Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Замечание о свойстве Рохлина для пространства перемешиваний, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 953–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:42:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Замечание о свойстве Рохлина для пространства перемешиваний

С. В. Тихонов

В заметке рассматривается пространство перемешивающих, сохраняющих меру преобразований (перемешиваний) с метрикой, введенной в [1]. Показывается, что класс сопряженности произвольного перемешивания с положительной энтропией всюду плотен в этом пространстве.

Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех обратимых сохраняющих меру преобразований сепарабельного пространства Лебега (M, Σ, μ) , мера μ предполагается непрерывной и нормированной, и счетный набор множеств $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ порождает σ -алгебру Σ . Два преобразования отождествляются, если они совпадают с точностью до множества меры нуль.

Преобразование S называется *фактором* преобразования T , если существует сохраняющее меру преобразование v пространства (M, Σ, μ) (не обязательно обратимое) такое, что $v \circ T = S \circ v$ почти всюду¹. Фактор S , изоморфный бернуллиевскому сдвигу, называется *бернуллиевским фактором*. Преобразование T называется *перемешиванием*, если для любых множеств $A, B \in \Sigma$ имеем

$$\mu(T^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Как показано в [1] множество всех перемешиваний $\mathcal{M}$ является полным сепарабельным пространством относительно метрики

$$m(T, S) = \sum_i \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \triangle SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \triangle S^{-1}A_i)) \\ + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)|.$$

Перемешивание T обладает *свойством Рохлина*, если всюду плотен в $\mathcal{M}$ его класс сопряженности $\{U^{-1}TU\}_{U \in \mathcal{A}}$. Один из вопросов, связанных с метрикой m , – вопрос о том, какие перемешивания обладают свойством Рохлина.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предбазу окрестностей топологии пространства $\mathcal{M}$ образуют множества вида*

$$\mathcal{Q}(T, A_i, A_j, \varepsilon) = \left\{ S \mid \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)| < \varepsilon \right\}.$$

Отображение $S \mapsto U^{-1}SU$ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ непрерывно при любом фиксированном $U \in \mathcal{A}$.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3038.2008.1).

¹Это определение можно, конечно, обобщить, но для наших целей его достаточно. Заметим, что если преобразование v обратимо, то T и S изоморфны.

Если перемешивание представляется в виде прямого произведения двух перемешиваний (также действующих на пространстве Лебега с непрерывной мерой), то оно обладает свойством Рохлина. Как следствие, в $\mathcal{M}$ всюду плотны бернуллиевские сдвиги с любой фиксированной энтропией.

Доказательства этих утверждений можно найти в [2]. Утверждение про бернуллиевские сдвиги следует из того, что каждый бернуллиевский сдвиг представляется как прямое произведение двух сдвигов с вдвое меньшей энтропией, см. [3].

ЛЕММА 1. Пусть преобразование S является фактором преобразования T . Тогда сопряженные преобразованию T с любой точностью приближают преобразование S в метрике t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем сохраняющее меру преобразование v , для которого равенство $v \circ T = S \circ v$ выполнено почти всюду. Произвольная окрестность преобразования S содержит пересечение конечного числа $\{\mathcal{Q}(S, C_i, B_i, \varepsilon_i)\}_{i=1, \dots, n}$ элементов предбазы. Выберем сохраняющее меру преобразование U , удовлетворяющее условиям

$$UC_i = v^{-1}C_i, \quad UB_i = v^{-1}B_i \quad \text{при всех } i = 1, \dots, n,$$

и покажем, что $U^{-1}TU \in \mathcal{Q}(S, C_i, B_i, \varepsilon_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим множество $v^{-1}S^kC_i$. Оно измеримо и мера его равна мере C_i . С другой стороны,

$$S^kC_i = v^{-1}S^kC_i = v^{-1}S^kvv^{-1}C_i \supset T^kv^{-1}C_i.$$

Поскольку меры всех множеств в этой выкладке совпадают, сами множества совпадают почти всюду.

Имеем

$$\begin{aligned} \mu(S^kC_i \cap B_i) - \mu(U^{-1}T^kUC_i \cap B_i) &= \mu t(v^{-1}S^kC_i \cap v^{-1}B_i) - \mu(T^kUC_i \cap UB_i) \\ &= \mu(T^kv^{-1}C_i \cap v^{-1}B_i) - \mu(T^kv^{-1}C_i \cap v^{-1}B_i) = 0 < \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Определение энтропии и ее свойства можно найти, например, в [4].

ТЕОРЕМА 1. Перемешивания с положительной энтропией имеют свойство Рохлина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эргодическое преобразование T положительной энтропии имеет бернуллиевский фактор [5], обозначим его через S . Пусть $\mathcal{O}$ – любое открытое множество в $\mathcal{M}$. Перемешивание S обладает свойством Рохлина, поэтому существует $U \in \mathcal{A}$ такое, что $U^{-1}SU \in \mathcal{O}$. Так как операция $S \mapsto U^{-1}SU$ непрерывна, множество $U\mathcal{O}U^{-1}$ открыто. По предыдущей лемме, в нем найдется преобразование, сопряженное с T .

Автор признателен В.В. Рыжикову за сообщение, которое стимулировало написание этой заметки. О.Н. Агеев и А.М. Стёпин посмотрели текст и сделали ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.В. Тихонов, *УМН*, **62**:1 (2007), 209–210. [2] С.В. Тихонов, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 135–158. [3] D.S. Ornstein, *Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems*, Yale Math. Monogr., **5**, Yale Univ. Press, London, 1974. [4] И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980. [5] Я.Г. Синай, *Матем. сб.*, **63**:1 (1964), 23–42.

С. В. Тихонов

Российский государственный
торгово-экономический университет, г. Москва
E-mail: tikhonovc@mail.ru

Поступило

25.03.2010