Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, Равномерно ограниченные семейства базисов Рисса из экспонент, синусов и косинусов, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 542–553

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:48:08

Равномерно ограниченные семейства базисов Рисса из экспонент, синусов и косинусов

Р. О. Гринив

В статье построен широкий класс семейств экспонент, синусов и косинусов, порождающих базисы Рисса соответствующих гильбертовых пространств с равномерно ограниченными верхними гранями и равномерно положительными нижними гранями.

Библиография: 14 названий.

1. Введение и основные результаты. Главной целью настоящей статьи является доказательство того, что некоторые семейства базисов Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, составленных из экспоненциальных функций $e^{i\omega_n x}$ (соответственно базисов Рисса пространства $L_2(0, \pi)$, составленных из синусов $\sin \omega_n x$ или косинусов $\cos \omega_n x$) являются равномерно ограниченными, т.е. что базисы Рисса из этих семейств обладают общими нижними и верхними гранями. Наш интерес к этому вопросу возник из обратной спектральной задачи для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака; в самом деле, существование таких общих граней для некоторых семейств базисов Рисса влечет равномерную устойчивость обратной задачи для соответствующих классов операторов (впервые сформулированную в работе [1] и доказанную другим методом в [2]), см. подробности в [3], [4]. Этот вопрос также естественно возникает в теории фреймов и теории интерполяции целых функций; см., например, [5; гл. 4] и ссылки, приведенные там.

Напомним, что последовательность $(f_n)_{n \in \mathcal{I}}$ (где множество индексов $\mathcal{I}$ будет впоследствии равно $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{N}$) элементов банахова пространства $\mathcal{X}$ является *базисом* $\mathcal{X}$, если каждый элемент $f \in \mathcal{X}$ допускает единственное представление в виде¹

$$f = \sum_{n \in \mathcal{I}} c_n f_n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Базис $(f_n)_{n \in \mathcal{I}}$ сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *базисом Рисса*, если он эквивалентен некоторому ортонормированному базису $\mathcal{H}$, т.е. если существует ортонормированный базис $(e_n)_{n \in \mathcal{I}}$ пространства $\mathcal{H}$ и такой ограниченный и ограниченно обратимый в $\mathcal{H}$ оператор T , что $T e_n = f_n$ для всех $n \in \mathcal{I}$. В этом случае ряд $\sum c_n f_n$ сходится в $\mathcal{H}$ для каждой последовательности (c_n) из

¹Далее все суммирования и произведения по множеству индексов $\mathbb{Z}$ будут пониматься в смысле главного значения и обозначение P.V. будет опускаться.

$\ell_2(\mathcal{J})$ и, полагая $m := \|T^{-1}\|^{-1}$ и $M := \|T\|$, получаем

$$m^2 \sum |c_n|^2 \leq \left\| \sum c_n f_n \right\|^2 \leq M^2 \sum |c_n|^2. \quad (1.1)$$

Некоторые эквивалентные определения и другие свойства базисов Рисса приведены в [6; гл. 6]. Более общо, для заданного базиса Рисса $(f_n)_{n \in \mathcal{J}}$ любые положительные числа m и M , для которых неравенства (1.1) выполнены для всех последовательностей $(c_n) \in \ell_2(\mathcal{J})$, называются его *нижней гранью* (или *гранью Рисса–Фишера*) и *верхней гранью* (или *гранью Бесселя*) соответственно. Мы говорим, что семейство $\mathcal{F}$ базисов Рисса *равномерно ограничено*, если существуют положительные числа m и M , являющиеся соответственно нижней и верхней гранью каждого базиса из $\mathcal{F}$.

Задача описания последовательностей $\Omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ действительных чисел, для которых последовательности $\mathcal{E}_\Omega := (e^{i\omega_n x})_{n \in \mathbb{Z}}$ экспонент составляют базисы Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, интенсивно изучалась, начиная с работы Пэли и Винера [7] 1934 г. Используя один абстрактный результат из [7] об устойчивости базисов Рисса, в 1964 г. Кадец [8] доказал знаменитую теорему об $1/4$, которую можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА А. *Для каждого $h \in (0, 1/4)$ существуют положительные числа $m = m(h)$ и $M = M(h)$, обладающие следующим свойством: для всякой последовательности $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $|\omega_n - n| \leq h$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, система $\mathcal{E}_\Omega$ является базисом Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$ с нижней гранью m и верхней гранью M .*

Известно, что постоянная $1/4$ точна, т.е. что последовательность $\mathcal{E}_\Omega$ не обязана быть базисом Рисса при $h = 1/4$. Классическим контрпримером служит система

$$\{e^{-i(n+\beta)x}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{1\} \cup \{e^{i(n+\beta)x}\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (1.2)$$

не являющаяся даже обычным базисом при $\beta = -1/4$ и $\beta = 1/4$, см. [9; теорема 19] и [5; гл. 3.3]. Однако, как показывает следующий результат об устойчивости (ср. [10] и [5; доказательство теоремы 1.12]), неравенство $|\omega_n - n| \leq h$ не обязано выполняться для всех $n \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА В. *Предположим, что $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\Omega' := (\omega'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ суть строго возрастающие последовательности действительных чисел. Если $\mathcal{E}_\Omega$ – базис Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$ и $\sum |\omega_n - \omega'_n| < \infty$, то $\mathcal{E}_{\Omega'}$ также является базисом Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$.*

Некоторые другие необходимые и/или достаточные условия для базисности Рисса, а также дальнейшие сведения и исторические комментарии можно найти в [11; гл. 2] и [12].

Как следует из теорем А и В, любая строго возрастающая последовательность $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ действительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\omega_n - n| < \frac{1}{4}, \quad (1.3)$$

порождает базис Рисса $\mathcal{E}_\Omega$ пространства $L_2(-\pi, \pi)$. Если, однако, мы рассматриваем множество $\mathcal{L}$ таких последовательностей и требуем, чтобы семейство соответствующих базисов Рисса было равномерно ограниченным, т.е. чтобы эти базисы обладали

общими нижней гранью m и верхней гранью M , то на $\mathcal{L}$ необходимо наложить некоторые дополнительные ограничения.

Во-первых, ввиду соотношений

$$|1 - e^{i\omega x}|^2 = 2(1 - \cos \omega x) = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega x \leq \omega^2 x^2$$

мы имеем

$$2m^2 \leq \|e^{i\omega_{n+1}x} - e^{i\omega_n x}\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \leq \frac{2\pi^3(\omega_{n+1} - \omega_n)^2}{3}.$$

Следовательно, семейство $\mathcal{L}$ последовательностей $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ должно быть *равномерно отделенным*, т.е. оно должно удовлетворять следующему условию:

$$\text{существует } d > 0 \text{ такое, что } \omega_{n+1} - \omega_n \geq d \text{ для всех } n \in \mathbb{Z} \text{ и } (\omega_n) \in \mathcal{L}. \quad (\text{A1})$$

Далее, естественно потребовать, чтобы условие (1.3) выполнялось для каждой последовательности $\Omega = (\omega_n)$ семейства $\mathcal{L}$, так как иначе соответствующие последовательности экспонент $\mathcal{E}_\Omega$ могут вообще не образовывать базис Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$. Заметим, однако, что константа Рисса M/m может неограниченно возрастать при приближении $\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\omega_n - n|$ к $1/4$; это происходит, например, для системы (1.2) при $|\beta| \rightarrow 1/4$, см. [12; гл. 3.2]. Поэтому для равномерной ограниченности семейства $\{\mathcal{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{L}\}$ базисов Рисса следует ужесточить условие (1.3), а именно, потребовать существования $h < 1/4$ такого, что

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\omega_n - n| \leq h \quad (1.4)$$

для всех $(\omega_n) \in \mathcal{L}$.

Предположим, что для некоторого $h \in (0, 1/4)$ выполнено (1.4), и возьмем любое число h' из интервала $(h, 1/4)$; тогда множество индексов $\{n \in \mathbb{Z} \mid |\omega_n - n| > h'\}$ имеет конечную мощность для всех $(\omega_n) \in \mathcal{L}$. Оказывается, что если мощности таких множеств не ограничены в совокупности, то семейство базисов Рисса $\{\mathcal{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{L}\}$ может не быть равномерно ограниченным (ср. [11; следствие II.4.9]). Действительно, для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$ положим $\omega_n^{(k)} = n + (1/4) \operatorname{sgn}(n)$ при $|n| \leq k$ и $\omega_n^{(k)} = n$ иначе; тогда для множества последовательностей $\mathcal{L} := \{\Omega_k := (\omega_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ соответствующее семейство базисов Рисса $\{\mathcal{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{L}\}$ не может быть равномерно ограниченным, так как иначе система экспонент (1.2) образовывала бы базис Рисса при $\beta = 1/4$.

Таким образом, для того чтобы семейство последовательностей $\mathcal{L}$ порождало равномерно ограниченное семейство базисов Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, естественно потребовать выполнения такого условия:

$$\text{существуют постоянные } h \in (0, 1/4) \text{ и } N \in \mathbb{N} \text{ такие, что мощность множества } \{n \in \mathbb{Z} \mid |\omega_n - n| > h\} \text{ не превосходит } N \text{ для каждой последовательности } (\omega_n) \in \mathcal{L}. \quad (\text{A2})$$

Чтобы ввести последнее условие, напомним сперва определение дискретного преобразования пространства Гильберта $\mathcal{H}$. Оно задается равенством

$$(\mathcal{H}\mathbf{c})_k := \sum_{n \neq k} \frac{c_n}{n - k} \quad (1.5)$$

на финитных последовательностях $\mathbf{c} := (c_n)$ и порождает ограниченный оператор в пространствах $\ell_p(\mathbb{Z})$ при $p \in (1, \infty)$, ср. [13; теорема 315]. В пространстве $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{Z})$ преобразование Гильберта является неограниченным; мы зададим его там формулой (1.5) (где, напомним, суммирование понимается в смысле главного значения) на области определения

$$\text{dom } \mathcal{H} = \left\{ \mathbf{c} \in \ell_\infty \mid \text{ряд v.p. } \sum \frac{c_n}{n} \text{ сходится и } \mathcal{H}\mathbf{c} \in \ell_\infty \right\}.$$

Теперь для каждого $(\omega_n) \in \mathcal{L}$ мы положим $\rho_n := \omega_n - n$, обозначим через $\boldsymbol{\rho} := (\rho_n)$ последовательность из ℓ_∞ , и потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} &\text{последовательность } \boldsymbol{\rho} \text{ принадлежит } \text{dom } \mathcal{H} \text{ для всех } (\omega_n) \in \mathcal{L} \\ &\text{и } \|\mathcal{H}\boldsymbol{\rho}\|_{\ell_\infty} \leq r \text{ для некоторого } r > 0, \text{ не зависящего от } (\omega_n) \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Для заданных $d \in (0, 1)$, $h \in (0, 1/4)$, $N \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ обозначим через $\mathcal{L}(d, h, N, r)$ множество всех строго возрастающих последовательностей $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, обладающих введенными выше свойствами (A1)–(A3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}(d, h, N, r)$, то $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\omega_n - n| \leq N + 1$. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $\omega_m - m > N + 1$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$; тогда

$$\omega_{m+k} - (m+k) \geq \omega_m - m - k > N + 1 - k > h$$

для $k = 0, 1, \dots, N$, что противоречит (A2). Похожие соображения исключают неравенство $\omega_m - m < -N - 1$.

Одним из основных результатов работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. Для каждой $d \in (0, 1)$, $h \in (0, 1/4)$, $N \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ семейство $\{\mathcal{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)\}$ базисов Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$ является равномерно ограниченным.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Предположим, что семейство $\mathcal{L}$ строго возрастающих последовательностей удовлетворяет (A1) и что найдутся $p \in [1, \infty)$ и $t > 0$ такие, что $\|(\omega_n - n)\|_{\ell_p} \leq t$ для каждой $(\omega_n) \in \mathcal{L}$. Тогда семейство $\{\mathcal{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{L}\}$ базисов Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$ является равномерно ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, легко убедиться, что при сделанных предположениях условия (A2) и (A3) выполнены для семейства $\mathcal{L}$ при произвольных $h \in (0, 1/4)$, $N \geq (t/h)^p + 1$ и $r := 2t\zeta(p')$, где $p' := p/(p-1)$ является сопряженным показателем и $\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ – функция Римана. Таким образом, утверждение следует из теоремы 1.3.

Обратимся далее к базисам Рисса пространства $L_2(0, \pi)$, составленным из синусов и косинусов. Для $d \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ и $t > 0$ мы обозначим через $\mathcal{L}_1(d, p, t)$ семейство всех последовательностей $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ положительных чисел, обладающих следующими двумя свойствами:

$$\lambda_1 \geq d \text{ и } \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq d \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B1})$$

$$\text{последовательность } (\lambda_n - n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ принадлежит } \ell_p(\mathbb{N}) \text{ и } \|(\lambda_n - n)\|_{\ell_p} \leq t. \quad (\text{B2})$$

Для заданной последовательности $\Lambda \in \mathcal{L}_1(d, p, t)$ мы обозначим через $\mathcal{S}_\Lambda$ и $\mathcal{C}_\Lambda$ последовательности $(\sin \lambda_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(\cos \lambda_n x)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ синусов и косинусов, где $\lambda_0 := 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Зафиксируем произвольные $d \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ и $t > 0$. Тогда семейства $\{\mathcal{S}_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{L}_1(d, p, t)\}$ и $\{\mathcal{C}_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{L}_1(d, p, t)\}$ являются равномерно ограниченными семействами базисов Рисса пространства $L_2(0, \pi)$.

Действительно, с каждой последовательностью $\Lambda = (\lambda_n)$ из $\mathcal{L}_1(d, p, t)$ мы свяжем последовательность $\Omega(\Lambda) = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, полагая $\omega_n = \lambda_n$ при $n \geq 0$ и $\omega_n = -\lambda_n$ при $n < 0$. Ясно, что $\Omega(\Lambda)$ удовлетворяет условию (A1) и $\|(\omega_n - n)\|_{\ell_p} \leq 2^{1/p}t$, а поэтому $\mathcal{E}_{\Omega(\Lambda)}$ является базисом Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$; более того, по следствию 1.4 ассоциированное семейство $\{\mathcal{E}_{\Omega(\Lambda)} \mid \Lambda \in \mathcal{L}_1(d, p, t)\}$ базисов Рисса является равномерно ограниченным с общими нижней гранью m и верхней гранью M . Для произвольной функции $f \in L_2(0, \pi)$ мы обозначим через f_{even} и f_{odd} ее четное и нечетное продолжение на интервал $(-\pi, \pi)$. Тогда в представлении

$$f_{\text{even}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n x}, \quad f_{\text{odd}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{i\omega_n x}$$

мы имеем $c_{-n} = c_n$ и $d_{-n} = -d_n$, и поэтому

$$f = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n \cos \lambda_n x = 2i \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n \sin \lambda_n x$$

в $L_2(0, \pi)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} m^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^2 &\leq \|f_{\text{even}}\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 = 2\|f\|_{L_2(0, \pi)}^2 \leq 2M^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^2, \\ 2m^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |d_n|^2 &\leq \|f_{\text{odd}}\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 = 2\|f\|_{L_2(0, \pi)}^2 \leq 2M^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |d_n|^2, \end{aligned}$$

и утверждение доказано.

Статья организована таким образом. В следующем пункте мы начинаем доказательство теоремы 1.3 методом индукции, которая позволяет контролировать нижние и верхние грани соответствующих семейств экспонент. В п. 3 устанавливаются равномерные оценки ассоциированных канонических произведений, требуемые для завершения доказательства теоремы. Некоторые дальнейшие результаты о равномерно ограниченных семействах базисов Рисса из синусов и косинусов обсуждаются в п. 4.

2. Доказательство теоремы 1.3. Доказательство теоремы 1.3 проведем индукцией по N . Если $N = 0$, то каждая последовательность $\Omega \in \mathcal{L}(d, h, 0, r)$ удовлетворяет предпосылкам теоремы A с заданной константой h , и поэтому $m(h)$ и $M(h)$ этой теоремы суть общие нижняя и верхняя грани соответствующих базисов Рисса $\mathcal{E}_\Omega$.

Предположим далее, что теорема уже доказана для $N = K$, т.е., что для каждого $d \in (0, 1)$, $h \in (0, 1/4)$ и $r > 0$ найдутся положительные $m(d, h, K, r)$ и $M(d, h, K, r)$, являющиеся общими нижней и верхней гранями базисов Рисса $\mathcal{E}_\Omega$ для всех $\Omega \in \mathcal{L}(d, h, K, r)$. Докажем, что аналогичное утверждение выполнено тогда и для $N = K + 1$.

Возьмем произвольную последовательность $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ из $\mathcal{L}(d, h, K + 1, r)$, не принадлежащую семейству $\mathcal{L}(d, h, 0, \tilde{r})$ ни при каком $\tilde{r} > 0$, положим

$$A^+ := \{n \in \mathbb{Z} \mid \omega_n > n + h\}, \quad A^- := \{n \in \mathbb{Z} \mid \omega_n < n - h\}$$

и обозначим через k наименьший элемент множества A^+ (если таковое непусто) или наибольший элемент A^- иначе. Определим теперь последовательность

$$\Omega' = (\omega'_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{с} \quad \omega'_n = \omega_n \quad \text{при} \quad n \neq k, \quad \omega'_k = k.$$

Поскольку $|\omega_k - k| \leq K + 2$ согласно замечанию 1.2, то Ω' принадлежит семейству $\mathcal{L}(d, h, K, r')$ с $r' := r + K + 2$; в частности, $\mathcal{E}_{\Omega'}$ является базисом Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$ с нижней гранью $m(d, h, K, r')$ и верхней гранью $M(d, h, K, r')$.

Обозначим через $T_{\Omega' \rightarrow \Omega}$ оператор, определенный посредством равенств

$$T_{\Omega' \rightarrow \Omega}(e^{i\omega'_n x}) = e^{i\omega_n x}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку системы $\mathcal{E}_{\Omega}$ и $\mathcal{E}_{\Omega'}$ являются базисами Рисса в $L_2(-\pi, \pi)$, оператор $T_{\Omega' \rightarrow \Omega}$ есть гомеоморфизм $L_2(-\pi, \pi)$. Нижние и верхние грани $\mathcal{E}_{\Omega}$ и $\mathcal{E}_{\Omega'}$ связаны следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если m' и M' суть соответственно нижняя и верхняя грани $\mathcal{E}_{\Omega'}$, то*

$$m := \|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}^{-1}\|^{-1} m' \quad \text{и} \quad M := \|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}\| M'$$

– соответственно нижняя и верхняя грани $\mathcal{E}_{\Omega}$.

Поскольку Ω' отличается от Ω только в k -м члене, соответствующее преобразование $T_{\Omega' \rightarrow \Omega}$ приобретает конкретный вид, и нормы оператора $T_{\Omega' \rightarrow \Omega}$ и его обратного можно явно оценить.

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что $\Omega' = (\omega'_n)$ получено из $\Omega = (\omega_n) \in \mathcal{L}(d, h, K + 1, r)$ заменой ω_k на $\omega'_k \in [\omega_{k-1} + d, \omega_{k+1} - d]$, а $\omega'_n = \omega_n$ при $n \neq k$. Тогда*

$$\|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}\| \leq 1 + \frac{\sqrt{8\pi}}{m'}, \quad \|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}^{-1}\| \leq 1 + \frac{\sqrt{8\pi}}{Cm'},$$

где $m' = m(d, h, K, r')$, а постоянная $C = C(d, h, K, r') > 0$ не зависит от Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f_n(x) := e^{i\omega'_n x}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad g_k(x) := e^{i\omega_k x}.$$

Система $\mathcal{E}_{\Omega'} = (f_n)$ образует базис Рисса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, и мы обозначим через $(\hat{f}_n)$ биортогональную к ней систему. Тогда каждую функцию $f \in L_2(-\pi, \pi)$ можно представить в виде $f = \sum (f, \hat{f}_n) f_n$, и поэтому

$$T_{\Omega' \rightarrow \Omega} f = \sum (f, \hat{f}_n) T_{\Omega' \rightarrow \Omega} f_n = f + (f, \hat{f}_k)(g_k - f_k).$$

Положим $u := \hat{f}_k$ и $v := g_k - f_k$; тогда $T_{\Omega' \rightarrow \Omega} = I + (\cdot, u)v$ и

$$T_{\Omega' \rightarrow \Omega}^{-1} = I - [1 + (v, u)]^{-1} (\cdot, u)v.$$

Таким образом, $\|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}\| \leq 1 + \|u\|\|v\|$ и $\|T_{\Omega' \rightarrow \Omega}^{-1}\| \leq 1 + \|u\|\|v\|/|1 + (v, u)|$. Из [5; гл. 4.2] следует, что $\|u\| \leq 1/m'$; кроме того, $\|v\| \leq \sqrt{8\pi}$, и поэтому остается оценить снизу число $|1 + (v, u)| = |(g_k, \hat{f}_k)|$.

Для этого рассмотрим функцию

$$F(z) := \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f_k}(t) e^{izt} dt;$$

тогда $(g_k, \widehat{f_k}) = F(\omega_k)$. Понятно, что F – целая функция, она имеет экспоненциальный тип π и $F(\omega'_n) = \delta_{nk}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку линейная оболочка $\{f_n\}_{n \neq k}$ имеет коразмерность 1, F не имеет других нулей, кроме $\omega'_n = \omega_n$, $n \neq k$, причем все они простые. Поэтому каноническое произведение Адамара для F равно

$$F(z) = e^{az+b} \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{z}{\omega_n}\right) e^{z/\omega_n}$$

с очевидной модификацией, если одно из чисел ω_n есть нуль. Так как $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/\omega_n$ сходится, множители e^{z/ω_n} можно объединить с e^{az+b} , изменив a соответствующим образом.

Мы утверждаем, что так измененное a равно нулю. В самом деле, используя каноническое произведение Адамара для $\sin \pi z$, находим, что при $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$$c := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r e^{i\theta}}{\sin \pi r e^{i\theta}} \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{r e^{i\theta}}{\omega_n}\right) = \frac{\omega_k}{\omega_0} \prod_{n \neq 0} \frac{n}{\omega_n} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n \neq 0, k} \frac{\omega_n - r e^{i\theta}}{n - r e^{i\theta}} = \frac{\omega_k}{\omega_0} \prod_{n \neq 0} \frac{n}{\omega_n}.$$

Далее,

$$\prod_{n \neq 0} \frac{\omega_n}{n} = \prod_{n \neq 0} \left(1 + \frac{\omega_n - n}{n}\right) =: \prod_{n \neq 0} \left(1 + \frac{\rho_n}{n}\right);$$

поскольку ряд $\sum_{n \neq 0} \rho_n/n$ сходится к $(\mathcal{H}\rho)_0$ по предположению и $\sum_{n \neq 0} \rho_n^2/n^2 \leq \pi^2(K+2)^2/3$, мы заключаем по лемме 3.1, что это бесконечное произведение сходится и, следовательно, $c \neq 0$.

С другой стороны, из интегрального представления для F следует соотношение $|F(r e^{i\theta})| = O(e^{\pi r |\sin \theta|})$ при $r \rightarrow \infty$. Предположим, что $a \neq 0$ и возьмем $\theta = -\arg a \pm \pi/4$, выбирая знак так, чтобы $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$; тогда получим

$$c = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r e^{i\theta}}{\sin \pi r e^{i\theta}} \frac{F(r e^{i\theta})}{\exp\{a r e^{i\theta} + b\}} = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $a = 0$, и, учитывая соотношение $F(\omega'_k) = 1$, мы получим равенство

$$F(z) = \prod_{n \neq k} \frac{\omega_n - z}{\omega_n - \omega'_k}. \quad (2.1)$$

По теореме 3.3, доказанной в следующем пункте, существует $C > 0$, не зависящее от $\Omega' \in \mathcal{L}(d, h, K, r')$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\omega_k \in [\omega'_{k-1} + d, \omega'_{k+1} - d]$ и такое, что $F(\omega_k) > C$. Доказательство леммы 2.2 закончено.

Положим

$$m' := m(d, h, K, r') \quad \text{и} \quad M' := M(d, h, K, r').$$

Сопоставляя лемму 2.2 и предложение 2.1, мы заключаем, что числа

$$m := \left(1 + \frac{\sqrt{8\pi}}{C m'}\right)^{-1} m', \quad M := \left(1 + \frac{\sqrt{8\pi}}{m'}\right) M',$$

являются нижней и верхней гранями базиса Рисса $\mathcal{E}_\Omega$ пространства $L_2(-\pi, \pi)$ для каждой последовательности Ω из $\mathcal{L}(d, h, K + 1, r)$. Тем самым индуктивный шаг завершен, и теорема 1.3 доказана.

3. Некоторые оценки канонических произведений. В этом пункте мы устанавливаем оценку снизу функции F из (2.1), которая была использована при доказательстве леммы 2.2. Основным инструментом послужит следующая простая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что как только последовательность (a_n) действительных чисел из $\ell_2(\mathbb{Z})$ с $|\sum a_n| < \infty$ удовлетворяет при всех $n \in \mathbb{Z}$ неравенству $1 + a_n > \varepsilon$, то*

$$\left| \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 + a_n) \right| \leq \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \right| + \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$f(x) := \frac{x - \log(1 + x)}{x^2}$$

непрерывна на интервале $(-1, \infty)$ и стремится к нулю на бесконечности. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\delta := \max_{x \geq -1 + \varepsilon} |f(x)|;$$

тогда $|x - \log(1 + x)| \leq \delta x^2$ при $x \geq -1 + \varepsilon$. Следовательно,

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(1 + a_n) \right| \leq \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Для заданных $\Omega = (\omega_n) \in \mathcal{L}(d, h, N, r)$ и $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$f_{k,\Omega} := \prod_{n \neq k} \frac{\omega_n - \omega_k}{n - k}.$$

ЛЕММА 3.2. *Для всех $d \in (0, 1)$, $h \in (0, 1/4)$, $N \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ выполняются соотношения*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |f_{k,\Omega}| > 0, \quad \sup_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |f_{k,\Omega}| < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a_{n,k} := \frac{\omega_n - \omega_k}{n - k} - 1 = \frac{\omega_n - n - \omega_k + k}{n - k} =: \frac{\rho_n - \rho_k}{n - k}, \quad n \neq k,$$

и заметим, что

$$1 + a_{n,k} = \frac{\omega_n - \omega_k}{n - k} \geq \frac{d|n - k|}{|n - k|} = d$$

при всех целых $n \neq k$. По лемме 3.1 достаточно доказать, что

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n: n \neq k} a_{n, k} \right| < \infty, \quad (3.1)$$

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n: n \neq k} a_{n, k}^2 < \infty. \quad (3.2)$$

Поскольку

$$\sum_{n: n \neq k} \frac{1}{n - k} = 0,$$

мы имеем

$$\sum_{n: n \neq k} a_{n, k} = \sum_{n: n \neq k} \frac{\rho_n}{n - k} = (\mathcal{H}\rho)_k.$$

Поэтому (3.1) следует из свойства (A3) семейства $\mathcal{L}(d, h, N, r)$.

Для обоснования (3.2) мы сперва отметим неравенство

$$a_{n, k}^2 \leq \frac{2\rho_n^2}{(n - k)^2} + \frac{2\rho_k^2}{(n - k)^2},$$

а затем, вспоминая замечание 1.2, получим

$$\sum_{n: n \neq k} a_{n, k}^2 \leq 4 \sup_{n \in \mathbb{Z}} \rho_n^2 \sum_{n: n \neq k} \frac{1}{(n - k)^2} \leq \frac{4\pi^2(N + 1)^2}{3}.$$

Доказательство леммы 3.2 закончено.

Мы теперь в состоянии обосновать оценку на $F(\omega_k)$ с функцией F из (2.1), которая была использована в предыдущем пункте при доказательстве леммы 2.2. А именно, мы докажем, что функция $F = F_{k, \Omega}$, заданная равенством

$$F_{k, \Omega}(z) := \prod_{n: n \neq k} \frac{\omega_n - z}{\omega_n - \omega_k},$$

равномерно отделена от нуля на интервалах $I_{k, \Omega} := [\omega_{k-1} + d, \omega_{k+1} - d]$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Выполнено неравенство*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \inf_{k \in \mathbb{Z}} \min_{z \in I_{k, \Omega}} |F_{k, \Omega}(z)| > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 3.2, мы можем заменить функцию $F_{k, \Omega}$ такой:

$$\tilde{F}_{k, \Omega}(z) := \prod_{n: n \neq k} \frac{\omega_n - z}{n - k}.$$

Положим

$$a_{n, k}(z) := \frac{\omega_n - n + k - z}{n - k},$$

если $n \neq k$, и $a_{k, k}(z) = 0$. Мы покажем, что существует $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, не зависящее от $\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $z \in I_{k, \Omega}$ и такое, что

$$\left| \log \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + a_{n, k}(z)) \right| = |\log \tilde{F}_{k, \Omega}(z)| \leq \tilde{C}.$$

Понятно, что $|\omega_n - z| \geq d|n - k|$ при $z \in I_{k,\Omega}$, и поэтому

$$1 + a_{n,k}(z) = \frac{\omega_n - z}{n - k} \geq d$$

для всех целых $n \neq k$. Поэтому по лемме 3.1 существует $\delta > 0$ такое, что при всех $\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $z \in I_{k,\Omega}$ выполнено неравенство

$$\left| \log \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + a_{n,k}(z)) \right| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,k}(z) \right| + \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,k}^2(z).$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{z \in I_{k,\Omega}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,k}(z) \right| < \infty, \quad (3.3)$$

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{z \in I_{k,\Omega}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,k}^2(z) < \infty. \quad (3.4)$$

Заметим, что $a_{n,k}(z)$ совпадают с числами $a_{n,k}$, введенными при доказательстве леммы 3.2, в которых ω_k заменено числом $z \in I_{k,\Omega}$ и что $|z - k|$ равномерно ограничено по $\Omega \in \mathcal{L}(d, h, N, r)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $z \in I_{k,\Omega}$ ввиду оценок

$$\begin{aligned} |z - k| &\leq |z - \omega_k| + |\omega_k - k| < \omega_{k+1} - \omega_{k-1} + |\omega_k - k| \\ &\leq 2 + |\omega_{k+1} - (k+1)| + |\omega_k - k| + |\omega_{k-1} - (k-1)| \leq 2 + 3(N+1), \end{aligned}$$

см. замечание 1.2. Следовательно, соотношения (3.3) и (3.4) можно обосновать, лишь незначительно модифицируя доказательство (3.1) и (3.2). Теорема доказана.

4. Базисы Рисса из синусов и косинусов. Следствие 1.5 о базисах Рисса из синусов и косинусов можно существенно улучшить. Действительно, Хе и Фолькмер [14] установили уточненный вариант теоремы Кадеца об $1/4$ для синусов и косинусов, который нам удобно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА С. *Предположим, что $\delta \in [0, 1/2]$ и $h \in (0, 1/4)$ удовлетворяют соотношению*

$$[1 + \sin(2\delta\pi)]^{1/2}(1 - \cos(h\pi)) + \sin(h\pi) < 1.$$

Тогда существуют положительные числа t и M со следующими свойствами: для всякой последовательности $\Lambda := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ неотрицательных чисел, удовлетворяющих при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ неравенству $|\lambda_n - n - \delta| \leq h$, система $\mathcal{C}_\Lambda = (\cos \lambda_n x)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является базисом Рисса пространства $L_2(0, \pi)$ с нижней гранью t и верхней гранью M .

Понятно, что $\mathcal{C}_\Lambda$ остается базисом Рисса $L_2(0, \pi)$ после изменения конечного числа элементов последовательности Λ . Это замечание приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для заданных $d \in (0, 1)$, $\delta \in [0, 1/2]$, $p \in [1, \infty)$ и $t > 0$ мы обозначим через $\mathcal{L}_2(d, \delta, p, t)$ семейство всех строго возрастающих последовательностей $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ неотрицательных чисел, являющихся d -отделенными и удовлетворяющим неравенству $\|(\lambda_n - n - \delta)\|_{\ell_p(\mathbb{Z}_+)} \leq t$.

Как утверждает следующий аналог теоремы 1.3, семейства $\mathcal{L}_2(h, \delta, p, t)$ порождают равномерно ограниченные семейства базисов Рисса из косинусов.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для всяких $d \in (0, 1)$, $\delta \in [0, 1/2]$, $p \in [1, \infty)$ и $t > 0$ семейство $\{\mathcal{C}_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{L}_2(d, \delta, p, t)\}$ базисов Рисса пространства $L_2(0, \pi)$ является равномерно ограниченным.*

Как и при доказательстве теоремы 1.3, мы используем индукцию, которая начинается с последовательности, удовлетворяющей условиям теоремы В, а затем изменяет в ней конечное число элементов, чтобы получить заданную Λ . Нижняя и верхняя грани базиса $\mathcal{C}_\Lambda$ могут быть явным образом ограничены, при условии, что мы умеем оценить снизу функции

$$F_{k,\Lambda}(z) = \prod_{n \neq k} \frac{\lambda_n^2 - z^2}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2}$$

равномерно по $\Lambda \in \mathcal{L}_2(d, \delta, p, t)$, $k \in \mathbb{N}$ и $z \in [\lambda_{k-1} + d, \lambda_{k+1} - d]$; такие оценки можно получить так же, как и в п. 3.

Похожее утверждение имеет место для базисов Рисса $\mathcal{S}_\Lambda$ из синусов, если в определении 4.1 множество индексов $\mathbb{Z}_+$ заменить на $\mathbb{N}$, а множество $(\lambda_n - n - \delta)_{n \in \mathbb{N}}$ на $(\lambda_n - n + \delta)_{n \in \mathbb{N}}$, ср. [14]. После таких изменений семейство

$$\{\mathcal{S}_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{L}_2(d, \delta, p, t)\}$$

базисов Рисса пространства $L_2(0, \pi)$ будет равномерно ограниченным.

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Шкаликову за постановку задачи и внимание к работе и Я. В. Микитюку за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 227–247.
- [2] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О равномерной устойчивости в обратных задачах Штурма–Лиувилля” (в печати).
- [3] R. O. Hryniv, “Uniform stability of the inverse spectral problem for Dirac operators with summable potentials” (to appear).
- [4] R. O. Hryniv, “Uniform stability of the inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with singular potentials” (to appear).
- [5] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Acad. Press, San Diego, CA, 2001.
- [6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [7] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1934.
- [8] М. И. Кадец, “Точное значение константы Пэли–Винера”, *Докл. АН СССР*, **155**:6, (1964), 1253–1254.
- [9] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1940.

- [10] R. M. Young, “On perturbing bases of complex exponentials in $L^2(-\pi, \pi)$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**:1, (1975), 137–140.
- [11] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [12] А. М. Седлецкий, “Негармонический анализ”, *Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **96**, ВИНТИ, М., 2006, 106–211.
- [13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [14] X. He, H. Volkmer, “Riesz bases of solutions of Sturm–Liouville equations”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **7**:3, (2001), 297–307.

Р. О. Гринив

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов, Украина,
Львовский национальный университет им. И. Франко,
Львов, Украина,
Institute of Mathematics, Rzeszów University, Rzeszów, Poland
E-mail: rhryniv@iapmm.lviv.ua

Поступило

13.04.2009