 \right)^{1/6} \left(\frac{N}{W} \right)^{1/2} q^{1/6+o(1)} \\ &\leq N^{1/2} q^{1/6+o(1)} \sum_{\substack{W \in \Omega \\ W > Nq^{-1/6}}} (W^{1/2} \Delta q^{-1/6} + W^{1/3} \Delta^{5/6}) \\ &\leq N^{1/2} q^{1/6+o(1)} \left(\left(\frac{N}{V} \right)^{1/2} q^{-1/6} + \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \Delta^{-1/6} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Sigma_4(\Omega_1) \leq (NV^{-1/2} + N^{5/6} V^{-1/3} \Delta^{-1/6} q^{1/6}) q^{o(1)}. \quad (14)$$

Аналогично, для $W \in \Omega_2$ в силу леммы 9 имеем

$$\sum_{k=1}^q \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell) \chi(\ell + k) \right|^4 \leq (N/W)^2 q^{1+o(1)}.$$

Согласно (12) и (13) суммарный вклад от $W \in \Omega_2$ оценивается как

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\Omega_2) &\leq \sum_{W \in \Omega_2} (W\Delta)^{3/4} \left(\frac{W\Delta}{q} + 1 \right)^{1/4} \left(\frac{N}{W} \right)^{1/2} q^{1/4+o(1)} \\ &\leq N^{1/2} q^{1/4+o(1)} \sum_{\substack{W \in \Omega \\ Nq^{-1/4} < W \leq Nq^{-1/6}}} (W^{1/2} \Delta q^{-1/4} + W^{1/4} \Delta^{3/4}) \\ &\leq N^{1/2} q^{1/4+o(1)} \left(\left(\frac{N}{q^{1/6}} \right)^{1/2} q^{-1/4} + \left(\frac{N}{q^{1/6}} \right)^{1/4} \Delta^{-1/4} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_4(\Omega_2) \leq (Nq^{-1/12} + N^{3/4}\Delta^{-1/4}q^{5/24})q^{o(1)}. \quad (15)$$

Для $W \in \Omega_3$ область изменения ℓ разобьем на $L \ll NW^{-1}q^{-1/4}$ промежутков $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_L$, длина каждого из которых не превосходит $q^{1/4}$. Снова применяя неравенство Гёльдера и лемму 9, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^q \left| \sum_{V < \ell \leq N/W} A(\ell)\chi(\ell+k) \right|^4 \\ & \leq \sum_{k=1}^q \left| \sum_{\nu=1}^L \sum_{\ell \in \mathcal{J}_\nu} A(\ell)\chi(\ell+k) \right|^4 \leq L^3 \sum_{\nu=1}^L \sum_{k=1}^q \left| \sum_{\ell \in \mathcal{J}_\nu} A(\ell)\chi(\ell+k) \right|^4 \\ & \leq L^4 q^{3/2+o(1)} \leq (NW^{-1}q^{-1/4})^4 q^{3/2+o(1)} = \left(\frac{N}{W}\right)^4 q^{1/2+o(1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, пользуясь (12) и (13), заключаем, что суммарный вклад от чисел $W \in \Omega_3$ оценивается как

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\Omega_3) & \leq \sum_{\substack{W \in \Omega \\ W \leq Nq^{-1/4}}} (W\Delta)^{3/4} \left(\frac{W\Delta}{q} + 1\right)^{1/4} \left(\frac{N}{W}\right) q^{1/8+o(1)} \\ & \leq Nq^{1/8+o(1)} \sum_{\substack{W \in \Omega \\ W \leq Nq^{-1/4}}} (\Delta q^{-1/4} + W^{-1/4}\Delta^{3/4}) \\ & \leq Nq^{1/8+o(1)} (q^{-1/4} + U^{-1/4}\Delta^{-1/4}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_4(\Omega_3) \leq (Nq^{-1/8} + NU^{-1/4}\Delta^{-1/4}q^{1/8})q^{o(1)}. \quad (16)$$

Подставляя (14), (15) и (16) в (11) (и опуская член с $Nq^{-1/8}$, который поглощается слагаемым $Nq^{-1/12}$), получим

$$\begin{aligned} |\Sigma_4| & \leq (NV^{-1/2} + N^{5/6}V^{-1/3}\Delta^{-1/6}q^{1/6} \\ & \quad + Nq^{-1/12} + N^{3/4}\Delta^{-1/4}q^{5/24} + NU^{-1/4}\Delta^{-1/4}q^{1/8} + N\Delta)q^{o(1)}. \end{aligned}$$

4. Доказательство теоремы 1

Согласно лемме 3 и оценкам сумм Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n \leq N \\ (n,q)=1}} \Lambda(n)\chi(n+a) \\ & \ll \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + |\Sigma_4| \\ & \leq U + (Nq^{-1/12} + N^{5/7}U^{2/7}V^{2/7}q^{2/21})q^{o(1)} + (Nq^{-1/12} + N^{5/7}V^{2/7}q^{2/21})q^{o(1)} \\ & \quad + (NV^{-1/2} + N^{5/6}V^{-1/3}\Delta^{-1/6}q^{1/6} \\ & \quad + Nq^{-1/12} + N^{3/4}\Delta^{-1/4}q^{5/24} + NU^{-1/4}\Delta^{-1/4}q^{1/8} + N\Delta)q^{o(1)}. \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и опуская члены, которые поглощаются большими слагаемыми, находим

$$\left| \sum_{\substack{n \leq N \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) \chi(n+a) \right| \leq (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7) q^{o(1)},$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= Nq^{-1/12}, & \sigma_2 &= N^{5/7} U^{2/7} V^{2/7} q^{2/21}, & \sigma_3 &= NV^{-1/2}, \\ \sigma_4 &= N^{5/6} V^{-1/3} \Delta^{-1/6} q^{1/6}, & \sigma_5 &= N^{3/4} \Delta^{-1/4} q^{5/24}, \\ \sigma_6 &= NU^{-1/4} \Delta^{-1/4} q^{1/8}, & \sigma_7 &= N\Delta. \end{aligned}$$

Уравняем сначала величины σ_4 и σ_6 , положив $V = N^{-1/2} U^{3/4} \Delta^{1/4} q^{1/8}$, после чего уравняем каждую из этих величин с σ_2 , положив $U = N^{4/7} \Delta^{-3/7} q^{-1/126}$. Так получим

$$\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = N^{6/7} \Delta^{-1/7} q^{8/63}.$$

Далее, положив $\Delta = N^{-1/8} q^{1/9}$, уравняем эти слагаемые с величиной σ_7 :

$$\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = \sigma_7 = N^{7/8} q^{1/9}.$$

Если бы не наличие слагаемого σ_5 , это был бы оптимальный выбор величины Δ . Но можно заметить, что σ_5 поглощается слагаемым σ_6 . Действительно, чтобы оценка была нетривиальна, мы потребовали выполнения условия $N \geq q^{8/9}$. Пользуясь этим неравенством и определением Δ , находим

$$\sigma_5 = N^{3/4} \Delta^{-1/4} q^{5/24} = N^{25/32} q^{13/72} < N^{7/8} q^{1/9}.$$

По данному выше определению $U = N^{5/8} q^{-1/18}$, $V = N^{-1/16} q^{1/9}$ и, следовательно,

$$\sigma_3 = NV^{-1/2} = N^{33/32} q^{-1/18}.$$

Остается проверить, что таким образом определенные величины U , V , Δ удовлетворяют ряду ограничений, которые нами подразумевались выполненными. Прежде всего, можно считать, что $N \geq 64q^{8/9}$, так как в противном случае оценка тривиальна. Тогда $\Delta \leq 1/2$, как и требовалось. Кроме того, $\Delta U = N^{1/2} q^{1/18} > 1$, так что условие (10) удовлетворяется. Далее, при $N \geq 64q^{8/9}$ имеем неравенство $U > 1$, а при $N < q^{16/9}$ – неравенство $V > 1$. Наконец, при $N \geq 64q^{8/9}$ имеем также $UV = N^{9/16} q^{1/18} \leq N$.

Следовательно, при $N \leq q^{16/9}$ получаем оценку

$$\left| \sum_{\substack{n \leq N \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) \chi(n+a) \right| \leq (Nq^{-1/12} + N^{7/8} q^{1/9} + N^{33/32} q^{-1/18}) q^{o(1)}.$$

Остается заметить, что $Nq^{-1/12} < N^{33/32} q^{-1/18}$. Это и завершает доказательство.

Авторы благодарны З.Х. Рахмонову, который прислал им копию своей статьи [2] из труднодоступного журнала. Также мы благодарим рецензента за тщательную проверку рукописи и, в частности, за указание на то, что оценка предыдущей версии леммы 5 может быть немного усилена. Мы с удовольствием воспользовались этим указанием, хотя оно и не повлияло на окончательный результат.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Карацуба, “Суммы характеров с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 299–321.
- [2] З. Х. Рахмонов, “Об оценке суммы характеров с простыми числами”, *ДАН ТаджССР*, **29**:1 (1986), 16–20.
- [3] З. Х. Рахмонов, “О распределении значений характеров Дирихле и их приложения”, *Теория чисел и анализ*, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 286–296.
- [4] R. C. Vaughan, “An elementary method in prime number theory”, *Acta Arith.*, **37** (1980), 111–115.
- [5] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Grad. Texts in Math., **74**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2004.
- [7] D. A. Burgess, “On character sums and L -series”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **12**:1 (1962), 193–206.
- [8] D. A. Burgess, “On character sums and L -series. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **13**:1 (1963), 524–536.
- [9] D. A. Burgess, “On character sum estimate with $r = 3$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **33**:2 (1986), 219–226.

Дж. Б. Фридландер

University of Toronto, Канада

E-mail: frdlndr@math.toronto.edu

Поступило

29.11.2009

К. Гонг

Henan University, КНР

E-mail: kg@henu.edu.cn

И. Е. Шпарлинский

Macquarie University, Австралия

E-mail: igor.shparlinski@mq.edu.au