Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, Подстановка Пайерлса и операторный метод Маслова, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 554–571

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:12:13

Подстановка Пайерлса и операторный метод Маслова

В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов

Рассматривается периодический оператор Шрёдингера в постоянном магнитном поле с векторным потенциалом $A(x)$. Подстановка Пайерлса представляет собой вариант адиабатического приближения для уравнений квантовой механики с быстро меняющимися электрическими потенциалами и слабыми магнитными полями, что в подходящих безразмерных переменных позволяет написать псевдодифференциальное уравнение для новой вспомогательной функции: $\mathcal{E}^\nu(-i\mu\partial_x, x)\phi = E\phi$, $\mathcal{E}^\nu$ – соответствующий энергетический уровень некоторого вспомогательного оператора Шрёдингера, который предполагается невырожденным, μ – малый параметр. В статье с помощью операторного метода В. П. Маслова показывается, что в случае постоянного магнитного поля такая редукция в любом порядке теории возмущений приводит к уравнению $\mathcal{E}^\nu(\hat{P}, \mu)\phi = E\phi$, с оператором $\mathcal{E}^\nu(\hat{P}, \mu)$, представленным как функция, зависящая только от операторов длинных импульсов $\hat{P}_j = -i\mu\partial_{x_j} + A_j(x)$.

Библиография: 13 названий.

1. Алгебра длинных импульсов. Подстановка Пайерлса представляет собой вариант адиабатического приближения для уравнений квантовой механики с быстро меняющимися электрическими потенциалами и слабыми магнитными полями. Рассмотрим случай периодического оператора Шрёдингера в постоянном магнитном поле, когда в трехмерном случае в подходящих безразмерных переменных стационарное уравнение Шрёдингера можно записать в виде

$$\left(-i\mu\frac{\partial}{\partial x} + A(x)\right)^2 \Psi + v\left(\frac{x}{\mu}\right)\Psi = E\Psi, \quad (1.1)$$

где $v(y)$ – потенциал, периодический на решетке Γ , задаваемой базисными векторами периодов a_1, a_2, a_3 : $v(y + a_j) = v(y)$. Параметр μ считается малым, он характеризует малость реальных периодов исходного потенциала $v(y)$, векторный потенциал $A(x)$ выбран в симметричной калибровке: $A(x) = (1/2)B \times x$, слабость магнитного поля B означает, что B не зависит от параметра μ , $|B| = O(1)$. Напомним, что подстановка Пайерлса состоит в следующей процедуре [1]. Рассмотрим семейство

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00726) и Министерства образования и науки РФ (грант № 2.1.1/4540).

зависящих от параметров квазиимпульса P задач о блоховских функциях для оператора $-\Delta_y + v(y)$:

$$(-\Delta_y + v(y))\chi = \mathcal{E}(P)\chi, \quad \chi(y + a_j, P) = e^{iP \cdot a_j} \chi(y, P). \quad (1.2)$$

При каждом $P \in \mathbb{R}^3$ спектр этой задачи дискретен, при этом функции $\chi(y, P)$ можно выбрать таким образом, что собственные значения $\mathcal{E}^\nu(P)$, занумерованные индексом ν , будут непрерывными функциями, периодическими на обратной решетке Γ^* , заданной базисными векторами b_1, b_2, b_3 , где $a_j \cdot b_k = 2\pi\delta_{jk}$. Функции $\mathcal{E}^\nu(P)$ часто называют *термами*, а равенства $\omega = \mathcal{E}^\nu(P)$ – *дисперсионным соотношением*. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее.

УСЛОВИЕ (i). Для некоторого фиксированного ν соответствующее собственное значение $\mathcal{E}^\nu(P)$ не вырождено для любого P :

$$|\mathcal{E}^\nu(P) - \mathcal{E}^s(P)| > \delta > 0$$

для всех $s \neq \nu$, $P \in \mathbb{R}^3$.

В таком случае $\mathcal{E}^\nu(P)$ – гладкая функция, периодическая с периодами b_j , при этом (см. [2]) соответствующую блоховскую функцию $\chi^\nu(y, P)$ можно выбрать так, что она будет гладкой функцией, периодической по переменным P с периодами b_j , т.е. периодической относительно обратной решетки Γ^* . Мы также будем считать, что при фиксированном P функция $\chi^\nu(y, P)$ нормирована:

$$(\chi^\nu(y, P), \chi^\nu(y, P))_y = 1,$$

где скалярное произведение $(f(y), g(y))_y$ задается как интеграл от $f(y)\bar{g}(y)$ по элементарной ячейке Q решетки Γ (например, по замкнутому параллелепипеду, построенному на векторах a_j). *Подстановка Пайерлса* в классической механике состоит в замене вектора квазиимпульса P на длинный классический импульс $P(p, x) = p + A(x)$, что приводит к появлению эффективного гамильтониана $H^\nu = \mathcal{E}^\nu(p + A(x))$, задающего соответствующую гамильтонову систему в фазовом пространстве с координатами (p, x) . “Квантовая” *подстановка Пайерлса* состоит в замене классического импульса p на оператор $\hat{p} = -i\mu\partial/\partial x$, что позволяет написать псевдодифференциальное редуцированное уравнение для новой вспомогательной функции φ :

$$\hat{L}^\nu \varphi = E\varphi, \quad L^\nu(p, x) = \mathcal{E}^\nu(p + A(x)) + O(\mu). \quad (1.3)$$

Поскольку операторы $\hat{p}$ и x не коммутируют, то возникает вопрос о “правильном” построении теории возмущений. Этому вопросу, который сформулирован, в частности, в книге [1] посвящено много публикаций. На операторном уровне он по существу (без псевдодифференциальных операторов) был решен в любом порядке теории возмущений в работе [3] для любого, в том числе и непостоянного магнитного поля. Используемая в [3] техника и формулы имеют достаточно сложную структуру. Сравнительно недавно построение редуцированного уравнения, основанного на псевдодифференциальных операторах в вейлевской форме, с соответствующими обоснованиями было проведено в работе [2]. В этой заметке мы хотим показать, что в случае постоянного поля оператор $\hat{L}^\nu(p, x)$ в редуцированном уравнении в любом порядке теории возмущений имеет вид функции, зависящей *только от операторов длинных импульсов* $\hat{P}_j = -i\mu\partial/\partial x_j + A_j(x)$, при этом такая редукция к уравнению (1.3) может быть произведена относительно просто с помощью операторного

метода Маслова (см. [4]). Задача (1.1), как было отмечено уже в [1], имеет алгебраическую природу. Операторы “длинных импульсов” $\hat{P}_j$ и координатные операторы x_j являются образующими алгебры Гейзенберга с коммутационными соотношениями

$$[\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 2i\mu q_{jk}, \quad [\hat{P}_j, x_k] = -i\mu \delta_{jk}, \quad [x_j, x_k] = 0,$$

где константы q_{jk} – это коэффициенты линейных функций

$$A_j(x) = \sum q_{jk} x_k.$$

В нашем случае $q_{12} = -B_3/2$, $q_{13} = B_2/2$, $q_{23} = -B_1/2$ и матрица (q_{jk}) кососимметрична. Гамильтониан $\hat{H}$ имеет вид $\hat{H} = \hat{P}^2 + v(x/\mu)$. Поскольку операторы $\hat{P}_j$ не коммутируют между собой, то нужно задавать их упорядочение, для определенности будем считать, что оператор $\hat{P}_1$ действует первым, $\hat{P}_2$ – вторым, $\hat{P}_3$ – третьим и, используя обозначения Фейнмана–Маслова [4], можно писать

$$\overset{1}{\hat{P}}_1, \quad \overset{2}{\hat{P}}_2, \quad \overset{3}{\hat{P}}_3.$$

Это упорядочение не существенно для определения $\hat{H}$, но играет важную роль для дальнейшего. Поскольку действие операторов $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ всегда в дальнейшем будет упорядочено указанным образом, цифры над операторами мы будем в дальнейшем опускать. Обобщая предложенный в [5]–[7] подход (“обобщенный адиабатический принцип”) с учетом вхождения операторов дифференцирования и умножения на (медленные) переменные x_j в гамильтониан $\hat{H}$ только через операторы длинных импульсов, адиабатическое приближение можно сформулировать следующим образом. Будем искать некоторое частное решение – волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi = \tilde{\Psi}(x, y) = \hat{\chi}^\nu \varphi, \quad (1.4)$$

где

$$\hat{\chi}^\nu = \chi^\nu(y, \overset{1}{\hat{P}}_1, \overset{2}{\hat{P}}_2, \overset{3}{\hat{P}}_3, \mu),$$

считая, что $y = x/\mu$, $\chi^\nu(y, P, \mu)$ – гладко зависящая от y и P функция, периодическая по y с периодами a_j , причем новая неизвестная функция φ удовлетворяет уравнению (обобщенная подстановка Пайерлса)

$$\hat{L}^\nu \varphi = E^\nu \varphi \quad (1.5)$$

с оператором

$$\hat{L}^\nu = L^\nu(\overset{1}{\hat{P}}_1, \overset{2}{\hat{P}}_2, \overset{3}{\hat{P}}_3, \mu),$$

представленным как функция, зависящая *только* от операторов $\hat{P}_j$ и μ . Операторы $\hat{\chi}^\nu$ называются *восстанавливающими* или *сплетающими*. Операторы $\hat{\chi}^\nu$, $\hat{L}^\nu$ задаются символами $\chi^\nu(y, P, \mu)$, $L^\nu(P, \mu)$, гладко зависящими от своих переменных и разлагающимися в асимптотические ряды по малому параметру μ :

$$L^\nu(P, \mu) = L_0^\nu(P) + \mu L_1^\nu(P) + \dots, \quad \chi^\nu(y, P, \mu) = \chi_0^\nu(y, P) + \mu \chi_1^\nu(y, P) + \dots \quad (1.6)$$

О том, каким классам принадлежат соответствующие символы, мы скажем ниже. Пользуясь соотношениями (1.4) и (1.5), уравнение (1.1) можно записать в виде операторного соотношения

$$\left(\left(\hat{P} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + v(y) \right) \chi^\nu(y, \hat{P}, \mu) = \chi^\nu(y, \hat{P}, \mu) L^\nu(\hat{P}, \mu). \quad (1.7)$$

Основная идея дальнейших вычислений состоит в следующем. Сначала от операторного уравнения (1.7) нужно перейти к уравнению для символов $\chi_k^\nu(y, P)$ и $L_k^\nu(P)$ операторов $\hat{\chi}_k^\nu$ и $\hat{L}_k^\nu$. Затем мы находим коэффициенты разложений (1.6) с помощью рекуррентных соотношений, которые получаются путем разложения левой и правой частей этого уравнения в асимптотические ряды по параметру μ и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях параметра μ . Мы ограничимся только анализом уравнений нулевого и первого приближений, хотя данным методом можно находить и следующие приближения, что, однако, привело бы к достаточно громоздким вычислениям. Имеют место следующие формулы композиции операторов и ее асимптотического разложения, которые можно найти в [8; с. 175–176] и которые мы также будем обсуждать в п. 3 данной статьи. Рассмотрим два оператора

$$\hat{a}_1 = a_1(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3), \quad \hat{a}_2 = a_2(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$$

с символами $a_1(P_1, P_2, P_3)$, $a_2(P_1, P_2, P_3)$ и их композицию – оператор

$$\hat{b} \equiv b(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3) = \hat{a}_2 \hat{a}_1.$$

Построим операторы

$$\begin{aligned} \hat{l}_1 &= P_1 + \mu l_1, \quad l_1 = -iB_3 \frac{\partial}{\partial P_2} + iB_2 \frac{\partial}{\partial P_3}, \\ \hat{l}_2 &= P_2 + \mu l_2, \quad l_2 = -iB_1 \frac{\partial}{\partial P_3}, \quad \hat{l}_3 = P_3. \end{aligned}$$

Тогда согласно [4], [8] по крайней мере формально можно записать символ оператора $\hat{a}_2 \hat{a}_1$ в виде

$$b(P_1, P_2, P_3, \mu) = a_2(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3) a_1(P_1, P_2, P_3) \equiv a_2(\overset{2}{P}_1 + \mu \overset{1}{l}_1, \overset{2}{P}_2 + \mu \overset{1}{l}_2, \overset{2}{P}_3) a_1(P_1, P_2, P_3). \quad (1.8)$$

Последнее из этой цепочки равенств справедливо в силу того факта, что операторы $\hat{l}_1$, P_1 и $\hat{l}_2$, P_2 коммутируют. Поэтому уравнение для символов χ , L имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(\left(\overset{2}{P}_1 + \mu \overset{1}{l}_1 - i \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\overset{2}{P}_2 + \mu \overset{1}{l}_2 - i \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\overset{2}{P}_3 - i \frac{\partial}{\partial y_3} \right)^2 + v(y) \right) \chi^\nu(y, P, \mu) \\ &= \chi^\nu(y, \overset{2}{P}_1 + \mu \overset{1}{l}_1, \overset{2}{P}_2 + \mu \overset{1}{l}_2, \overset{2}{P}_3, \mu) L^\nu(P, \mu). \end{aligned}$$

Теперь мы можем написать разложения по параметру μ и приравнять коэффициенты при разных степенях μ в левой и правой частях этого равенства. Это дает цепочку уравнений для определения коэффициентов χ^ν и L^ν .

Прежде чем выписать уравнения из этой цепочки отметим следующее. Хотя последние равенства следуют из общей операторной теории Маслова [4], [8], тем не менее, для полноты изложения мы приведем их доказательства в п. 3 в форме, вероятно, более привычной для специалистов в области псевдодифференциальных операторов. Для замкнутости изложения в п. 2 мы приведем некоторые вспомогательные для п. 3 утверждения, касающиеся метода стационарной фазы. В нулевом приближении получаем уравнение

$$((P - i\partial_y)^2 + v(y))\chi_0^\nu(y, P) = \mathcal{E}^\nu(P)\chi_0^\nu(y, P), \quad (1.9)$$

и мы можем взять

$$\chi_0^\nu(y, P) = e^{-iP \cdot y} \chi^\nu(y, P),$$

где $\chi^\nu(y, P)$ – соответствующая блоховская функция из (1.2), а $L_0^\nu(P) = \mathcal{E}^\nu(P)$. В результате мы получаем редуцированное уравнение в нулевом приближении:

$$\mathcal{E}^\nu(\hat{P})\varphi = E\varphi,$$

что согласуется с (1.3). В силу периодичности на обратной решетке Γ^* блоховской функции $\chi^\nu(y, P)$ для $\chi_0^\nu(y, P)$ имеем

$$\chi_0^\nu(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} \chi_0^\nu(y, P).$$

Отсюда легко выводятся равенства

$$\frac{\partial \chi_0^\nu}{\partial P}(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} \frac{\partial \chi_0^\nu}{\partial P}(y, P), \quad \frac{\partial \chi_0^\nu}{\partial y}(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} \left(\frac{\partial}{\partial y} - ib_j \right) \chi_0^\nu(y, P) \quad (1.10)$$

для $j = 1, 2, 3$.

Для вычисления следующей поправки составляем уравнение, приравнивая коэффициенты при степенях k параметра μ :

$$((P - i\partial_y)^2 + v(y) - \mathcal{E}^\nu(P))\chi_k^\nu(y, P) = F_k(y, P) + L_k^\nu(P)\chi_0^\nu(y, P), \quad (1.11)$$

где F_k выражается только через $\chi_0^\nu, \dots, \chi_{k-1}^\nu$ и $L_0^\nu, \dots, L_{k-1}^\nu$ и их производные, при этом производные $\partial/\partial y_m$ входят *только в виде комбинаций* $(P_m - i\partial/\partial y_m)$. В частности,

$$\begin{aligned} F_1(y, P) = & -i\tilde{q}_{12}\partial_{P_1}\chi_0^\nu\partial_{P_2}L_0^\nu - i\tilde{q}_{13}\partial_{P_1}\chi_0^\nu\partial_{P_3}L_0^\nu - i\tilde{q}_{23}\partial_{P_2}\chi_0^\nu\partial_{P_3}L_0^\nu \\ & - 2(-i\tilde{q}_{12}(P_1 - i\partial_{y_1})\partial_{P_2} - i\tilde{q}_{13}(P_1 - i\partial_{y_1})\partial_{P_3} \\ & - i\tilde{q}_{23}(P_2 - i\partial_{y_2})\partial_{P_3})\chi_0^\nu(y, P), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\tilde{q}_{jk} = q_{kj} - q_{jk}$. Используя равенства (1.10), нетрудно доказать равенство

$$F_1(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} F_1(y, P). \quad (1.13)$$

Поскольку в левой части (1.11) стоит оператор, который при фиксированном P является фредгольмовым в соответствующих соболевских пространствах периодических относительно решетки Γ функций (т.е. фредгольмовым оператором из $\mathcal{H}_{\text{per}}^{s+2}$ в $\mathcal{H}_{\text{per}}^s$), что следует из общей теории эллиптических операторов на компактных многообразиях (см., например, [9]), то условие разрешимости уравнения (1.11) состоит в ортогональности правой части решению однородного уравнения

$$L_1^\nu(P) = -(F_1(y, P), \chi_0^\nu(y, P))_y. \quad (1.14)$$

Используя равенства (1.10) и (1.13), получим

$$L_1^\nu(P + b_j) = L_1^\nu(P). \quad (1.15)$$

Используя в свою очередь это равенство, найдем, что

$$F_1(y, P + b_j) + L_1^\nu(P + b_j)\chi_0^\nu(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} (F_1(y, P) + L_1^\nu(P)\chi_0^\nu(y, P)). \quad (1.16)$$

Для того чтобы функция $\chi_1^\nu(y, P)$ находилась из уравнения (1.11) единственным образом, наложим дополнительное условие ее ортогональности к $\chi_0^\nu(y, P)$:

$$(\chi_1^\nu(y, P), \chi_0^\nu(y, P))_y = 0.$$

Поскольку в левой части уравнения (1.11) производные $\partial/\partial y_j$ также входят *только в виде комбинаций* $(P_j - i\partial/\partial y_j)$, то из (1.16) немедленно следует, что

$$\chi_1^\nu(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} \chi_1^\nu(y, P). \quad (1.17)$$

Ясно, что аналогичным образом можно получать и дальнейшие приближения из следующих рекуррентных соотношений (1.11). Более того, учитывая описанные выше свойства функций F_k , индукцией по номеру приближения нетрудно установить равенства

$$L_k^\nu(P + b_j) = L_k^\nu(P), \quad \chi_k^\nu(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} \chi_k^\nu(y, P), \quad \chi_k^\nu(y + a_l, P) = \chi_k^\nu(y). \quad (1.18)$$

В результате в любом порядке теории возмущений получается редуцированное уравнение:

$$(\mathcal{E}^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3) + \mu L_1^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3) + \dots + \mu^m L_m^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3))\varphi = E\varphi, \quad (1.19)$$

где $L_1^\nu(P)$ определяется формулами (1.12) и (1.14).

Теперь дадим определение классов рассматриваемых символов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пространство S^m состоит из таких функций $f(P) \in \mathbb{R}_P^3$, что $f(P)$ и ее производные удовлетворяют неравенствам*

$$|f^{(\alpha)}(P)| \leq C_\alpha (1 + |P|)^m \quad (1.20)$$

с некоторыми константами C_α для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с целыми неотрицательными α_j .

В частности, S^0 состоит из всех ограниченных в $\mathbb{R}_P^3$ функций, имеющих ограниченные производные. Символ $L_0^\nu(P)$ как раз принадлежит S^0 , поскольку он совпадает с $\mathcal{E}^\nu(P)$, а $\mathcal{E}^\nu(P)$ в силу сделанных предположений является гладкой периодической относительно решетки Γ^* функцией. В S^m можно ввести систему норм

$$\|f(P)\|_{k,m} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup \frac{|f^{(\alpha)}(P)|}{(1 + |P|)^m}, \quad (1.21)$$

в результате чего S^m становится счетно-нормированным пространством. Мы будем писать, что

$$f(P, h) = O(h^N) \quad \text{относительно } S^m,$$

если каждая норма $\|h^{-N} f(P, h)\|_{k,m}$ ограничена в окрестности $h = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $f(y, P) \in C^\infty(Q \times \mathbb{R}_P^3)$ принадлежит S^m , если выполняются оценки (1.21) с константами, не зависящими от y при $y \in Q$.

Легко видеть, что функция χ_0^ν как раз принадлежит S^0 . Это следует из того, что она периодична относительно решетки Γ по y , а функция $e^{iP \cdot y} \chi_0^\nu$ периодична относительно решетки Γ^* по P , поскольку она совпадает с блоховской функцией $\chi^\nu(y, P)$. Функция $\chi^\nu(y, P)$ при $y \in Q$ полностью определяется своими значениями

при $P \in Q^*$, где Q и Q^* – элементарные ячейки решеток Γ и Γ^* соответственно, а на $Q \times Q^*$ она и ее производные ограничены, из чего следует, что функция $\chi_0^\nu(y, P)$ при $y \in Q$ имеет ограниченные производные по P . Тем самым, функция $\chi_0^\nu(y, P)$ принадлежит S^0 . Аналогичное рассуждение показывает, что любая гладкая функция $f(y, P)$ на $Q \times \mathbb{R}_P^3$, для которой выполняется соотношение

$$f(y, P + b_j) = e^{-ib_j \cdot y} f(y, P), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.22)$$

также принадлежит S^0 . Соотношение (1.22) означает инвариантность $f(y, P)$ относительно преобразований

$$\tau(b)f(y, P) = e^{ib \cdot y} f(y, P + b)$$

для любых $b \in \Gamma^*$. Такие функции будем называть τ -инвариантными. Таким образом, соотношение (1.22) означает, что функция $f(y, P)$ будет τ -инвариантной.

Перейдем теперь к анализу символов первого приближения. Из (1.16) видим, что для правой части уравнения (1.11) при $k = 1$ выполняется (1.22). Как уже отмечалось выше, из этого следует, что соотношение (1.22) будет выполняться и для решения $\chi_1^\nu(y, P)$. Действительно, из периодичности $\mathcal{E}^\nu(P)$ относительно решетки Γ^* следует, что оператор, стоящий в левой части уравнения (1.11) коммутирует с преобразованием $\tau(b)$ при $b \in \Gamma^*$:

$$((P - i\partial_y)^2 + v(y) - \mathcal{E}^\nu(P))e^{ib \cdot y} u(y, P) = e^{ib \cdot y} ((P + b - i\partial_y)^2 + v(y) - \mathcal{E}^\nu(P + b))u(y, P).$$

Поэтому из (1.11), (1.15), (1.16) получим

$$\begin{aligned} & ((P - i\partial_y)^2 + v(y) - \mathcal{E}^\nu(P))(e^{ib \cdot y} \chi_1^\nu(y, P)) \\ &= e^{ib \cdot y} (F_1(y, P + b) + L_1^\nu(P + b)\chi_0^\nu(y, P + b)) = F_1(y, P) + L_1^\nu(P)\chi_0^\nu(y, P). \end{aligned}$$

Равенство (1.22) теперь следует из единственности решений уравнений (1.11) в классе периодических относительно решетки Γ^* функций с условием ортогональности к $\chi_0^\nu(y, P)$. Фактически это рассуждение показывает, что из τ -инвариантности правой части уравнения (1.11) вытекает τ -инвариантность его решения.

Таким же образом по индукции устанавливаются равенства (1.18). Бесконечную дифференцируемость присутствующих в них функций несложно доказать с помощью общей теории эллиптических операторов на компактных многообразиях (см., например, [9]). Для этого рассмотрим задачу: при фиксированном P по заданной функции $f(y)$ и числу d нужно найти функцию $u(y)$ и число g , удовлетворяющие уравнениям

$$((P - i\partial_y)^2 + v(y) - \mathcal{E}^\nu(P))u(y) - g\chi_0^\nu(y, P) = f(y), \quad (u(y), \chi_0^\nu(y, P))_y = d. \quad (1.23)$$

Так как отвечающий этой задаче оператор $A(P): \mathcal{H}^{s+2} \times C^1 \rightarrow \mathcal{H}^s \times C^1$, где C^1 – одномерное комплексное пространство, обратим и $A(P)$ гладко зависит от параметров P , то обратный оператор $A^{-1}(P)$ также гладко зависит от параметров P . Взяв за f функцию $F_1(y, P)$, мы получим, что решение $u(y, P, d)$ задачи (1.23) гладко зависит от параметров P . Но $\chi_1^\nu(y, P)$ как раз и является решением задачи (1.23) при $d = 0$ и $g = L_1^\nu(P)$, следовательно, $\chi_1^\nu(y, P)$ является гладкой функцией от параметров P со значениями в пространстве $\mathcal{H}^{s+2}$ при любом s . Теперь из стандартных теорем вложения соболевских пространств вытекает, что $\chi_1^\nu(y, P)$ будет бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.

Аналогичным образом из рекуррентных соотношений (1.11) индукцией по k доказываются равенства (1.18) и гладкость соответствующих функций. Тем самым, установлено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *При выполнении условия (i) рекуррентные соотношения (1.11) имеют решения $\chi_k^\nu(y, P)$ и $L_k^\nu(P)$, принадлежащие классу S^0 и удовлетворяющие соотношениям (1.18).*

Теперь для любого целого $m \geq 0$ можно написать редуцированное уравнение в m -м приближении (1.19). Считая, что это равенство выполнено, построим функцию $\Psi(x)$ с помощью приближенного сплетающего оператора:

$$\Psi(x) = (\chi_0^\nu(y, \hat{P}) + \mu\chi_1^\nu(y, \hat{P}) + \cdots + \mu^m\chi_m^\nu(y, \hat{P}))|_{y=x/\mu}\varphi(x). \quad (1.24)$$

Естественно, что уравнение (1.1) для такой функции будет выполняться лишь приближенно, и поэтому важным является вопрос о характере соответствующей невязки. Ответ дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если выполнены условия теоремы 1.1, то функция $\Psi(x)$, построенная с помощью формулы (1.24), удовлетворяет соотношению*

$$((-i\mu\partial_x + A(x))^2 + v(y))\Psi - E\Psi + \mu^{m+1}r_m(y, \hat{P}, \mu)|_{y=x/\mu}\varphi(x) = 0,$$

где символ $r_m(y, \hat{P}, \mu)$ принадлежит классу S^0 в смысле определения 1.2, причем постоянные в неравенствах вида (1.21) для r_m можно выбрать не зависящими от $0 < \mu \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения непосредственно следует из предыдущих рассуждений и оценки остаточного члена в формуле композиции операторов, которая рассматривается в п. 3 настоящей статьи.

Символ $r_m(y, \hat{P}, \mu)$ также обладает свойством (1.22), что вытекает из формулы композиции (1.8) и эквивалентной ей формулы (3.13).

Заметим также, что мы не указали класс, которому принадлежит $\varphi(x)$, нужно только, чтобы к таким функциям можно было бы применять операторы с символами класса S^0 . Например, как это видно из п. 2 настоящей статьи, все предыдущие рассуждения справедливы, когда функция φ принадлежит одному из классов S^k (в определении 1.1 в этом случае переменные P нужно заменить на x).

Некоторые следствия. Заметим, что если ось x_3 в исходном операторе выбрать направленной по вектору магнитного поля B , то оператор $\hat{P}_3$ будет просто оператором дифференцирования, коммутирующим с $\hat{P}_1, \hat{P}_2$, к тому же не зависящими от переменной x_3 . Поэтому по переменной x_3 в уравнении (1.19) можно сделать преобразование Фурье и получить для соответствующей функции $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, \xi_3)$, где ξ_3 – импульсная переменная, сопряженная x_3 , уравнение

$$(\mathcal{E}^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \xi_3) + \mu^m L_m^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \xi) + \cdots + \mu L_1^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \xi_3))\tilde{\varphi} = E\tilde{\varphi}. \quad (1.25)$$

Для операторов $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ выполнено обычное коммутационное соотношение Гейзенберга $[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = i\mu B$, поэтому (1.25) – псевдодифференциальное уравнение с одной степенью свободы. Этот факт становится совсем прозрачным, если вместо симметричной калибровки при определении векторного потенциала выбрать калибровку

Ландау. Тогда $A = \dots$ и

$$\hat{P}_1 = -i\mu \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{P}_2 = -i\mu \frac{\partial}{\partial x_2} + Bx_1, \quad \hat{P}_3 = -i\mu \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Тогда можно сделать преобразование Фурье по двум переменным x_2, x_3 , и положить $z = x_1 + \xi_2/B$. Тогда для соответствующей функции $\phi(z, \xi_2, \xi_3)$, где ξ_2, ξ_3 – переменные, двойственные к x_2, x_3 , получаем уравнение

$$\left(\mathcal{E}^\nu \left(-i\mu \frac{\partial}{\partial z}, B^2 z, \xi_3 \right) + \mu L_1^\nu \left(-i\mu \frac{\partial}{\partial z}, B^2 z, \xi_3 \right) + \dots + \mu L_1^\nu \left(-i\mu \frac{\partial}{\partial z}, B^2 z, \xi_3 \right) \right) \phi = E\phi. \quad (1.26)$$

Приведенные соображения дают возможность перейти от квантового уравнения к уравнениям классической динамики. Для этого следует заменить в последнем уравнении оператор $-i\mu \partial/\partial z$ на классический импульс. Это дает классический гамильтониан с одной степенью свободы, зависящий от параметров. Если ввести соответствующую скобку Пуассона, то гамильтонову систему, отвечающую $\mathcal{E}^\nu(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ (и “подправленному” гамильтониану (1.19)), можно написать сразу для классических длинных импульсов P_j . Ее траектории устроены весьма сложно, им посвящены очень серьезные исследования, как физиков, так и математиков. Наиболее полное изложение результатов и библиографию можно найти в [10].

2. Метод стационарной фазы для осцилляторных интегралов с квадратичной фазой. Рассмотрим интеграл

$$F(h, \varphi) = \frac{1}{(\pi h)^{n/2}} \int e^{iAx \cdot x/h} \varphi(x) dx, \quad (2.1)$$

где $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, интегрирование производится по всему $\mathbb{R}^n$, A – симметрическая вещественная невырожденная матрица. Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то хорошо известный метод стационарной фазы утверждает, что при $h \rightarrow 0$ для $F(h, \varphi)$ имеет место асимптотическое разложение

$$F(h, \varphi) \sim |\det A|^{-1/2} e^{i\pi\sigma/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-i \frac{h}{4} A^{-1} D_x \cdot D_x \right)^j \varphi(x) \Big|_{x=0}, \quad (2.2)$$

где σ – сигнатура матрицы A , через D_x обозначается

$$D_x = -i\partial_x = (-i\partial_{x_1}, \dots, -i\partial_{x_n})$$

(см., например, [11], [12]). В этом пункте статьи мы получим аналогичное разложение с оценкой остаточного члена для случая, когда функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству S^m из определения 1.1 (переменные P в этом определении следует заменить на x). При этом интеграл в (2.1), вообще говоря, не является сходящимся в обычном смысле, и его нужно определять специальным образом. Подобного рода интегралы часто встречаются в теории уравнений с частными производными, и их принято называть осцилляторными интегралами (см., например, [11]–[13]). Строгое определение интеграла в (2.1) для $\varphi(x) \in S^m$ будет дано ниже.

Вернемся к случаю $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Нам понадобится оценка остаточного члена в разложении (2.2). Обозначим через $F_N(h, \varphi)$ разность между $F(h, \varphi)$ и правой частью формулы (2.2), в которой суммирование производится по $0 \leq j < N$ (при этом

$F_0(h, \varphi) = F(h, \varphi)$). Пусть носитель функции $\varphi(x)$ находится в ограниченной области Ω (т.е. $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$). Тогда с некоторыми константами C_N и k_N , зависящими только от области Ω и матрицы A , выполняется оценка

$$|F_N(h, \varphi)| \leq C_N h^N \sum_{|\alpha| \leq k_N} \max |\varphi^{(\alpha)}(x)|. \quad (2.3)$$

В таком виде это неравенство имеется в [12], в [11], [13] имеются более точные оценки, в частности, за k_N можно взять $s_n + 2N$, где s_n – наименьшее целое $> n/2$ (см. [11; формула (7.7.7)]). Для полноты напомним схему вывода разложения (2.2) и оценки (2.3). Взяв за $f(x)$ функцию $\exp(iAx \cdot x/h)$, воспользуемся формулой преобразования Фурье такой функции:

$$(\pi h)^{n/2} |\det A|^{-1/2} e^{i\pi\sigma/4} e^{-ihA^{-1}\xi \cdot \xi/4}$$

(см. [11], [12]). Тогда, исходя из соотношения

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \tilde{f}(-\xi), \tilde{\varphi}(\xi) \rangle, \quad f(x) \in S'(\mathbb{R}^n), \quad \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n),$$

получим

$$F(h, \varphi) = \frac{1}{(\pi h)^{n/2}} \langle f(x), \varphi(x) \rangle = (2\pi)^{-n} |\det A|^{-1/2} e^{i\pi\sigma/4} \int e^{-ihA^{-1}\xi \cdot \xi/4} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

Из этой формулы видно, что функция $F(h, \varphi)$, доопределенная по непрерывности при $h = 0$, бесконечно дифференцируема при $h \geq 0$ и формула (2.2) есть просто разложение функции $F(h, \varphi)$ в ряд Тейлора при $h = 0$.

Разложение (2.2) и оценка (2.3) получаются разложением экспоненты в (2.4) в ряд Тейлора с применением неравенства

$$\left| e^{it} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(it)^j}{j!} \right| \leq t^N, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Учитывая, что при преобразовании Фурье оператор D_x переходит в умножение на ξ , формулу (2.4) можно записывать в виде

$$F(h, \varphi) = |\det A|^{-1/2} e^{i\pi\sigma/4} e^{-ihA^{-1}D_x \cdot D_x/4} \varphi(x)|_{x=0}, \quad (2.5)$$

что очень удобно для запоминания разложения (2.2), поскольку правая часть в (2.2) получается формальным разложением экспоненты в (2.5) в ряд Тейлора.

Наша задача состоит в том, чтобы получить разложение (2.2) для $\varphi(x) \in S^m$. Сначала рассмотрим интеграл (2.1) в случае, когда $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(x) = 0$ в некоторой окрестности начала координат, например, $\varphi(x) = 0$ в шаре $|x| < 1$. Как тоже хорошо известно, для таких функций выполняются неравенства $|F(h, \varphi)| \leq C_N h^N$ (как обычно, константы, которые обозначаются буквами C , в каждом новом неравенстве принимают новые значения). Напомним хорошо известный вывод таких неравенств, чтобы уточнить характер зависимости констант C_N от функции $\varphi(x)$.

Обозначим через $S(x)$ функцию $S(x) = Ax \cdot x$ и определим дифференциальный оператор

$$L = |S'_x|^{-2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

В таком случае имеет место равенство

$$Le^{iS(x)/h} = \frac{i}{h} e^{iS(x)/h}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} \varphi(x) e^{iS(x)/h} dx &= \frac{h}{i} \int_{|x| \geq 1} \varphi(x) L(e^{iS(x)/h}) dx \\ &= \frac{h}{i} \int_{|x| \geq 1} e^{iS(x)/h} ({}^tL(\varphi(x))) dx, \end{aligned}$$

где tL – формально сопряженный оператор. Таким образом,

$$F(h, \varphi) = -ihF(h, {}^tL\varphi).$$

Повторяя такие интегрирования k раз, получаем тождество

$$F(h, \varphi) = (-ih)^k F(h, ({}^tL)^k \varphi). \quad (2.6)$$

Так как коэффициенты оператора L являются однородными функциями порядка -1 , то при $|x| > 1$

$$|({}^tL)^k \varphi(x)| \leq \frac{C_k}{|x|^k} \sum_{|\alpha| \leq k} |\varphi^{(\alpha)}(x)|.$$

Пользуясь этим неравенством и тем, что $|x|$ и $1 + |x|$ при $|x| \geq 1$ эквивалентны, получаем оценку

$$|F(h, \varphi)| \leq h^k (\pi h)^{-n/2} \max_{|x| \geq 1} |(1 + |x|)^{n+1} ({}^tL)^k (\varphi(x))| \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}},$$

следовательно,

$$|F(h, \varphi)| \leq C_k h^{k-n/2} \|\varphi(x)\|_{k, k-n-1}$$

с другими константами C_k , причем константы C_k не зависят от функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ с носителем вне шара $|x| < 1$. Нормы $\|\cdot\|_{k, m}$ определяются формулой (1.21), в которой P следует заменить на x . Зафиксируем некоторое целое $m \geq 0$. Поскольку $\|\varphi\|_{k, m_1} \leq \|\varphi\|_{k, m}$ при $m_1 \geq m$, то

$$|F(h, \varphi)| \leq C_k h^{k-n/2} \|\varphi\|_{k, m} \quad (2.7)$$

при $k - n - 1 \geq m$. Пусть теперь задано некоторое целое число $N \geq 0$. Выбрав целое число k'_N так, чтобы выполнялись неравенства $k'_N \geq m + n + 1$ и $N \leq k'_N - n/2$, из (2.7) получим окончательную оценку

$$|F(h, \varphi)| \leq C_N h^N \|\varphi\|_{k'_N, m} \quad (2.8)$$

при $0 < h \leq 1$. Константа C_N в (2.8) равна константе $C_{k'_N}$ из неравенства (2.7).

Оценками (2.8) с произвольными N мы будем пользоваться в дальнейшем при обсуждении асимптотики интеграла (2.1), а сейчас перейдем к определению осцилляторного интеграла (2.1) для произвольной амплитуды $\varphi(x) \in S^m$, где m – неотрицательное целое число. Выберем срезающую функцию $\chi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную

единице в шаре $|x| < 1$. Пусть сначала $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Разобьем функцию $\varphi(x)$ на два слагаемых

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \text{где} \quad \varphi_1(x) = \chi_1(x)\varphi(x), \quad \varphi_2(x) = (1 - \chi_1(x))\varphi(x).$$

Применив к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ неравенства (2.3) и (2.8) соответственно при $N = 0$, получаем оценку вида

$$|F(h, \varphi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k_0} \max |\varphi_1^{(\alpha)}(x)| + C_2 \|\varphi_2\|_{k'_0, m} \leq C_3 (\|\varphi\|_{k_0, m} + \|\varphi\|_{k'_0, m}),$$

из которой следует, что при любом целом $m \geq 0$ при фиксированном h функционал $F(h, \varphi)$, определенный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ограничен по норме $\|\cdot\|_{k''_0, m}$ пространства S^m , где $k''_0 = \max(k_0, k'_0)$. Для произвольной $\varphi(x) \in S^m$ последовательность функций $\chi(\varepsilon x)\varphi(x)$, где $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\chi(x)$ равна единице в окрестности начала координат, сходится в S^{m+1} к $\varphi(x)$. Отсюда следует, что существует предел $F(h, \chi(\varepsilon x)\varphi(x))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, который не зависит от выбора функции $\chi(x)$. Этот предел мы и будем обозначать как $F(h, \varphi)$. Тем самым, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Значение осцилляторного интеграла в правой части (2.1) для любой функции $\varphi(x) \in S^m$ определяется с помощью равенства

$$\int e^{iAx \cdot x/h} \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{iAx \cdot x/h} \chi(\varepsilon x) \varphi(x) dx.$$

С другой стороны, если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то, используя тождество (2.6) для функции $\varphi_2(x)$, мы получим, что

$$F(h, \varphi(x)) = F(h, \chi_1(x)\varphi(x)) + (-ih)^k F(h, ({}^tL)^k((1 - \chi_1(x))\varphi(x))). \quad (2.9)$$

При $k \geq m + n + 1$ интегралы в правой части этого равенства абсолютно сходятся для любых функций из $\varphi(x) \in S^m$, что видно из оценок, производившихся при доказательстве неравенства (2.8). Более того, заменив $\varphi(x)$ в равенстве (2.9) на $\chi(\varepsilon x)\varphi(x)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что (2.9) выполняется для всех $\varphi(x) \in S^m$, если $F(h, \varphi(x))$ понимать в смысле определения 1.1. Отсюда, в частности, следует, что правая часть в (2.9) не зависит от выбора k при $k \geq m + n + 1$, хотя это можно было бы доказать непосредственно с помощью интегрирования по частям. Тем самым, мы приходим ко второму определению осцилляторного интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Осцилляторный интеграл* в правой части равенства (2.1) для $\varphi(x) \in S^m$ определяется равенством (2.9) при $k \geq m + n + 1$, результат не зависит от выбора целого числа $k \geq m + n + 1$ и функции $\chi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равной единице в некоторой окрестности начала координат.

Из предыдущих рассуждений следует, что определения 2.1 и 2.2 эквивалентны. Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения этого пункта.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $\varphi(x) \in S^m$, то для $F(h, \varphi)$ в (2.1) имеет место асимптотическое разложение (2.2), для остаточного члена при $0 < h \leq 1$ выполняется оценка

$$|F_N(h, \varphi(x))| \leq C_N h^N \|\varphi\|_{k''_N, m} \quad (2.10)$$

с некоторыми константами C_N и k''_N , не зависящими от функции φ .

Доказательство этого утверждения состоит в том, что мы опять разбиваем функцию $\varphi(x)$ на сумму двух функций

$$\varphi_1(x) = \chi_1(x)\varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = (1 - \chi_1(x))\varphi(x),$$

для первой пользуемся оценкой (2.3), а для второй – оценкой (2.8).

В завершение пункта рассмотрим поведение осцилляционного интеграла (2.1), когда функция φ зависит от дополнительных параметров $y \in \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что $\varphi(x, y)$ принадлежит $S^m(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n)$, т.е. для любых мультииндексов α и β выполняются неравенства

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |y|)^m. \quad (2.11)$$

В дальнейшем будем считать, что m – целое неотрицательное число. Так как выполняются неравенства

$$(1 + |x|^m + |y|^m) \leq (1 + |x| + |y|)^m \leq C_m (1 + |x|^m + |y|^m), \quad (2.12)$$

то (2.11) эквивалентны неравенствам

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|^m + |y|^m) \quad (2.13)$$

с другими константами $C_{\alpha, \beta}$. Неравенства (2.12) являются следствием более общего неравенства

$$(|z|^m + |x|^m + |y|^m) \leq C_m (|z|^m + |x|^m + |y|^m),$$

которое вытекает из того, что левая и правая части этого неравенства – это однородные функции одинаковых порядков однородности и отличны от нуля при $|x| + |y| + |z| \neq 0$.

В силу того, что функция $\varphi(x, y)$ при фиксированном y принадлежит $S^m(\mathbb{R}_x^n)$, с помощью формулы (2.1) определяется функция

$$\Phi(h, y) = F(h, \varphi(x, y))$$

(в формуле (2.1) нужно $\varphi(x)$ заменить на $\varphi(x, y)$).

ТЕОРЕМА 2.2. Если для $\varphi(x, y)$ выполнены неравенства (2.11) с целым $m \geq 0$, то функция $\Phi(h, y)$ принадлежит $S^m(\mathbb{R}_y^n)$ и допускает асимптотическое разложение (2.2), в котором $\varphi(x)|_x = 0$ нужно заменить на $\varphi(x, y)|_x = 0$, а остаточный член $\Phi_N(h, y)$ имеет оценку

$$|\partial_y^\beta \Phi_N(h, y)| \leq C_{N, \beta} h^N (1 + |y|)^m \quad (2.14)$$

при любых N и β , $0 < h \leq 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$\partial_y^\beta \Phi_N(h, y) = F_N(h, \partial_y^\beta \varphi(x, y)).$$

Пользуясь неравенствами (2.10) и (2.13), получим

$$\begin{aligned} |\partial_y^\beta \Phi_N(h, y)| &\leq C_N h^N \sum_{|\alpha| \leq k_N''} \sup_x \frac{|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)|}{(1 + |x|)^m} \\ &\leq C_N h^N \sum_{|\alpha| \leq k_N''} C_{\alpha, \beta} \sup_x \frac{1 + |x|^m + |y|^m}{(1 + |x|)^m}, \end{aligned}$$

откуда и следуют неравенства (2.14).

3. Формула композиции. Положим

$$\hat{P}_1 = hD_{x_1} + q_{12}x_2 + q_{13}x_3, \quad \hat{P}_2 = hD_{x_2} + q_{21}x_1 + q_{23}x_3, \quad \hat{P}_3 = hD_{x_3} + q_{31}x_1 + q_{32}x_2,$$

где $D_{x_k} = -i\partial_{x_k}$, h – положительная постоянная, q_{kj} в этом пункте – это произвольные вещественные постоянные. Пусть задана функция $a(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Определим по $a(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ оператор $a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$, причем будем считать, что $\hat{P}_1$ действует первым, $\hat{P}_2$ действует вторым, $\hat{P}_3$ – третьим в смысле операторного исчисления из книги Маслова [4]. Функцию $a(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ называют *символом* такого оператора. Будем рассматривать только символы, которые принадлежат классу $S^m(\mathbb{R}_\eta^3)$. Аналогично обычным псевдодифференциальным операторам, $a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ можно рассматривать как h -псевдодифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} & a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^3} \int a(\xi_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3, \xi_2 + q_{21}x_1 + q_{23}y_3, \xi_3 + q_{31}x_1 + q_{32}x_2) \\ & \quad \times e^{i(x-y)\cdot\xi/h} u(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интеграл в (3.1) следует понимать как осцилляторный интеграл в смысле определений 2.1 и 2.2, причем интегрирование производится по всему пространству $\mathbb{R}_y^3 \times \mathbb{R}_\xi^3$. Оператор $a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ можно записать в виде

$$a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^3} \int e^{-iM(x,y)/h + i(x-y)\cdot\eta/h} a(\eta)u(y) dy d\eta, \quad (3.2)$$

где

$$M(x, y) = (x_1 - y_1)(q_{12}y_2 + q_{13}y_3) + (x_2 - y_2)(q_{21}x_1 + q_{23}y_3) + (x_3 - y_3)(q_{31}x_1 + q_{32}x_2), \quad (3.3)$$

или в виде

$$a(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)u(x) = \int K_a(x, y, h)u(y) dy, \quad (3.4)$$

где ядро интегрального оператора (3.4) определяется осцилляторным интегралом

$$K_a(x, y, h) = \frac{1}{(2\pi h)^3} e^{-iM(x,y)/h} \int e^{i(x-y)\cdot\eta/h} a(\eta) d\eta. \quad (3.5)$$

Переходя от y к $t = x - y$, получим, что обобщенная функция

$$K_a(x, x - t, h) \exp(ih^{-1}M(x, x - t))$$

есть обратное h -преобразование Фурье от символа $a(\eta)$, следовательно, не зависит от x , а сам символ $a(\eta)$ восстанавливается с помощью формулы обращения h -преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \int e^{-it\cdot\eta/h} K_a(x, x - t, h) e^{iM(x, x-t)/h} dt \\ &= \int e^{-i(x-y)\eta/h} K_a(x, y, h) e^{iM(x,y)/h} dy. \end{aligned}$$

Наша задача – изучить композицию (т.е. произведение)

$$a_2(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3) a_1(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$$

операторов с символами из S^{m_2} и S^{m_1} соответственно. Будем считать, что $m_2 \geq 0$ и $m_1 \geq 0$. Мы покажем, что такая композиция сама является оператором с символом (зависящим от h), который обозначим как $b(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, h)$, и дадим асимптотическое разложение этого символа по параметру $h \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Символ композиции $a_2(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)a_1(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ имеет асимптотическое разложение*

$$b(\zeta, h) = \sum \frac{\mu^{k_1+k_2+k_3}}{k_1!k_2!k_3!} ((-i\tilde{q}_{12}\partial_{\zeta_1})^{k_1}(-i\tilde{q}_{13}\partial_{\zeta_1})^{k_2}(-i\tilde{q}_{23}\partial_{\zeta_2})^{k_3}a_2(\zeta))\partial_{\zeta_2}^{k_1}\partial_{\zeta_3}^{k_2}\partial_{\zeta_3}^{k_3}a_1(\zeta), \quad (3.6)$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным k_1, k_2, k_3 и $\tilde{q}_{jk} = q_{kj} - q_{jk}$. Остаточный член $b_N(\zeta, h)$, который получается при учете в сумме (3.6) только членов с $k_1 + k_2 + k_3 < N$, является величиной порядка $O(h^N)$ относительно S^m с $m = m_1 + m_2$, причем для любых целых $N \geq 0, k \geq 0, m \geq 0$ найдутся такие целые числа $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$, что при $0 < h \leq 1$ выполняются оценки

$$\|b_N(\zeta, h)\|_{k,m} \leq C_{N,k,m} h^N \|a_1\|_{k_1,m} \|a_2\|_{k_2,m}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (3.2), запишем $v = a_1(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)u$ в виде

$$v(z) = \frac{1}{(2\pi h)^3} \int e^{-iM(z,y)/h + i(z-y)\cdot\eta/h} a_1(\eta) u(y) dy d\eta.$$

Тогда в силу формулы (3.2)

$$\begin{aligned} a_2(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)a_1(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)u \\ = a_2(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)v = \frac{1}{(2\pi h)^6} \int e^{i(-M(x,z) - M(z,y) + L)/h} a_2(\theta) a_1(\eta) u(y) dy d\eta dz d\theta, \end{aligned}$$

где $L = (z - y) \cdot \eta + (x - z) \cdot \theta$. Чтобы получить символ $b(\zeta, h)$, мы используем для b формулу, аналогичную (3.5):

$$\begin{aligned} \int e^{i(x-y)\cdot\zeta/h} b(\zeta, h) d\zeta &= (2\pi h)^3 e^{iM(x,y)/h} K_b(x, y, h) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^3} \int e^{i(M(x,y) - M(x,z) - M(z,y) + L)/h} a_2(\theta) a_1(\eta) d\eta dz d\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Конечно, предварительно нужно проверить, что правая часть в (3.8) является функцией от $x - y$.

Приведем к более простому виду показатель экспоненты в (3.8). Раскрывая скобки в выражениях вида (3.3) и группируя подобные члены, нетрудно получить, что

$$M(x, y) - M(x, z) - M(z, y) = -\tilde{q}_{12}\tilde{z}_1(z_2 - y_2) - \tilde{q}_{13}\tilde{z}_1\tilde{z}_3 - \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3(z_2 - x_2),$$

где

$$\tilde{q}_{ik} = q_{kj} - q_{jk}, \quad \tilde{z}_1 = z_1 - x_1, \quad \tilde{z}_3 = z_3 - y_3, \quad (3.9)$$

а $L = (z - y) \cdot \eta + (x - z) \cdot \theta$ приводится к виду

$$L = (x_1 - y_1)\eta_1 + \tilde{z}_1(\eta_1 - \theta_1) + (x_2 - z_2)\theta_2 + (z_2 - y_2)\eta_2 + (x_3 - y_3)\theta_3 + \tilde{z}_3(\eta_3 - \theta_3).$$

Переходя от переменных x, y к переменным $t = x - y$, $t' = x + y$ (обратная замена: $x = (t + t')/2$, $y = (t' - t)/2$), запишем слагаемые в L , относящиеся к координатам с индексом 2, в виде

$$(x_2 - z_2)\theta_2 + (z_2 - y_2)\eta_2 = \frac{t_2}{2}(\theta_2 + \eta_2) + \frac{t'_2}{2}(\theta_2 - \eta_2) + z_2(\eta_2 - \theta_2).$$

Обозначая

$$\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \eta_1, \quad \tilde{\eta}_3 = \eta_3 - \theta_3, \quad (3.10)$$

запишем L в виде

$$L = (x_1 - y_1)\eta_1 - \tilde{z}_1\tilde{\theta}_1 + (x_3 - y_3)\theta_3 + \tilde{z}_3\tilde{\eta}_3 + \frac{t_2}{2}(\theta_2 + \eta_2) + \left(\frac{t'_2}{2} - z_2\right)(\theta_2 - \eta_2).$$

В результате показатель экспоненты в (3.8) приводится к

$$\begin{aligned} \frac{i}{h} \left[-\tilde{q}_{13}\tilde{z}_1\tilde{z}_3 - \left(z_2 - \frac{t'_2}{2}\right)(\tilde{q}_{12}\tilde{z}_1 + \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3 + \theta_2 - \eta_2) + \right. \\ \left. + \frac{t_2}{2}(\theta_2 + \eta_2 - \tilde{q}_{12}\tilde{z}_1 + \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3) - \tilde{z}_1\tilde{\theta}_1 + \tilde{z}_3\tilde{\eta}_3 + t_1\eta_1 + t_3\theta_3 \right]. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что в интеграле (3.8) нужно сделать замену переменных: от интегрирования по z, θ, η перейти к интегрированию по переменным $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{\theta}_1, \theta_2, \theta_3, \eta_1, \eta_2, \tilde{\eta}_3$, где $\tilde{z}_2 = z_2 - t'_2/2$, а остальные переменные определены формулами (3.9), (3.10), затем перейти к новым переменным, заменив θ_2 и η_2 на

$$s_1 = \tilde{q}_{12}\tilde{z}_1 + \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3 + \theta_2 - \eta_2, \quad s_2 = \frac{\tilde{q}_{23}\tilde{z}_3 - \tilde{q}_{12}\tilde{z}_1 + \theta_2 + \eta_2}{2},$$

причем

$$\theta_2 = \frac{s_1}{2} + s_2 - \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3, \quad \eta_2 = s_2 - \frac{s_1}{2} + \tilde{q}_{12}\tilde{z}_1. \quad (3.11)$$

Обозначим через A квадратичную форму

$$A(\tilde{z}_1, \tilde{z}_3, \tilde{\theta}_1, \tilde{\eta}_3) = -\tilde{q}_{13}\tilde{z}_1\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1\tilde{\theta}_1 + \tilde{z}_3\tilde{\eta}_3,$$

тогда формула (3.8) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi h)^3} \int e^{i(t_1\zeta_1 + t_2\zeta_2 + t_3\zeta_3)/h} b(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, h) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ = \frac{1}{(2\pi h)^6} \int e^{i(A - \tilde{z}_2s_1 + t_2s_2 + t_1\eta_1 + t_3\theta_3)/h} a_2(\theta)a_1(\eta) d\tilde{z} d\tilde{\theta}_1 d\eta_1 ds_1 ds_2 d\theta_3 d\tilde{\eta}_3, \end{aligned}$$

где θ и η выражаются через переменные, по которым производится интегрирование, по формулам (3.10) и (3.11). Трехмерное h -преобразование Фурье в этом равенстве можно рассматривать как последовательное применение одномерных преобразований. Так в левой части имеется одномерное обратное h -преобразование Фурье от переменной ζ_1 к t_1 , а в правой — от η_1 к t_1 , следовательно, на основании формулы обращения h -преобразования Фурье мы можем опустить интегрирования по ζ_1 в левой и по η_1 в правой частях, заменив η_1 в правой части на ζ_1 . Аналогичным образом можно поступить и с интегрированиями по ζ_3 в правой и по θ_3 в левой

частях этого равенства. Применив после этого одномерную формулу обращения h -преобразования Фурье по переменной ζ_2 и переходя от s_2 к $\tilde{s}_2 = s_2 - \zeta_2$, получим

$$b(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, h) = \frac{1}{(2\pi h)^4} \int e^{i(A - \tilde{z}_2 s_1 + t_2 \tilde{s}_2)/h} a_2(\theta) a_1(\eta) d\tilde{z} d\tilde{\theta}_1 ds_1 d\tilde{s}_2 d\tilde{\eta}_3 dt_2.$$

Так как амплитуда $a_2(\theta) a_1(\eta)$ не зависит от t_2 и $\tilde{z}_2$, то из формулы обращения h -преобразования Фурье следует, что можно опустить интегрирование по переменным $\tilde{z}_2$, s_1 , t_2 , $\tilde{s}_2$, добавив множитель $(2\pi h)^2$ и положив $s_1 = \tilde{s}_2 = 0$:

$$\begin{aligned} b(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, h) &= \frac{1}{(2\pi h)^2} \int e^{iA(\tilde{z}_1, \tilde{z}_3, \tilde{\theta}_1, \tilde{\eta}_3)/h} a_2(\tilde{\theta}_1 + \zeta_1, \zeta_2 - \tilde{q}_{23}\tilde{z}_3, \zeta_3) \\ &\quad \times a_1(\zeta_1, \zeta_2 + \tilde{q}_{12}\tilde{z}_1, \eta_3 + \tilde{\zeta}_3) d\tilde{z}_1 d\tilde{z}_3 d\tilde{\theta}_1 d\tilde{\eta}_3, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для завершения доказательства остается к этому интегралу применить метод стационарной фазы, сформулированный в теореме 2.2. Подсчитав матрицу B , которая является обратной к матрице формы A , получим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2\tilde{q}_{13} \\ 0 & 2 & -2\tilde{q}_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

Записав теперь формулу (2.5) для нашего случая, получим, что символ b может быть представлен в виде

$$b(\zeta, h) = \exp(ih(\tilde{q}_{12}D_{\eta_2}D_{\theta_1} + \tilde{q}_{13}D_{\eta_3}D_{\theta_1} + \tilde{q}_{23}D_{\eta_3}D_{\theta_2})) a_2(\theta) a_1(\eta)|_{\eta=\zeta, \theta=\zeta}. \quad (3.13)$$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора, как и в п. 2, мы как раз получим асимптотическое разложение (3.6). Остальные утверждения теоремы 3.1 следуют из теоремы 2.2, примененной к интегралу (3.12). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если хотя бы один из символов $a_1(\eta)$, $a_2(\theta)$ является многочленом, то в разложении (3.6) остается лишь конечное число слагаемых, и (3.6) превращается из асимптотического в точное равенство (т.е. остаточный член равен нулю).

Это видно, если записать формулу (3.13) в виде, аналогичном формуле (2.4), понимая преобразование Фурье соответствующей функции φ в смысле теории обобщенных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы 3.1 остается справедливым, если символы a_1 и a_2 зависят также от h , причем они являются величинами порядка $O(1)$ по h относительно S^{m_1} и S^{m_2} соответственно в смысле определения 1.1.

Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства теоремы 3.1. В теореме 3.1 мы рассматривали символы, не зависящие от h , чтобы не загромождать соответствующие формулы.

В частности, из этого утверждения следует, что объединение по всем m операторов $a(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, h)$, с символами порядка $O(1)$ относительно S^m является алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если выполнены условия теоремы 3.1, то символ $b(\zeta, h)$, доопределенный по непрерывности при $h = 0$, является бесконечно дифференцируемой

по совокупности переменных функцией при $h \geq 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^3$, а для производных от $b_N(\zeta, h)$ по h выполняются оценки вида (3.7) с константами $C_{N,k,m}$, зависящими от порядка такой производной.

Доказательство этого утверждения лишь с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 3.1.

Авторы благодарны В. Е. Назайкинскому за полезные обсуждения и советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 9, Статистическая физика, ч. 2, Теория конденсированного состояния, Наука, М., 1978.
- [2] G. Panati, H. Spohn, S. Teufel, “Effective dynamics for Bloch electrons: Peierls substitution and beyond”, *Comm. Math. Phys.*, **242**:3, (2003), 547–578.
- [3] E. I. Blount, “Bloch electrons in a magnetic field”, *Phys. Rev.* (2), **126**:5, (1962), 1636–1653.
- [4] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [5] Л. В. Берлянд, С. Ю. Доброхотов, “Операторное разделение переменных” в задаче о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроменяющимися коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **296**:1, (1987), 80–84.
- [6] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics”, *J. Engrg. Math.*, **55**:1–4, (2006), 183–237.
- [7] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных наноструктурах”, *УФН*, **175**:9, (2005), 1004–1010.
- [8] М. В. Карасёв, В. П. Маслов, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 145–267.
- [9] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.
- [10] С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, “Топологические явления в нормальных металлах”, *УФН*, **168**:3, (1998), 249–258.
- [11] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье, Мир, М., 1986.
- [12] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1987.
- [13] S. Albeverio, Z. Brzeźniak, “Finite dimensional approximation approach to oscillatory integrals and stationary phase in infinite dimensions”, *J. Funct. Anal.*, **113**:1, (1993), 177–244.

В. В. Грушин

Московский государственный институт
электроники и математики,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: vvgrushin@mail.ru

Поступило

16.10.2009

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: dobr@ipmnet.ru