Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, L_1 -норма одной тригонометрической суммы,
Матем. заметки, 2004, том 76, выпуск 1, 133–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:32:04

УДК 511

L_1 -НОРМА ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

К. М. Эминян

Получены оценки тригонометрической суммы $S_N(\alpha) = \sum_{n=1}^N \varepsilon(n) \exp(2\pi i \alpha n)$.
Библиография: 4 названия.

1. Введение. В литературе известны оценки тригонометрических сумм в метрике L_1 , справедливые для сумм из весьма широких классов.

С. В. Бочкарёв получил в [1] неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x [2^{(\log n)^\beta}]) \right| dx \geq (\log N)^{(\beta+1)/2},$$

здесь $\beta \geq 1$ – произвольное число, а $\alpha_n = \pm 1$.

Для случая $1 < \beta < 3/2$ этот результат был усилен А. А. Карацубой, который доказал в [2], что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x f(n)) \right| dx \geq \exp(2^{-15} A^{-2} (\log N)^{3-2\beta}),$$

где $A \geq 1$, $N \geq N_1(\beta, A) > 0$, а α_n – произвольные числа такие, что $|\alpha_n| = 1$.

Пусть $\varepsilon_k = 0, 1$ – коэффициенты в двоичном разложении числа n :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k.$$

Разобьем множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ на два непересекающихся подмножества $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ следующим образом:

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

и $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$.

Пусть

$$S_Q^{(M)}(\alpha) = \prod_{r=0}^{MQ-1} (1 - e^{2\pi i 2^r \alpha}).$$

Справедливо равенство

$$S_Q^{(M)}(\alpha) = \sum_{n \leq 2^{MQ}-1} \varepsilon(n) e^{2\pi i n \alpha},$$

где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

В данной работе мы будем заниматься тригонометрической суммой

$$S_N(\alpha) = \sum_{n=1}^N \varepsilon(n) \exp(2\pi i \alpha n).$$

Ее специфика позволяет получить оценки, сформулированные в следующей теореме, являющейся основным результатом статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – произвольное натуральное число, $N = 2^{24Q-1} - 1$. Тогда справедливы неравенства

$$N^{\Delta_2} \leq \int_0^1 |S_N(x)| dx \leq N^{\Delta_1},$$

где $\Delta_1 = 0.407\dots$, $\Delta_2 = 0.390\dots$.

2. Леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Здесь и далее сумму $f(c_1) + f(c_2)$ будем обозначать как

$$\sum_{d=c_1}^{c_2}{}^* f(d).$$

Для примера, вычислим следующее выражение:

$$A = \sum_{d=c_1}^{c_2}{}^* A_1(d) \sum_{d_1=g_1(d)}^{h_1(d)}{}^* A_2(d_1);$$

сначала фиксируем d и получаем $A(d) = A_1(d)A_2(h_1(d)) + A_1(d)A_2(g_1(d))$ и $A = A(c_1) + A(c_2)$.

ЛЕММА 1. Для любых вещественных чисел A, M, m, j, x справедливо тождество

$$\begin{aligned} S &= \cos \frac{A\pi}{2^M} (x + j - 2^{m-1}) \sin \frac{\pi}{2^m} (x + j) + \cos \frac{A\pi}{2^M} (x + j) \cos \frac{\pi}{2^m} (x + j) \\ &= \sum_{d=2^{M-m}-A}^{2^{M-m}+A}{}^* \cos \frac{d\pi}{2^{M-m+2}} \cos \frac{d\pi}{2^M} (x + j - 2^{m-2}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться следующими формулами:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)), \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad (2)$$

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (3)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \quad (4)$$

Из (1) и (2) получается равенство

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2^M} ((x+j)(2^{M-m} - A) + 2^{m-1}A) \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\pi}{2^M} ((x+j)(2^{M-m} + A) - 2^{m-1}A) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2^M} (A - 2^{M-m})(x+j) + \cos \frac{\pi}{2^M} (A + 2^{M-m})(x+j) \right). \end{aligned}$$

Преобразуем его, пользуясь формулой (3):

$$\begin{aligned} S &= \cos \frac{\pi}{2^{M-m+2}} (A - 2^{M-m}) \cos \frac{(2^{M-m} - A)\pi}{2^M} (x+j - 2^{m-2}) \\ &\quad + \cos \frac{\pi}{2^{M-m+2}} (A + 2^{M-m}) \cos \frac{(2^{M-m} + A)\pi}{2^M} (x+j - 2^{m-2}) \\ &= \sum_{d=2^{M-m}-A}^{2^{M-m}+A}^* \cos \frac{d\pi}{2^{M-m+2}} \cos \frac{d\pi}{2^M} (x+j - 2^{m-2}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\begin{aligned} S_M &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \\ &\quad \times \sum_{d_3=2^3-d_2}^{2^3+d_2} \cos \frac{d_3 \pi}{2^5} \cdots \sum_{d_{M-1}=2^{M-1}-d_{M-2}}^{2^{M-1}+d_{M-2}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}}, \\ T_M &= \frac{\ln S_M}{M \ln 2} \quad u \quad t_M = \frac{\ln S_{M-1}}{M \ln 2}. \end{aligned}$$

Тогда $T_{24} = 0.40655554 \dots$, $t_{24} = 0.39000864 \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 состоит в вычислении на компьютере суммы S_M , в которой M полагается равным 23 и 24.

При этом получены следующие константы: $S_{23} = 657.20862 \dots$ и $S_{24} = 865.234 \dots$. Для $M = 23$ расчеты производились по формулам

$$\begin{aligned}
 A(d) &= \sqrt{2} \cos\left(\pi \frac{d}{8}\right) T(d), \\
 T(d) &= \sum_{\nu=1}^4 (X_{\nu}(1, d) W(k_{\nu}(1, d)) + X_{\nu}(1, -d) W(k_{\nu}(1, -d))), \\
 W(s) &= \sum_{\gamma=1}^4 X_{\gamma}(4, s) E(k_{\gamma}(4, s)) + X_{\gamma}(4, -s) E(k_{\gamma}(4, -s)), \\
 E(v) &= \sum_{\beta=1}^4 (X_{\beta}(7, v) Z(k_{\beta}(7, v)) + X_{\beta}(7, -v) Z(k_{\beta}(7, -v))), \\
 Z(u) &= \sum_{\alpha=1}^4 (X_{\alpha}(10, u) R(k_{\alpha}(10, u)) + X_{\alpha}(10, -u) R(k_{\alpha}(10, -u))), \\
 R(r) &= \sum_{n=1}^4 (X_n(13, r) H(k_n(13, r)) + X_n(13, -r) H(k_n(13, -r))), \\
 H(c) &= \sum_{j=1}^4 (X_j(16, c) S(19, k_j(16, c)) + X_j(16, -c) S(19, k_j(16, -c))),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 X_1(m, d) &= \cos\left(\pi \frac{2^{m+1} - d}{2^{m+3}}\right) \cos\left(\pi \frac{2^{m+2} - (2^{m+1} - d)}{2^{m+4}}\right) \\
 &\quad \times \cos\left(\pi \frac{2^{m+3} - (2^{m+2} - (2^{m+1} - d))}{2^{m+5}}\right), \\
 X_2(m, d) &= \cos\left(\pi \frac{2^{m+1} - d}{2^{m+3}}\right) \cos\left(\pi \frac{2^{m+2} - (2^{m+1} - d)}{2^{m+4}}\right) \\
 &\quad \times \cos\left(\pi \frac{2^{m+3} + (2^{m+2} - (2^{m+1} - d))}{2^{m+5}}\right), \\
 X_3(m, d) &= \cos\left(\pi \frac{2^{m+1} - d}{2^{m+3}}\right) \cos\left(\pi \frac{2^{m+2} + (2^{m+1} - d)}{2^{m+4}}\right) \\
 &\quad \times \cos\left(\pi \frac{2^{m+3} - (2^{m+2} + (2^{m+1} - d))}{2^{m+5}}\right), \\
 X_4(m, d) &= \cos\left(\pi \frac{2^{m+1} - d}{2^{m+3}}\right) \cos\left(\pi \frac{2^{m+2} + (2^{m+1} - d)}{2^{m+4}}\right) \\
 &\quad \times \cos\left(\pi \frac{2^{m+3} + (2^{m+2} + (2^{m+1} - d))}{2^{m+5}}\right), \\
 k_1(m, d) &= 2^{m+3} - (2^{m+2} - (2^{m+1} - d)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2(m, d) &= 2^{m+3} + (2^{m+2} - (2^{m+1} - d)), \\k_3(m, d) &= 2^{m+3} - (2^{m+2} + (2^{m+1} - d)), \\k_4(m, d) &= 2^{m+3} + (2^{m+2} + (2^{m+1} - d)),\end{aligned}$$

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^4 (X_i(x, y) + X_i(x, -y)),$$

$$T_{24} = \frac{\ln S_{24}}{24 \ln 2} = 0.4065554 \dots, \quad S_{23} = A(1) + A(3) = 657.2086226759072 \dots,$$

$$t_{24} = \frac{\ln S_{23}}{24 \ln 2} = 0.39000864994011 \dots$$

3. Доказательство теоремы. Обозначим

$$I_Q^{(M)} = \int_0^1 |S_Q^{(M)}(\alpha)| d\alpha.$$

Тогда

$$I_Q^{(M)} = 2^{MQ} \int_0^1 \left| \prod_{r=0}^{MQ-1} \sin \pi 2^r \alpha \right| d\alpha.$$

Преобразуем $I_Q^{(M)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}I_Q^{(M)} &= \int_0^1 \left| \prod_{r=0}^{M-1} (\sin \pi 2^r \alpha) \prod_{r=M}^{MQ-1} (\sin \pi 2^r \alpha) \right| d\alpha \\&= 2^{MQ} \sum_{j=0}^{2^M-1} \int_{j/2^M}^{(j+1)/2^M} \left| \prod_{r=0}^{M-1} (\sin \pi 2^r \alpha) \prod_{r=M}^{MQ-1} (\sin \pi 2^r \alpha) \right| d\alpha.\end{aligned}$$

Пусть $\alpha = (x + j)/2^M$; тогда

$$\begin{aligned}I_Q^{(M)} &= 2^{MQ} \frac{1}{2^M} \sum_{j=0}^{2^M-1} \int_{j/2^M}^{(j+1)/2^M} \prod_{r=0}^{M-1} \left| \sin \pi 2^r \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{r=M}^{MQ-1} \left| \sin \pi 2^r \frac{x+j}{2^M} \right| dx \\&= 2^{M(Q-1)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{2^M-1} \prod_{r=0}^{M-1} |\sin \pi 2^{r-M} (x+j)| \prod_{r=M}^{MQ-1} |\sin \pi 2^{r-M} (x+j)| dx \\&= 2^{M(Q-1)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{2^M-1} \prod_{n=1}^M \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| \prod_{m=0}^{M(Q-1)-1} |\sin \pi 2^m x| dx \\&= \int_0^1 K_M(x) S_{Q-1}^{(M)} dx,\end{aligned}$$

где

$$K_M(x) = \sum_{j=0}^{2^M-1} \prod_{n=1}^M \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|,$$

$x \in [0, 1]$. Чтобы оценить $I_Q^{(M)}$ сверху и снизу, достаточно оценить $K_M(x)$ сверху и снизу. Сначала преобразуем $K_M(x)$ к виду

$$K_M(x) = \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|.$$

Разбивая промежуток суммирования по $j = 0, \dots, 2^{M-1}$ на две равные части, получаем

$$K_M(x) = \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| + \sum_{j=2^{M-1}}^{2^M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|.$$

В последней сумме сделаем замену переменной суммирования вида $k = j - 2^{M-1}$:

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2^{M-1}-1} \left| \sin \pi \frac{x+k+2^{M-1}}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+k+2^{M-1}}{2^n} \right| \\ &= \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| + \sum_{k=0}^{2^{M-1}-1} \left| \cos \pi \frac{x+k}{2^M} \right| \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+k}{2^n} \right|. \end{aligned}$$

Так как $x \in [0, 1]$ $j, k = 0, \dots, 2^{M-1}$, то

$$\left| \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \right| = \sin \pi \frac{x+j}{2^M} \quad \text{и} \quad \left| \cos \pi \frac{x+k}{2^M} \right| = \cos \pi \frac{x+k}{2^M};$$

следовательно,

$$K_M(x) = \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \left(\sin \pi \frac{x+j}{2^M} + \cos \pi \frac{x+j}{2^M} \right) \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|.$$

Из (4) следует, что

$$K_M(x) = \sqrt{2} \sum_{j=0}^{2^{M-1}-1} \cos \frac{\pi}{2^M} (x+j-2^{M-2}) \prod_{n=1}^{M-1} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|.$$

И здесь разобьем промежуток суммирования на две равные части; тогда

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{2^{M-2}-1} \cos \frac{\pi}{2^M} (x+j-2^{M-2}) \sin \frac{\pi}{2^{M-1}} (x+j) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| \\ &\quad + \sqrt{2} \sum_{j=2^{M-2}}^{2^{M-1}-1} \cos \frac{\pi}{2^M} (x+j-2^{M-2}) \sin \frac{\pi}{2^{M-1}} (x+j) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|. \end{aligned}$$

В последней сумме делаем замену переменной суммирования $k = j - 2^{M-2}$ и получаем

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{2^{M-2}-1} \cos \frac{\pi}{2^M}(x+j-2^{M-2}) \sin \frac{\pi}{2^{M-1}}(x+j) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| \\ &\quad + \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2^{M-2}-1} \cos \frac{\pi}{2^M}(x+k) \cos \frac{\pi}{2^{M-1}}(x+k) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \pi \frac{x+k}{2^n} \right| \\ &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{2^{M-2}-1} \left(\cos \frac{\pi}{2^M}(x+j-2^{M-2}) \sin \frac{\pi}{2^{M-1}}(x+j) \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\pi}{2^M}(x+j) \cos \frac{\pi}{2^{M-1}}(x+j) \right) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right|. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 1. При $m = M - 1$ и $A = 1$ $K_M(x)$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{2^{M-2}-1} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{\pi d_1}{2^3} \cos \frac{\pi d_1}{2^M}(x+j-2^{M-3}) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \frac{\pi}{2^n}(x+j) \right| \\ &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{\pi d_1}{2^3} \sum_{j=0}^{2^{M-2}-1} \cos \frac{\pi d_1}{2^M}(x+j-2^{M-3}) \prod_{n=1}^{M-2} \left| \sin \frac{\pi}{2^n}(x+j) \right|. \end{aligned}$$

Проводя это рассуждение $M - 2$ раза, получаем

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \cdots \sum_{d_{M-2}=2^{M-2}-d_{M-3}}^{2^{M-2}+d_{M-3}} \cos \frac{d_{M-2} \pi}{2^M} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^1 \cos \frac{\pi d_{M-2}}{2^M}(x+j-1) \sin \frac{\pi}{2}(x+j). \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\sum_{j=0}^1 \cos \frac{\pi d_{M-2}}{2^M}(x+j-1) \sin \frac{\pi}{2}(x+j) = \sum_{d_{M-1}=2^{M-1}-d_{M-2}}^{2^{M-1}+d_{M-2}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}}(2x-1);$$

следовательно,

$$\begin{aligned} K_M(x) &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \\ &\quad \times \sum_{d_{M-1}=2^{M-1}-d_{M-2}}^{2^{M-1}+d_{M-2}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}}(2x-1). \end{aligned}$$

Заметим, что $K_M(x) \leq S_M$ при $x \in [0, 1]$, где

$$S_M = \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \\ \times \sum_{d_3=2^3-d_2}^{2^3+d_2} \cos \frac{d_3 \pi}{2^5} \cdots \sum_{d_{M-1}=2^{M-1}-d_{M-2}}^{2^{M-1}+d_{M-2}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}}.$$

Чтобы оценить $K_M(x)$ снизу, рассмотрим сумму

$$\Omega(x) = \sum_{d_{M-1}=2^{M-1}-d_{M-2}}^{2^{M-1}+d_{M-2}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}} \cos \frac{d_{M-1} \pi}{2^{M+1}} (2x-1).$$

Имеем

$$\Omega(x) = \cos \frac{(2^{M-1}-d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} \cos \frac{(2^{M-1}-d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} (2x-1) \\ + \cos \frac{(2^{M-1}+d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} \cos \frac{(2^{M-1}+d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} (2x-1).$$

При $x \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$-\frac{2^{M-1}-d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi \leq \frac{(2^{M-1}-d_{M-2})\pi}{2^{M+1}}(2x-1) \leq \frac{2^{M-1}-d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi$$

и

$$-\frac{2^{M-1}+d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi \leq \frac{(2^{M-1}+d_{M-2})\pi}{2^{M+1}}(2x-1) \leq \frac{2^{M-1}+d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi.$$

Заметим, что $\min\{d_{M-2}\} = 2^{M-2} \pm 2^{M-3} \pm \cdots \pm 1 \geq 2^{M-2} - 2^{M-3} - \cdots - 1 = 2^{M-2} - (2^{M-3} + 2^{M-4} + \cdots + 1) = 1$; поэтому

$$\frac{2^{M-1}-d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi \leq \frac{2^{M-1}-1}{2^{M+1}}\pi = \frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{2^{M+1}}.$$

С другой стороны, $\max\{d_{M-2}\} \leq 2^{M-2} + 2^{M-3} + \cdots + 1 = 2^{M-1} - 1$; значит,

$$\frac{2^{M-1}+d_{M-2}}{2^{M+1}}\pi \leq \frac{2^{M-1}+2^{M-1}-1}{2^{M+1}}\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{2^{M+1}}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\cos \frac{(2^{M-1}-d_{M-2})\pi}{2^{M+1}}(2x-1) \geq \cos \frac{(2^{M-1}-d_{M-2})\pi}{2^{M+1}}$$

и

$$\cos \frac{(2^{M-1}+d_{M-2})\pi}{2^{M+1}}(2x-1) \geq \cos \frac{(2^{M-1}+d_{M-2})\pi}{2^{M+1}};$$

следовательно,

$$\Omega(x) \geq \cos^2 \frac{(2^{M-1} - d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} + \cos^2 \frac{(2^{M-1} + d_{M-2})\pi}{2^{M+1}},$$

но

$$\cos \frac{(2^{M-1} + d_{M-2})\pi}{2^{M+1}} = \sin \frac{(2^{M-1} - d_{M-2})\pi}{2^{M+1}},$$

т.е. $\Omega(x) \geq 1$. И так, $K_M(x) \geq S_{M-1}$, где

$$S_{M-1} = \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \sum_{d_{M-2}=2^{M-2}-d_{M-3}}^{2^{M-2}+d_{M-3}} \cos \frac{d_{M-2} \pi}{2^M}.$$

Таким образом, $S_{M-1} \leq K_M(x) \leq S_M$. Следовательно,

$$S_{M-1} \int_0^1 |S_{Q-1}^{(M)}(x)| dx \leq I_Q^{(M)} \leq S_M \int_0^1 |S_{Q-1}^{(M)}(x)| dx.$$

Повторяя это неравенство $Q - 1$ раз, получаем $S_{M-1}^Q \leq I_Q^{(M)} \leq S_M^Q$ или $2^{Q M t_M} \leq I_Q^{(M)} \leq 2^{Q M T_M}$, где $t_M = \ln S_{M-1} / (M \ln 2)$ и $T_M = \ln S_M / (M \ln 2)$. Случай $M = 2$ рассмотрен в статье [3], где получено

$$T_2 = \frac{\ln S_2}{2 \ln 2} = \frac{\ln \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 \ln 2} = 0.443 \dots$$

Из леммы 2 при $M = 24$ получаем $t_{24} = 0.3900 \dots$ и $T_{24} = 0.4065 \dots$. Следовательно, $2^{24 Q t_{24}} \leq I_Q^{(24)} \leq 2^{24 Q T_{24}}$ или

$$N^{\Delta_2} \leq \int_0^1 \left| \sum_{n \leq N} \varepsilon(n) e^{2\pi i n \alpha} \right| d\alpha \leq N^{\Delta_1},$$

где $\Delta_1 = 0.407 \dots$, $\Delta_2 = 0.390 \dots$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место следующая явная формула:*

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^1 \left| \sum_{n \leq 2^{N-1}} \varepsilon(n) e^{2\pi i n x} \right| dx \\ &= \pi^{-1} 2^{N+0.5} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \sum_{d_{N-1}=2^{N-1}-d_{N-2}}^{2^{N-1}+d_{N-2}} \frac{1}{d_{N-1}} \sin \frac{d_{N-1} \pi}{2^N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} I_N &= 2^N \int_0^1 \left| \prod_{r=0}^{N-1} \sin \pi 2^r \alpha \right| d\alpha = 2^N \sum_{j=0}^{2^N-1} \int_{j/2^N}^{(j+1)/2^N} \prod_{r=0}^{N-1} |\sin \pi 2^r \alpha| d\alpha \\ &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{2^N-1} \prod_{r=0}^{N-1} \left| \sin \pi 2^r \frac{x+j}{2^N} \right| dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{2^N-1} \prod_{n=0}^N \left| \sin \pi \frac{x+j}{2^n} \right| dx = \int_0^1 K_N(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \\ &\quad \times \sum_{d_{N-1}=2^{N-1}-d_{N-2}}^{2^{N-1}+d_{N-2}} \cos \frac{d_{N-1} \pi}{2^{N+1}} \cos \frac{d_{N-1} \pi}{2^{N+1}} (2x-1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_N &= \sqrt{2} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \\ &\quad \times \sum_{d_{N-1}=2^{N-1}-d_{N-2}}^{2^{N-1}+d_{N-2}} \frac{2^{N+1}}{d_{N-1} \pi} \cos \frac{d_{N-1} \pi}{2^{N+1}} \sin \frac{d_{N-1} \pi}{2^{N+1}} \\ &= 2^{N+0.5} \pi^{-1} \sum_{d_1=1}^3 \cos \frac{d_1 \pi}{2^3} \sum_{d_2=2^2-d_1}^{2^2+d_1} \cos \frac{d_2 \pi}{2^4} \cdots \sum_{d_{N-1}=2^{N-1}-d_{N-2}}^{2^{N-1}+d_{N-2}} \frac{1}{d_{N-1}} \sin \frac{d_{N-1} \pi}{2^N}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\tau(n)$ – число натуральных делителей n , а $r(n)$ – число решений уравнения $x^2 + y^2 = n$. Пусть $\mathbb{N}_i = \mathbb{N}_0$ или $\mathbb{N}_1$, γ – постоянная Эйлера. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X, n \in \mathbb{N}_i} \tau(n) &= \frac{X}{2} (\ln X + 2\gamma - 1) + O(X^\omega \log^2 X), \\ \sum_{n \leq X, n \in \mathbb{N}_i} r(n) &= \frac{\pi}{2} X + O(X^\omega \log^2 X); \end{aligned}$$

здесь $\omega \leq 0.907 \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В статьях [3] и [4] получено, что $\omega = \frac{1}{2}(1 + \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 0.94288325 \dots$. В силу теоремы $\Delta \leq 0.407 \dots$. Поэтому $\omega \leq 0.907 \dots$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бочкарёв С. В. Об одном методе оценки L_1 -нормы экспоненциальной суммы // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 74–76.
- [2] Карацуба А. А. Об оценке L_1 -нормы одной экспоненциальной суммы // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 465–468.
- [3] Эминян К. М. О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 680–686.
- [4] Эминян К. М. О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов // Тр. МИАН. Теория чисел и анализ. 1994. Т. 207. С. 377–382.

Московский государственный университет прикладной биотехнологии
E-mail: eminyan@mail.ru

Поступило
08.10.2001