Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 514–518

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:40:44

Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве

П. А. Бородин

Для каждого $n = 3, 4, \dots$ строится пример такого банахова пространства X и таких элементов $x_1, \dots, x_n$ в этом пространстве, что в X не существует элемента с минимальной суммой расстояний до элементов x_k .

Библиография: 4 названия.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n - n$ (необязательно различных) элементов банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$. Точкой Штейнера для этих элементов называется любой такой элемент $s = s(x_1, \dots, x_n) \in X$, что

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^n \|x_k - x\| =: \rho(x_1, \dots, x_n).$$

В случае $n = 2$ и произвольного банахова пространства X в качестве $s(x_1, x_2)$ можно взять любую точку отрезка с концами x_1 и x_2 .

В случае гильбертова пространства $X = H$ и $n = 3$ точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна: она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший 120°), либо совпадает с точкой Торичелли (из которой все стороны треугольника видны под углом 120°) (см., например, [1; гл. 7, § 5]).

Иванов и Тужилин поставили такую задачу: во всяком ли банаховом пространстве X для любых трех точек x_1, x_2, x_3 существует точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$?

Сами они доказали существование этой точки $s(x_1, x_2, x_3)$ в произвольном рефлексивном пространстве X , а также в некоторых классических нереклексивных пространствах. Кроме того, они построили пример дискретного метрического пространства, в котором $s(x_1, x_2, x_3)$ не существует для некоторых трех точек x_1, x_2, x_3 [2; гл. 7].

В рефлексивном пространстве X нетрудно доказать существование точки Штейнера $s(x_1, \dots, x_n)$ для произвольного n — это следует, например, из предложения 1.2 [3; гл. 2]. Приведем краткое доказательство для полноты картины. Если последовательность $\{s_j\} \subset X$ такова, что

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s_j\| \rightarrow \rho(x_1, \dots, x_n),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

то эта последовательность ограничена, а значит, по теореме Банаха–Алаоглу у нее имеется предельная относительно слабой топологии точка $s \in X$. Найдутся такие элементы $s'_j \in \text{Conv}(\{s_i\}_{i=j}^\infty)$ (здесь $\text{Conv}(E)$ обозначает выпуклую оболочку множества E), что $s'_j \rightarrow s$ в норме пространства X (см., например, [4; гл. 5, § 3]). В силу неравенства треугольника имеем

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s'_j\| \rightarrow \rho(x_1, \dots, x_n),$$

откуда s – точка Штейнера для $x_1, \dots, x_n$.

Цель настоящей заметки – для каждого $n = 3, 4, 5, \dots$ привести пример такого банахова пространства X и таких элементов $x_1, \dots, x_n$ в этом пространстве, что точка Штейнера $s(x_1, \dots, x_n)$ не существует. Тем самым, в частности, дается отрицательный ответ на вопрос Иванова и Тужилина.

Рассмотрим вначале случай $n = 3$.

В действительном пространстве $X_1 = C[0, 2] \times L_1[0, 2]$ с нормой

$$\|(f, g)\| = \max\{\|f\|_{C[0,2]}, 10\|g\|_{L_1[0,2]}\} \quad (1)$$

рассмотрим подпространство

$$X = \left\{ (f, g) \in X_1 : f \in C[0, 2], g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}.$$

Нетрудно видеть, что X замкнуто в X_1 , т.е. X с нормой (1) – банахово пространство.

Возьмем три элемента в X :

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (1, t), \quad x_3 = (2t, t^2)$$

и докажем, что $s(x_1, x_2, x_3)$ в X не существует. Для любого $x = (f, g) \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \|x_k - x\| &\geq 10 \sum_{k=1}^3 \|g - g_k\|_{L_1[0,2]} \\ &= 10 \int_0^2 (|g(t)| + |g(t) - t| + |g(t) - t^2|) dt \\ &\geq 10 \int_0^2 (\max\{0, t, t^2\} - \min\{0, t, t^2\}) dt \\ &= 10 \left(\int_0^1 t dt + \int_1^2 t^2 dt \right) = \frac{85}{3}. \end{aligned}$$

Элемента $x = (f, g) \in X$ с $\sum_{k=1}^3 \|x_k - x\| = 85/3$ не существует, поскольку его вторая компонента $g(t)$ должна равняться t^2 на отрезке $[0, 1]$ и t на отрезке $[1, 2]$, т.е. не может быть первообразной никакой непрерывной функции f .

В то же время для элементов $x_\varepsilon = (f_\varepsilon, \int_0^t f_\varepsilon(\tau) d\tau)$ с

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1 - \varepsilon], \\ (2 - \varepsilon^{-1})t + \varepsilon^{-1} - 1, & t \in [1 - \varepsilon, 1], \\ 1, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \|x_k - x_\varepsilon\| &= \max \left\{ 2 + o(1), 10 \left(\int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 t dt + o(1) \right) \right\} \\ &\quad + \max \left\{ 1, 10 \left(\int_0^1 (t - t^2) dt + o(1) \right) \right\} \\ &\quad + \max \left\{ 3, 10 \left(\int_1^2 (t^2 - t) dt + o(1) \right) \right\} \\ &= \frac{110}{6} + \frac{10}{6} + \frac{50}{6} + o(1) = \frac{85}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\inf \{ \|x_1 - x\| + \|x_2 - x\| + \|x_3 - x\| : x \in X \} = \frac{85}{3},$$

и эта величина не достигается ни на каком элементе $x \in X$.

Случай $n = 3$ рассмотрен полностью.

В случае $n \geq 5$ пример строится в том же пространстве X (возможно, с увеличением множителя 10 в норме (1)): вторые компоненты $g_1, \dots, g_n$ искомым элементов должны быть такими, чтобы любая функция y , *средняя* между ними (для любого $t \in [0, 2]$ имеем $\sum |g_k(t) - y(t)| = \min \{ \sum |g_k(t) - \alpha| : \alpha \in \mathbb{R} \}$), не могла быть первообразной непрерывной функции.

При нечетных n , когда средняя функция определяется однозначно (в каждой точке t она равна среднему из значений $g_1(t), \dots, g_n(t)$), это достигается с помощью такого же “переключения”, как выше в случае $n = 3$ (где средняя функция “переключилась” с t^2 на t с изломом в точке 1). Например, для $n = 2k + 3$, $k \geq 1$, можно взять элементы $x_1, x_2, \dots, x_{2k+3}$, где x_1, x_2, x_3 – элементы из рассмотренного выше случая $n = 3$, элементы $x_4, \dots, x_{k+3}$ одинаковы и таковы, что графики их вторых компонент располагаются над графиками функций $0, t, t^2$, а элементы $x_{k+4}, \dots, x_{2k+3}$ тоже одинаковы и таковы, что графики их вторых компонент располагаются под графиками функций $0, t, t^2$.

При четных $n \geq 6$ такое “переключение” тоже можно сделать. Так, для $n = 6$ не существует точки Штейнера $s(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3)$ (где x_j – элементы из рассмотренного выше случая $n = 3$), поскольку она должна совпадать с $s(x_1, x_2, x_3)$. Эту шестерку элементов можно дополнить до любого набора элементов в количестве $n = 2k$, $k \geq 4$, взяв недостающие $2(k - 3)$ элементов таким образом, чтобы графики вторых компонент $k - 3$ из них были одинаковы и располагались над графиками функций $0, t, t^2$, а графики вторых компонент остальных $k - 3$ были тоже одинаковы и располагались под графиками функций $0, t, t^2$.

Однако для $n = 4$ построить так искомый пример не удастся. Рассмотрим этот случай отдельно.

В действительном пространстве

$$X_2 = C[0, 2] \times C[0, 2] \times L_1[0, 2] \times L_1[0, 2]$$

с нормой

$$\|(f_1, f_2, g_1, g_2)\| = \max \left\{ \|f_1\|_{C[0,2]}, \|f_2\|_{C[0,2]}, M \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L_1[0,2]} \right\},$$

где $M > 0$ – достаточно большое число, рассмотрим замкнутое подпространство

$$X = \left\{ (f_1, f_2, g_1, g_2) : f_{1,2} \in C[0, 2], g_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) d\tau, g_2(t) = \int_0^t f_2(\tau) d\tau \right\}.$$

Возьмем четыре элемента в X :

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, g'(t), 0, g(t)), & x_2 &= (0, -g'(t), 0, -g(t)), \\ x_3 &= (1, 0, t, 0), & x_4 &= (f'(t), 0, f(t), 0), \end{aligned}$$

где функция $g \in C^1[0, 2]$, $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ при $t \in (0, 2]$, $g(t) = 1$ при $t \in [1/2, 2]$; функция $f \in C^1[0, 2]$, $f(0) = 0$, $f(t) < 0$ при $t \in (0, 1/2]$, $f(t) = t - 1$ при $t \in [1/2, 2]$.

Докажем, что $s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в X не существует. Для любого $x = (u', v', u, v) \in X$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \|x_k - x\| \\ & \geq M \int_0^2 (\sqrt{u^2 + (v - g)^2} + \sqrt{u^2 + (v + g)^2} + \sqrt{(u - t)^2 + v^2} + \sqrt{(u - f)^2 + v^2}) dt \\ & \geq M \int_0^2 (2\sqrt{u^2 + g^2} + |u - t| + |u - f|) dt \\ & \geq M \left(\int_0^1 (2g + t - f) dt + \int_1^2 (2\sqrt{(t - 1)^2 + 1^2} + 1) dt \right) =: A(f, g). \end{aligned}$$

Элемента $x = (u', v', u, v) \in X$ с $\sum_{k=1}^4 \|x_k - x\| = A(f, g)$ не существует, поскольку для обращения самого последнего неравенства в равенство компонента $u(t)$ в нем должна равняться 0 на отрезке $[0, 1]$ и $t - 1$ на отрезке $[1, 2]$, т.е. не может быть первообразной никакой непрерывной функции.

В то же время для элементов $x_\varepsilon = (u'_\varepsilon, 0, u_\varepsilon, 0)$ с

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1 - \varepsilon], \\ (4\varepsilon)^{-1}(t - 1 + \varepsilon)^2, & t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], \\ t - 1, & t \in [1 + \varepsilon, 2], \end{cases}$$

как нетрудно проверить, при достаточно больших M имеем

$$\sum_{k=1}^4 \|x_k - x_\varepsilon\| = A(f, g) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^4 \|x_k - x\| : x \in X \right\} = A(f, g),$$

и эта величина не достигается ни на каком элементе $x \in X$.

Случай $n = 4$ рассмотрен полностью.

Отметим, что случай $n = 3$ занимает особое положение в этом ряду примеров: несуществование точки Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ означает, что в пространстве нет связного конечного графа с ребрами-отрезками, содержащего точки x_1, x_2, x_3 , сумма

длин (норм) ребер которого была бы минимальна (нетрудно показать, что такой граф должен состоять из трех отрезков, соединяющих эти три точки с их точкой Штейнера). Было бы интересно построить примеры наборов из $n > 3$ точек в банаховом пространстве, для которых не существует содержащих их графов указанного типа с минимальной суммой длин ребер.

Автор благодарен В. В. Рыжикову за сообщение о задаче Иванова и Тужилина, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов*, РХД, М., Ижевск, 2001.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Современная математика, ИКИ, М, Ижевск, 2003.
- [3] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [4] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, т. 1, Общая теория, УРСС, М., 2004.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

15.06.2009

Исправленный вариант

09.09.2009