Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Трушин, Наследование свойств на спектрах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 911–923

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:24:32

Наследование свойств на спектрах

Д. В. Трушин

В работе развивается техника наследования свойств со спектра на дифференциальный спектр, которая применяется для получения геометрических свойств морфизмов дифференциально алгебраических многообразий.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В данной работе мы представляем принципиально новую дифференциально алгебраическую технику, которая называется наследованием. Построенный аппарат позволяет автоматически получать некоторые факты дифференциальной алгебры из их коммутативных аналогов. Грубо говоря, вся задача разбивается на две части: установление автоматических зависимостей и доказательство свойств для недифференциального случая.

Первый шаг в полной мере отражен в утверждении 2. Шаг редукции дифференциальной задачи к недифференциальной получается из утверждения 5. Основным результатом, получаемый нашим методом – теорема 15. С учетом дополнительной геометрической техники, такой как утверждения 13 и 14, теорема 15 позволяет получить новые интересные геометрические свойства дифференциально алгебраических многообразий, такие как утверждение 25 и теорема 26. Последняя теорема означает, что все доминантные морфизмы дифференциально алгебраических групп являются открытыми сюръективными отображениями.

Следует отметить, что все другие работы в этом направлении в основном используют технику характеристических множеств (например, работа Кэссиди [1] или классические книги Колчина [2], [3]). Мы же добавляем к известному методу идеи метода наследования, что приводит к более глубоким геометрическим результатам. Такие результаты, как локальная открытость морфизмов для дифференциально алгебраических многообразий (утверждение 25) интересны сами по себе, так как они демонстрируют новые геометрические эффекты, именно эти эффекты и являются объектом изучения дифференциально алгебраической геометрии.

Самой нетривиальной частью доказательства является связь между свойствами плоскости коммутативного кольца и геометрией его дифференциального спектра, указанные в теореме 15. Сведение исходной задачи методами, описанными в главе 4, к недифференциальной позволило установить более тонкие связи между дифференциальными спектрами. Однако не ясно, как можно обойти свойство плоскости, которое не зависит от структуры дифференциального кольца.

2. Структура работы по пунктам. В п. 3 дается краткий обзор определений. В п. 4 объясняется наш основной метод и вводятся основные наследуемые свойства. Пункт 5 посвящен извлечению непосредственных следствий из полученных в п. 4 утверждений, таких как теоремы “о спуске” и “подъеме”. Чтобы работать с основным интересующим нас случаем – случаем дифференциально конечно порожденных алгебр над полем характеристики нуль, в п. 6 мы вводим технический результат – утверждение 5. Демонстрации его применения на уже известных фактах посвящен следующий п. 7. В п. 8 кольцевые результаты переводятся на геометрический язык спектров, после чего в п. 9 доказывается основной результат в кольцевых и топологических терминах. Пункт 10 посвящен локально замкнутым точкам дифференциального спектра, которые играют роль, аналогичную максимальному спектру в алгебраической геометрии. Это позволяет построить мостик от спектра к настоящим дифференциально алгебраическим многообразиям. Завершив все необходимые приготовления, в п. 11 формулируются геометрические следствия для дифференциально алгебраических многообразий и групп.

3. Определения и пояснения. Всюду в тексте под кольцом подразумевается ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Все гомоморфизмы колец сохраняют единицу. На протяжении всего текста материал книг [4] и [2] используется как известный, какие-либо неопределенные понятия и обозначения подразумеваются такими же, как и в указанных книгах.

Кратко поясним часть обозначений. Множество дифференцирований кольца будем обозначать через Δ , а фразу “дифференциальное кольцо” часто будем заменять на “ Δ -кольцо”; аналогично поступаем и с другими терминами. Если A и B – некоторые дифференциальные кольца, $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм между ними, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы в A и B соответственно, то *расширением* $\mathfrak{a}^e$ идеала $\mathfrak{a}$ называется идеал $Bf(\mathfrak{a})$, порожденный образом $f(\mathfrak{a})$ в B , а *сужением* $\mathfrak{b}^c$ идеала $\mathfrak{b}$ называется идеал $f^{-1}(\mathfrak{b})$. Сужения и расширения дифференциальных идеалов суть дифференциальные идеалы. Множество простых идеалов кольца A обозначим через $\text{Spec } A$ и называем *спектром* A . По аналогии для дифференциального кольца A множество его простых дифференциальных идеалов будем обозначать через $\text{Spec}^\Delta A$ и называем его *дифференциальным спектром*. Под *простым* дифференциальным кольцом всегда понимается дифференциальное кольцо, не содержащее нетривиальных дифференциальных идеалов.

Через f^* будем обозначать отображение спектра кольца B в спектр кольца A по правилу $f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Будем писать f_Δ^* для ограничения f^* на дифференциальный спектр. Также считаем, что пространства $\text{Spec } A$ и $\text{Spec}^\Delta A$ снабжены топологией Зарисского. Дифференциальное кольцо A называется *кольцом Кира*, если для любого дифференциального идеала $\mathfrak{a}$ из A его радикал также является дифференциальным идеалом. Дифференциальное кольцо A называется *алгеброй Ритта*, если A является $\mathbb{Q}$ -алгеброй. Заметим, что алгебры Ритта являются кольцами Кира [5].

4. Наследование свойств. Наследование свойств на спектрах понимается в следующем смысле. Пусть $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм колец Кира. Будем рассматривать следующую пару свойств:

- A1) f – гомоморфизм;
- A2) f – дифференциальный гомоморфизм.

Причем A1) влечет A2). Идея применения состоит в нахождении такой пары, а потом к сведению дифференциального факта к недифференциальному. Мы продемонстрируем, что такой путь действительно является плодотворным. Начнем с первого пункта, найдем такие пары свойств.

Вот первое наблюдение, касающееся связи простого и простого дифференциального спектров.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $A \rightarrow B$ – гомоморфизм дифференциальных колец Кира, $\mathfrak{p}$ – простой дифференциальный идеал в A . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{p}^{\text{ec}} = \mathfrak{p}$;
- 2) $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$;
- 3) $(f_{\Delta}^*)^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2)$ очевидным образом следует из известного факта из коммутативной алгебры [4; глава 3, § 2, предложение 3.16]. Покажем $2) \Rightarrow 3)$. Согласно [4; глава 3, § 2, упражнение 21 (IV)] слой $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$ естественно гомеоморфен $\text{Спец}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ и, как мы видим, дифференциальный слой $(f_{\Delta}^*)^{-1}(\mathfrak{p})$ естественно гомеоморфен $\text{Спец}^{\Delta}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$. Так как слой не пуст, то кольцо $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ ненулевое. Так как оно является кольцом Кира, то его дифференциальный спектр не пуст, что и означает требуемое.

Теперь введем еще пару определений. Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм колец.

Будем говорить, что f обладает *свойством подъема*, если для любой цепочки $\mathfrak{p}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$, где $\mathfrak{p}_i \in \text{Спец } f(A)$, и непустой цепочки $\mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_m$, $m < n$, где $\mathfrak{q}_i \in \text{Спец } B$, с условием $\mathfrak{q}_i \cap f(A) = \mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq m$, существует цепочка $\mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_n$, в которой $\mathfrak{q}_i \cap f(A) = \mathfrak{p}_i$ при $1 \leq i \leq n$.

Будем говорить, что f обладает *свойством спуска*, если для любой цепочки $\mathfrak{p}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{p}_n$, где $\mathfrak{p}_i \in \text{Спец } f(A)$, и непустой цепочки $\mathfrak{q}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{q}_m$, $m < n$, где $\mathfrak{q}_i \in \text{Спец } B$ с условием $\mathfrak{q}_i \cap f(A) = \mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq m$, существует цепочка $\mathfrak{q}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{q}_n$ с условием $\mathfrak{q}_i \cap f(A) = \mathfrak{p}_i$ при $1 \leq i \leq n$.

Если все то же самое выполняется для цепочек дифференциальных идеалов, то будем говорить, что f обладает *свойством подъема (спуска) для дифференциальных идеалов*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм колец Кира, и $\mathfrak{p}$ – некоторый простой дифференциальный идеал в A . Тогда

- 1) $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \emptyset \rightarrow (f_{\Delta}^*)^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$;
- 2) f^* сюръективен $\rightarrow f_{\Delta}^*$ сюръективен;
- 3) f обладает свойством подъема $\rightarrow f$ обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов;
- 4) f обладает свойством спуска $\rightarrow f$ обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) – это частный случай предложения 1. Второй пункт немедленно следует из первого, примененного ко всем простым дифференциальным идеалам A .

Для доказательства 3) достаточно рассмотреть случай двух идеалов $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ в A и идеала $\mathfrak{q}$ в B с условием $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. Применяя утверждение 1 для пары колец $A/\mathfrak{p} \subseteq B/\mathfrak{q}$ и идеала $\mathfrak{p}'$, получаем требуемое.

Аналогично, свойство 4) достаточно доказать для случая двух идеалов $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ в A и идеала $\mathfrak{q}$ в B с условием $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. Применяя утверждение 1 для колец $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{\mathfrak{q}}$ и идеала $\mathfrak{p}'$, получаем требуемое.

5. Первые применения. Теперь сосредоточимся на применении найденных пар свойств. Для демонстрации обобщим известные теоремы Козна–Зайденберга о “спуске” и “подъеме” (см. [4; глава 5]) на случай дифференциальных колец Кира.

ТЕОРЕМА 3 (о подъеме). Пусть $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм колец Кира, кольцо B цело над A . Тогда f обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о “подъеме” [4; глава 5, § 2, теорема 5.11] следует, что f обладает свойством подъема. Тогда из утверждения 2 следует, что f обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов.

ТЕОРЕМА 4 (о спуске). Пусть $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм колец Кира, где B – целостное кольцо, $f(A)$ целозамкнуто и B цело над A . Тогда f обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о “спуске” [4; глава 5, § 3, теорема 5.16] следует, что f обладает свойством спуска. Тогда из утверждения 2 следует, что f обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов.

Доказательства двух этих утверждений для случая алгебр Ритта приведены в работе [6].

Отметим, что указанные утверждения – не самый интересный случай применения указанных выше пар свойств. Самым интересным случаем является случай дифференциально конечно порожденных алгебр над полями характеристики нуль. Для успешной работы с ними нам понадобится некий механизм сведения дифференциальной задачи к недифференциальной, который и будет представлен далее.

6. Структурный результат. Следующее утверждение – это всего лишь немного иной взгляд на характеристические множества для дифференциальных идеалов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть A – алгебра Ритта, B – целостная дифференциально конечно порожденная алгебра над A . Тогда существует элемент s из B такой, что $B_s = C[y_\alpha]$, где C – конечно порожденная алгебра над A , а $\{y_\alpha\}$ – не более чем счетное множество алгебраически независимых над C переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо B представим как фактор-кольцо кольца дифференциальных многочленов над кольцом A , и пусть $\mathfrak{p}$ – идеал факторизации, т.е.

$$B = A\{y_1, \dots, y_n\}/\mathfrak{p}.$$

Рассмотрим $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ – некоторое характеристическое множество для $\mathfrak{p}$ при некотором ранжире. Обозначим через s произведение инициалов и сепарант множества F . Пусть W – множество переменных, входящих в многочлены из F , а Z – множество переменных, не являющихся собственными производными от лидеров из F и не лежащих в W . Тогда из [2; глава I, § 9, предложение 1] следует, что B_s представляется в нужном виде, где в качестве C нужно взять подалгебру, порожденную над A множествами W и $1/s$, а семейство $\{y_\alpha\}$ – это образ множества Z ,

причем

$$C = A[W]_s / (f_1, \dots, f_k).$$

7. Демонстрация. Продемонстрируем работу метода на более содержательных примерах. Идущие далее факты хорошо известны и встречаются в разном виде в разных работах, мы приводим их лишь для демонстрации; например [3; глава III, § 3, лемма 2] – аналог следующей теоремы, в том смысле, что наш результат формулируется не для специализаций, а для простых дифференциальных спектров. В другом виде этот результат можно найти в [1; глава 1, § 6, предложение 2].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \subseteq B$ – целостные дифференциальные алгебры Ритта и кольцо B является дифференциально конечно порожденным над A . Тогда в кольце A найдется элемент s такой, что отображение

$$\mathrm{Spec}^\Delta B_s \rightarrow \mathrm{Spec}^\Delta A_s$$

сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать сюръективность отображения для кольца B_u , где u – некоторый элемент B . Выберем элемент u такой, как в утверждении 5, и покажем, что имеет место сюръективное отображение на обычных спектрах, чего по п. 2) утверждения 2 достаточно. Действительно, в обозначениях утверждения 5 спектр B_u отображается на спектр C сюръективно. Теперь воспользуемся известным фактом из коммутативной алгебры, а именно, существует такой элемент s из A , что спектр C_s сюръективно отображается на спектр A_s (см. [4; глава 5, упражнение 20 и теорема 5.10]).

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть B – простая дифференциально конечно порожденная алгебра над дифференциальным полем характеристики нуль, $A \subseteq B$ – произвольная подалгебра над этим же полем. Тогда существует элемент s в A такой, что A_s проста.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В частности, если в качестве A выбрать $K\{y\}$, где y – произвольный элемент B , то получим, что всякий элемент простой дифференциально конечно порожденной алгебры над полем дифференциально зависим.

Следующее утверждение – вариация на тему [2; гл. 3, § 10, предложение 7].

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть B – простая дифференциально конечно порожденная алгебра над дифференциальным полем K характеристики нуль, F – ее поле частных, и пусть C_K, C_B, C_F – соответствующие подкольца констант. Тогда $C_B = C_F$, а значит, является полем, и расширение полей C_B/C_K алгебраическое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $C_B = C_F$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in C_F$. Дробный идеал $(B : a) = \{r \in B \mid ar \in B\}$ является нетривиальным дифференциальным идеалом, а значит, в силу простоты B содержит единицу, т.е. a лежит в B .

Докажем, что любой элемент y из C_F алгебраичен над C_K . Для этого применим теорему 6 для пары колец $K\{y\} = K[y]$ и B . Тогда существует такой элемент $s \in K[y]$, что кольцо $K[y]_s$ является простым дифференциальным кольцом. Следовательно, y не может быть алгебраически независимым.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В частности, если подполе констант в поле K является алгебраически замкнутым, то в любой простой дифференциально конечно порожденной алгебре над полем K не будет новых констант.

Таким образом, указанная техника позволяет получить другие доказательства уже известных фактов (оба следствия можно найти в [2; глава 3, § 10, предложение 7]). Но, что еще более важно, действуя аналогичным образом, можно сильно продвинуться в понимании геометрии дифференциальных спектров и получить совершенно новые факты. Чему и будут посвящены следующие пункты.

8. Геометрические аналоги. Напомним необходимые определения.

Подмножество $E = U_1 \cap V_1 \cup \dots \cup U_n \cap V_n$ топологического пространства X , где U_i открыты, а V_i замкнуты, называется *конструктивным*.

Если для отображения топологических пространств $f: Y \rightarrow X$ выполнено, что для любого $E \subseteq Y$ замкнутого $f(E)$ замкнуто, то f – замкнутое отображение.

Если для отображения топологических пространств $f: Y \rightarrow X$ выполнено, что для любого $U \subseteq Y$ открытого $f(U)$ открыто, то f – открытое отображение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть A – алгебра Ритта, B – дифференциально конечно порождена над A , и $\text{Спец}^\Delta A$ – нётерово топологическое пространство. Обозначим через f естественное вложение кольца A в B . Пусть $X = \text{Спец}^\Delta A$, $Y = \text{Спец}^\Delta B$. Тогда если $E \subseteq Y$ конструктивно, то $f_\Delta^*(E)$ конструктивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся следующим критерием: множество E нётерового топологического пространства является конструктивным тогда и только тогда, когда для любого неприводимого замкнутого множества X_0 в X либо $\overline{E \cap X_0} \neq X_0$, либо $E \cap X_0$ содержит непустое открытое множество в X_0 (см. [4; глава 7, упражнение 21]). Остается лишь воспользоваться теоремой 6. А именно, доказательство достаточно вести для $E = U \cap C$, где U открыто, а C замкнуто в Y . Заменив кольцо A на его гомоморфный образ, можно считать, что E открыто в Y . Из нётеровости Y следует, что E квазикompактно и, следовательно, покрывается конечным числом множеств вида $\text{Спец}^\Delta(B_g)$. Поэтому все сводится к случаю $E = Y$. Для доказательства конструктивности $f_\Delta^*(Y)$ воспользуемся указанным критерием. Пусть X_0 – неприводимое замкнутое подмножество в X такое, что пересечение $f_\Delta^*(Y) \cap X_0$ плотно в X_0 . Причем достаточно ограничить f_Δ^* на $(f_\Delta^*)^{-1}(X_0)$, т.е. считать, что $X_0 = X$. Это сводит задачу к случаю, когда A – область целостности, а f инъективно. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ – неприводимые компоненты Y . Достаточно доказать, что для некоторого i образ $f_\Delta^*(Y_i)$ содержит непустое открытое подмножество в X . Таким образом, мы свели задачу к теореме 6.

ЛЕММА 12. Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм колец, $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий $\ker f$, тогда слой f^* над $\mathfrak{p}$ не пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя от A к $A/\ker f$, можно считать, что f инъективен. Пусть $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Рассмотрим точную последовательность колец

$$0 \rightarrow A \rightarrow B.$$

Локализуем ее по S , получим точную последовательность

$$0 \rightarrow S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B.$$

Следовательно, $S^{-1}B$ – ненулевое кольцо. И в силу минимальности $\mathfrak{p}$ его спектр естественно гомеоморфен слою над $\mathfrak{p}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм дифференциальных колец Кира. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) f обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов;
- 2) f_{Δ}^* – замкнутое отображение;
- 3) $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}^{\Delta} B \Rightarrow f_{\Delta}^*: \operatorname{Spec}^{\Delta}(B/\mathfrak{q}) \rightarrow \operatorname{Spec}^{\Delta}(A/\mathfrak{q}^c)$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) и 3) следует из определения. Докажем, что 2) влечет 3). Для этого достаточно заметить, что замыканием $f_{\Delta}^*(\operatorname{Spec}^{\Delta}(B/\mathfrak{q}))$ является $\operatorname{Spec}^{\Delta}(A/\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$, а это в силу замкнутости f_{Δ}^* означает его сюръективность.

Для доказательства импликации из 1) в 2), воспользуемся леммой 12. Пусть $\mathfrak{b}$ – дифференциальный идеал в B , а $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$ – его сужение в A . Покажем, что для любого простого дифференциального идеала $\mathfrak{p}$, содержащего $\mathfrak{a}$, существует простой идеал $\mathfrak{q}$ (а следовательно, и простой дифференциальный идеал – утверждение 2), содержащий $\mathfrak{b}$ и сужающийся в $\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p}$ – минимальный дифференциальный простой идеал, содержащий $\mathfrak{a}$, тогда это следует из леммы 12, примененной к паре колец $A/\mathfrak{a} \rightarrow B/\mathfrak{b}$. Если $\mathfrak{p}$ – произвольный простой дифференциальный идеал, содержащий $\mathfrak{a}$, то в нем содержится $\mathfrak{p}'$ – минимальный такой идеал. По предыдущему рассуждению для $\mathfrak{p}'$ существует идеал $\mathfrak{q}'$ такой, что $\mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}'$. Остается применить свойство подъема.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Пусть A – алгебра Ритта, B – дифференциально конечно порождена над A , и $\operatorname{Spec}^{\Delta} A$ – нётерово топологическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) f обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов;
- 2) f_{Δ}^* – открытое отображение;
- 3) $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}^{\Delta} B \Rightarrow f_{\Delta}^*: \operatorname{Spec}^{\Delta}(B/\mathfrak{q}) \rightarrow \operatorname{Spec}^{\Delta}(A/\mathfrak{q}^c)$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) и 3) следует из определения. Докажем, что 2) влечет 3). Вначале обозначим идеал $\mathfrak{q}^c$ через $\mathfrak{p}$. Теперь примем во внимание, что $B_{\mathfrak{q}}$ – индуктивный предел колец B_t , где $t \in B \setminus \mathfrak{q}$. Тогда ясно, что для колец Кира верно, что

$$f^*(\operatorname{Spec}^{\Delta}(B_{\mathfrak{q}})) = \bigcap_t f_{\Delta}^*(\operatorname{Spec}^{\Delta}(B_t)),$$

для этого надо применить утверждение 2 к результату упражнения [4; глава 3, упражнение 26]. Так как $\operatorname{Spec}^{\Delta}(B_t)$ – открытая окрестность $\mathfrak{q}$, а f_{Δ}^* открыто, отсюда следует, что $f^*(\operatorname{Spec}^{\Delta}(B_t))$ – открытая окрестность $\mathfrak{p}$, значит, она содержит $\operatorname{Spec}^{\Delta}(A_{\mathfrak{p}})$.

Для доказательства импликации из 1) в 2), воспользуемся критерием: множество E нётерова топологического пространства является открытым тогда и только тогда, когда для любого неприводимого замкнутого множества X_0 в X либо $E \cap X_0 = \emptyset$, либо $E \cap X_0$ содержит непустое открытое множество в X_0 (см. [4; глава 7, упражнение 22]). Как и в случае утверждения 11, сводим задачу к случаю, когда надо показать, что $E = f_{\Delta}^*(Y)$ открыто в X . Свойство спуска означает, что если $\mathfrak{p} \in E$ и $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}' \in E$; иными словами, если X_0 – неприводимое замкнутое подмножество в X , пересекающееся с E , то $E \cap X_0$ плотно в X_0 . Так как любое

конструктивное множество, очевидно, содержит множество, открытое в своем замыкании, то $E \cap X_0$ содержит множество, открытое в X_0 . Из указанного критерия следует, что E открыто в X .

9. Наследование геометрических свойств. Пользуясь утверждениями 2 и 14, можно значительно усилить утверждение теоремы 6.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $A \subseteq B$ – целостные дифференциальные алгебры Ритта и кольцо B является дифференциально конечно порожденным над A . Тогда найдется элемент s в B такой, что вложение $A \subseteq B_s$ обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем элемент u такой, как в утверждении 5. Тогда алгебра B_u является свободным C -модулем, а значит, и плоским C -модулем. Так как алгебра C конечно порождена над A , то из [7; глава 8, § 22, теорема 52] следует, что существует такой элемент t из A , что алгебра C_t является свободным A_t -модулем, т.е. B_{tu} – плоская A_t алгебра. Более того, A_t плоская A -алгебра. Теперь воспользуемся упражнением [4; глава 5, упражнение 11] и увидим, что отображение на простых спектрах обладает свойством спуска, чего по утверждению 2 достаточно для выполнения свойства спуска для дифференциальных идеалов.

СЛЕДСТВИЕ 16. Пусть $A \subseteq B$ – целостные дифференциальные алгебры Ритта и кольцо B является дифференциально конечно порожденным над A . И пусть дифференциальный спектр A нётеров. Тогда найдется элемент s в B такой, что отображение $\text{Spec}^\Delta B_s \rightarrow \text{Spec}^\Delta A$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение является непосредственным следствием предыдущей теоремы и утверждения 14.

10. Локально замкнутые точки дифференциального спектра. Множество максимальных дифференциальных идеалов кольца A будем обозначать через $\text{Max}^\Delta A$. Как и в случае недифференциальных колец, это множество не обязано быть плотным, и тем более, очень плотным подмножеством в $\text{Spec}^\Delta A$ (определения см. в [4; глава 5, упражнение 26]). Определим следующее подмножество в дифференциальном спектре:

$$\text{SMax}^\Delta A = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}^\Delta A \mid \text{существует } s \in A: (A/\mathfrak{p})_s \text{ простое} \}.$$

Это множество локально замкнутых точек простого дифференциального спектра. Оно является топологическим подпространством в дифференциальном спектре. Наша основная цель – показать, что данные подмножества являются подходящей заменой дифференциальному спектру в случае дифференциально конечно порожденных алгебр над полем характеристики нуль и играют роль, аналогичную максимальному спектру в конечно порожденных алгебрах.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Пусть A – дифференциальное кольцо Кира, тогда множество $\text{SMax}^\Delta A$ является очень плотным подмножеством $\text{Spec}^\Delta A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любой дифференциальный простой идеал представляется в виде пересечения идеалов из $\text{SMax}^\Delta A$. Действительно, если идеал $\mathfrak{p}$ лежит в $\text{SMax}^\Delta A$, то доказывать нечего; если не лежит, то для любого элемента $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ существует максимальный простой идеал $\mathfrak{q}_t$ такой, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_t$ и $t \notin \mathfrak{q}_t$. По построению $\mathfrak{q}_t \in \text{SMax}^\Delta A$ и $\mathfrak{p} = \bigcap_{t \in A \setminus \mathfrak{p}} \mathfrak{q}_t$.

С этого момента раз и навсегда фиксируем некоторое дифференциальное поле K характеристики нуль.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. Пусть A и B – дифференциально конечно порожденные алгебры над полем K . Тогда для любого дифференциального гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ имеем

$$f^*(\text{SMax}^\Delta B) \subseteq \text{SMax}^\Delta A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно следует из теоремы 6.

Следовательно, в случае дифференциально конечно порожденных алгебр над полем на множество локально замкнутых точек дифференциального спектра корректно ограничивается отображение сужения идеалов. Более того, такое подмножество обладает следующим универсальным свойством.

Пусть A – дифференциально конечно порожденная алгебра над полем. Рассмотрим такие подмножества X дифференциального спектра A , что для любой дифференциально конечно порожденной алгебры B и любого дифференциального гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ верно включение $f^*(\text{Max}^\Delta B) \subseteq X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Среди всех таких подмножеств X , указанных выше, существует наименьшее, и оно совпадает с $\text{SMax}^\Delta A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт является частным случаем теоремы 6.

В случае конечно порожденных алгебр утверждения 13 и 14 могут быть значительно усилены.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. Пусть A и B – дифференциальные алгебры над некоторым полем и $f: A \rightarrow B$ – дифференциальный гомоморфизм. Тогда

- 1) f обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов тогда и только тогда, когда f_Δ^* – замкнутое отображение из $\text{SMax}^\Delta B$ в $\text{SMax}^\Delta A$;
- 2) f обладает свойством спуска для дифференциальных идеалов тогда и только тогда, когда f_Δ^* – открытое отображение из $\text{SMax}^\Delta B$ в $\text{SMax}^\Delta A$;
- 3) если E конструктивно в $\text{SMax}^\Delta B$, то и $f_\Delta^*(E)$ конструктивно в $\text{SMax}^\Delta A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Импликация $\Rightarrow$. Если f обладает свойством подъема для дифференциальных идеалов, то из утверждения 13 следует, что

$$f_\Delta^*: \text{Spec}^\Delta B \rightarrow \text{Spec}^\Delta A$$

является замкнутым отображением. Покажем, что его ограничение на $\text{SMax}^\Delta B$ замкнуто. Пусть $\mathfrak{b}$ – дифференциальный идеал в B , а $\mathfrak{a}$ – его сужение в A . Пусть $V(\mathfrak{b}) \cap \text{SMax}^\Delta B$ – замкнутое подмножество в $\text{SMax}^\Delta B$, тогда его образ лежит в $V(\mathfrak{a}) \cap \text{SMax}^\Delta A$. Покажем, что он в точности равен последнему. Пусть $\mathfrak{m}$ – идеал из $V(\mathfrak{a}) \cap \text{SMax}^\Delta A$, тогда существует простой дифференциальный идеал $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$. По определению идеала $\mathfrak{m}$ существует элемент s такой, что $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, его не содержащий. Тогда рассмотрим множество простых дифференциальных идеалов, содержащих $\mathfrak{q}$ и не содержащих s . По лемме Цорна существует максимальный идеал $\mathfrak{n}$ с такими свойствами. По построению идеал $\mathfrak{n}$ лежит в $V(\mathfrak{b}) \cap \text{SMax}^\Delta B$ и отображается в $\mathfrak{m}$.

Импликация $\Leftarrow$. Рассмотрим замкнутое подмножество $V(\mathfrak{b})$ в $\text{Spec}^\Delta B$, и пусть $\mathfrak{a}$ – сужение $\mathfrak{b}$. Покажем, что образ $V(\mathfrak{b})$ совпадает с $V(\mathfrak{a})$, а значит, замкнут, и по утверждению 13 это означает требуемое.

Пусть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Так как $\text{SMax}^\Delta A$ очень плотно в $\text{Spec}^\Delta A$, то

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

где пересечение берется по всем локально замкнутым точкам спектра. Тогда для каждого $\mathfrak{m}$ существует $\mathfrak{n}$ из $V(\mathfrak{b})$, в него сужающийся. Тогда пересечение указанных идеалов сужается в $\mathfrak{q}$ и, следовательно, $\mathfrak{q}^{\text{ec}} = \mathfrak{q}$. Применение утверждения 1 завершает доказательство.

2) *Импликация $\Rightarrow$.* Так как f обладает свойством спуска, то утверждение 14 влечет открытость $f_\Delta^*: \text{Spec}^\Delta B \rightarrow \text{Spec}^\Delta A$. Пусть $s \in A$ – произвольный элемент, тогда

$$f_\Delta^*((\text{Spec}^\Delta B)_s) = \bigcup_i (\text{Spec}^\Delta A)_{u_i}.$$

Покажем, что тогда

$$f_\Delta^*((\text{SMax}^\Delta B)_s) = \bigcup_i (\text{SMax}^\Delta A)_{u_i}.$$

Включение $\subseteq$ очевидно. Покажем обратное. Пусть $\mathfrak{m}$ лежит в $(\text{SMax}^\Delta A)_{u_i}$, тогда по определению найдем элемент t такой, что $\mathfrak{m}$ максимальный идеал, его не содержащий. Более того, существует $\mathfrak{q} \in (\text{Spec}^\Delta B)_s$ такой, что $f_\Delta^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$. Рассмотрим множество идеалов, содержащих $\mathfrak{q}$ и не содержащих st . Максимальный элемент из этого множества и будет искомым. Таким образом, образ любого главного открытого открыт, а значит, и образ любого открытого открыт.

Импликация $\Leftarrow$. Пусть наоборот

$$f_\Delta^*((\text{SMax}^\Delta B)_s) = \bigcup_i (\text{SMax}^\Delta A)_{u_i}.$$

Покажем, что

$$f_\Delta^*((\text{Spec}^\Delta B)_s) = \bigcup_i (\text{Spec}^\Delta A)_{u_i}.$$

Включение $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{q}$ из $(\text{Spec}^\Delta B)_s$, тогда он содержится в некотором $\mathfrak{m}$ из $(\text{SMax}^\Delta B)_s$, а значит, включение верно.

Обратное включение $\supseteq$. Утверждение 18 влечет, что любой идеал

$$\mathfrak{p} \in (\text{SMax}^\Delta A)_{u_i}$$

представляется в виде пересечения

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{m}$ из $(\text{SMax}^\Delta A)_{u_i}$. Для каждого $\mathfrak{m}$ найдется прообраз $\mathfrak{n}$ в $(\text{SMax}^\Delta B)_s$. Пересечение указанных прообразов сужается в $\mathfrak{q}$ и, следовательно, найдется и простой дифференциальный идеал, в него сужающийся.

3) Пусть $X = \text{Spec}^\Delta A$ и $Y = \text{Spec}^\Delta B$. Так как E конструктивно, то оно имеет вид

$$E = (V(\mathbf{b}_1) \cap Y_{t_1} \cup \dots \cup V(\mathbf{b}_n) \cap Y_{t_n}) \cap \text{SMax}^\Delta B.$$

Тогда образ множества $V(\mathbf{b}_1) \cap Y_{t_1} \cup \dots \cup V(\mathbf{b}_n) \cap Y_{t_n}$ конструктивен (утверждение 11), т.е. имеет вид

$$V(\mathbf{a}_1) \cap X_{s_1} \cup \dots \cup V(\mathbf{a}_n) \cap X_{s_m}.$$

Покажем, что

$$f_\Delta^*(E) = V(\mathbf{a}_1) \cap X_{s_1} \cup \dots \cup V(\mathbf{a}_n) \cap X_{s_m} \cap \text{SMax}^\Delta A.$$

Действительно, принадлежность $\subseteq$ ясна. Покажем обратное. Пусть $\mathfrak{m}$ – локально замкнутая точка дифференциального спектра кольца A , принадлежащая правой части. Тогда найдется простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$, сужающийся в $\mathfrak{m}$ и лежащий в $V(\mathbf{b}_1) \cap Y_{t_1} \cup \dots \cup V(\mathbf{b}_n) \cap Y_{t_n}$. Пусть он лежит в $V(\mathbf{b}_i) \cap Y_{t_i}$, и пусть s – такой элемент, что $\mathfrak{m}$ является максимальным дифференциальным идеалом, не содержащим s . Тогда максимальный идеал в B , не содержащий st_i , и будет искомым. Множество таких идеалов не пусто, так как $\mathfrak{p}$ – простой дифференциальный идеал в B , не содержащий s и t_i .

11. Дифференциально алгебраические многообразия. Подробную информацию о дифференциально алгебраических многообразиях и группах можно найти в [1], там же можно найти и все необъясненные факты и определения. Фиксируем дифференциально замкнутое поле K характеристики нуль. Из определения дифференциальной замкнутости следует, что любая простая дифференциально конечно порожденная алгебра над K совпадает с K . Как следствие, для любой дифференциально конечно порожденной алгебры A над K имеем $\text{Max}^\Delta A = \text{SMax}^\Delta A$. С другой стороны, выберем образующие алгебры A и представим ее как фактор кольца дифференциальных многочленов $A = K\{y_1, \dots, y_n\}/\mathfrak{a}$. Тогда идеал $\mathfrak{a}$ задает дифференциально алгебраическое многообразие $V(\mathfrak{a})$ в K^n . Точки $V(\mathfrak{a})$ в точности соответствуют дифференциальным гомоморфизмам из A в K . Поставим каждому такому гомоморфизму в соответствие его ядро – максимальный дифференциальный идеал. Так как алгебра A содержит поле K , которое изоморфно отображается на фактор по ядру, то имеем биекцию между $V(\mathfrak{a})$ и $\text{Max}^\Delta A$.

Пример [1; гл. 1, § 5, с. 901] показывает, что регулярных функций на дифференциально алгебраическом многообразии может быть больше, чем просто полиномиальных. Поэтому нам нужен финальный этюд для применения доказанных ранее фактов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Пусть X – дифференциально алгебраическое многообразие, $A = K\{X\}$ – его координатное кольцо и f – регулярная функция над X . Пусть Y – график функции f . Тогда X изоморфно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многообразие $X \times K$, его координатное кольцо совпадает с кольцом дифференциальных многочленов $A\{y\}$. В этом множестве график функции f задается уравнением $y - f = 0$. Теперь мы видим, что отображения $X \rightarrow Y$ по правилу $x \mapsto (x, f(x))$ и $Y \rightarrow X$ по правилу $(x, y) \mapsto x$ являются искомыми взаимно обратными.

СЛЕДСТВИЕ 22. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм дифференциально алгебраических многообразий. Тогда найдутся координатные кольца $K\{X\}$ и $K\{Y\}$ (причем $K\{X\}$ зависит от φ) и гомоморфизм $\phi: K\{Y\} \rightarrow K\{X\}$ такие, что $\varphi = \phi^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какие-то координатные кольца $K\{X\}$ и $K\{Y\}$. Кольцо $K\{Y\} = K\{y_1, \dots, y_n\}$ дифференциально конечно порождено над K . Рассмотрим функции $x_i = \varphi^*(y_i) = y_i \circ \varphi$. Это регулярные функции на X . Тогда по предыдущему утверждению $K\{X\}\{x_1, \dots, x_n\}$ – также координатное кольцо для X с искомыми свойствами.

Самое время собирать урожай. Переформулируем доказанные для спектров утверждения на языке дифференциально алгебраических многообразий и групп. Следующий результат – это переформулировка теоремы 6.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. Пусть $X \rightarrow Y$ – морфизм дифференциально алгебраических многообразий, причем X неприводимо. Тогда образ X содержит открытое подмножество в своем замыкании.

Пользуясь предыдущим фактом и повторяя слово в слово доказательство утверждения 11, получим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. Всякий морфизм дифференциально алгебраических многообразий является конструктивным отображением.

Указанные выше два утверждения являются уже известными (например, доказательства можно найти в [1; глава 1, § 6, предложение 2]), наша цель была показать, как изящно они получаются с помощью новой техники. Следующие два результата дают нам новые свойства геометрии дифференциально алгебраических многообразий. Следствие 16 вместе с утверждением 20 дают следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – доминантный морфизм неприводимых дифференциально алгебраических многообразий. Тогда существует такое открытое подмножество $U \subseteq X$, что ограничение φ на U открыто.

Утверждения такого рода дают хорошие результаты в случае групп. Действительно, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 26. Пусть $\varphi: G \rightarrow H$ – доминантный гомоморфизм дифференциально алгебраических групп. Тогда φ – открытое сюръективное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сюръективность φ нам известна [1; глава 2, § 3, предложение 7]. Надо показать открытость. Достаточно показать открытость ограничения на компоненту единицы $\varphi: G_0 \rightarrow H_0$. По предыдущему утверждению существует такое открытое подмножество $U \subseteq G_0$, что ограничение на него открыто. Но тогда множества вида gU , где $g \in G_0$, покрывают G_0 . Так как сдвиг на g -изоморфизм, это означает, что φ всюду открыт.

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Открытость сюръективных гомоморфизмов для дифференциально алгебраических групп позволяет, например, удобнее считать обратные образы пучков на группе. Подробнее, пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное открытое отображение топологических пространств, и пусть $\mathcal{F}$ – пучок на Y . Тогда предпучок $f^{-1}\mathcal{F}$ на X определяется равенством $f^{-1}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f(U))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. J. Cassidy, “Differential algebraic groups”, *Amer. J. Math.*, **94**:3 (1972), 891–954.
- [2] E. R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., **54**, Academic Press, New York, 1973.
- [3] E. R. Kolchin, *Differential Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., **114**, Academic Press, Orlando, FL, 1985.
- [4] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, М., 2003.
- [5] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, Библиотека сборника “Математика”, ИЛ, М., 1959.
- [6] Д. В. Трушин, “Идеал сепарант в кольце дифференциальных многочленов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:1 (2007), 215–227.
- [7] Н. Matsumura, *Commutative Algebra*, Math. Lecture Note Ser., **56**, Benjamin/Cummings Publ., Reading, Mass., 1980.

Д. В. Трушин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: trushindima@yandex.ru

Поступило

01.06.2009

Исправленный вариант

12.04.2010