Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кошелев, Теорема Эрдёша–Секереша и сравнения,
Матем. заметки, 2010, том 87, выпуск 4, 572–579

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:21:56

Теорема Эрдёша–Секереша и сравнения

В. А. Кошелев

В работе обсуждается следующая проблема комбинаторной геометрии. Для заданных натуральных n и q найти или оценить минимальное h такое, что среди h точек общего положения на плоскости найдутся n вершин выпуклого многоугольника, количество точек внутри которого делится на q . В работе для широкого спектра параметров кардинально улучшена оценка на h .

Библиография: 11 названий.

1. Введение и формулировка результата. В 1935 г. Эрдёш и Секереш сформулировали следующую проблему (см. [1], [2]).

ПРОБЛЕМА ЭРДЁША–СЕКЕРЕША. Для любого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$ такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $g(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника.

Напомним, что множество точек находится в *общем положении*, если никакие три его элемента не лежат на одной прямой.

Существование $g(n)$ доказано для произвольного n и найдены точные значения этой величины при $3 \leq n \leq 6$: $g(3) = 3$, $g(4) = 5$, $g(5) = 9$, $g(6) = 17$ (см. [3] и [4]). Для общего случая имеются следующие оценки сверху и снизу (см. [3] и [5]):

$$2^{n-2} + 1 \leq g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1.$$

Проблема Эрдёша–Секереша является классической в комбинаторной геометрии и теории Рамсея (см. [3], [6]–[8]). Она имеет многочисленные обобщения. Одно из них предложили Бялостоцкий, Диркер и Воксман в 1991 г. (см. [9]).

Одно из обобщений проблемы Эрдёша–Секереша. Для любых целых $n \geq 3$ и $q \geq 2$ найти минимальное положительное число $h(n, \text{mod } q)$ такое, что из любого множества точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n, \text{mod } q)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника C с условием

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383).

$|(C \setminus \partial C) \cap \mathcal{X}| \equiv 0 \pmod{q}$, т.е. этот n -угольник содержит внутри себя другие точки из $\mathcal{X}$ в количестве, делящемся на q .

Бялостоцкий, Диркер и Воксман доказали свою гипотезу (см. [9]) для случая $n \geq q + 2$, обосновав верхнюю оценку

$$h(n, \text{mod } q) \leq g(R_3(n', n', \dots, n')), \quad (1)$$

где n' – минимальное натуральное число, удовлетворяющее условиям $n' \geq n$ и $n' \equiv 2 \pmod{q}$. Здесь также $R_k(l_1, \dots, l_s)$ – число Рамсея для полных k -равномерных гиперграфов, ребра которых красятся в s цветов и у которых ищется хотя бы одна одноцветная l_i -клика с подходящим i (см. [7], [8]). В формуле (1) число Рамсея имеет q аргументов величины n' . Известны лишь астрономические оценки чисел Рамсея. В случае (1) речь идет о башне экспонент.

В 1996 г. Каро (см. [10]) получил более общий результат для точек на плоскости с приписанными им значениями из конечной абелевой группы и выпуклых многоугольников с нулевой суммой внутри. В применении к проблеме, которую мы сейчас обсуждаем, его теорема дает оценку

$$h(n, \text{mod } q) \leq 2^{c(q)n}. \quad (2)$$

Здесь $c(q)$ – некоторая функция, не зависящая от n , но растущая сверхэкспоненциально по q . Таким образом, и тут мы имеем дело с кратной экспонентой.

Разумеется, оценка (2) нуждается в уточнении. При этом можно действовать в двух направлениях. С одной стороны, хочется избавиться от сверхэкспоненциальных оценок хотя бы при каких-нибудь соотношениях между n и q . С другой стороны, кажется излишним ограничение $n \geq q + 2$, при котором $h(n, \text{mod } q)$ заведомо существует.

В рамках второго направления имеется лишь одно продвижение, полученное Карой, Пахом и Тотом в 2001 г. (см. [11]), которые показали, что $h(n, \text{mod } q) < \infty$ при $n \geq 5q/6 + O(1)$. Правда, их оценка еще хуже, чем (1). Заметим, что Вальтер анонсировал аналогичный результат с $n \geq 3q/4 + O(1)$, но этот результат не был опубликован.

В рамках первого направления никаких новых результатов не было получено вовсе. Каро высказывал гипотезу о том, что в действительности

$$h(n, \text{mod } q) \leq g(c(q) + n)$$

с некоторым $c(q)$. Нам удалось доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n \geq 2q - 1$, то имеет место неравенство*

$$h(n, \text{mod } q) \leq g(q(n - 4) + 4).$$

Эта теорема значительно уточняет оценку (2), поскольку

$$g(q(n - 4) + 4) \leq 2^{2qn + O(1)},$$

и мы, стало быть, избавляемся, наконец, от кратных экспонент в неравенствах. Правда, наше ограничение $n \geq 2q - 1$ чуть более сильное, нежели его предшественник.

Рис. 1. Доказательство теоремы 1

2. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая простая лемма.

ЛЕММА. Из любых q целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_q$, выписанных в ряд, можно выбрать подмножество (непустое) из идущих подряд чисел с суммой, делящейся на q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим суммы

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_q = a_1 + a_2 + \dots + a_q.$$

Если никакие две из них не сравнимы по модулю q , то все остатки от деления на q для этих сумм различны, а значит, найдется сумма с остатком, равным нулю, она и делится на q . Если же существуют такие i и j , $i < j$, что $S_i \equiv S_j \pmod{q}$, то, беря числа $a_{i+1}, \dots, a_j$, имеем

$$a_{i+1} + \dots + a_j = S_j - S_i \equiv 0 \pmod{q},$$

и снова все в порядке.

Заметим, что в лемме менее чем q числами обойтись не удастся, так как, например, для $a_1 = a_2 = \dots = a_{q-1} = 1$ нужного подмножества не существует.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нам необходимо убедиться в том, что любое множество точек на плоскости в общем положении мощности $g(q(n-4)+4)$ или более содержит нужный нам выпуклый n -угольник. Зафиксируем произвольное такое множество $\mathcal{X}$.

Заметим, что $\mathcal{X}$ содержит, по крайней мере, один выпуклый $(q(n-4)+4)$ -угольник, обозначим его $PQA_0A_1 \dots A_{q(n-4)+1}$. Проведем в нем диагонали PA_{n-4} , $PA_{2(n-4)}, \dots, PA_{(q-1)(n-4)}$. Они разделят его на q выпуклых многоугольников (см. рис. 1): $q-2$ из них будут $(n-2)$ -угольниками, и два из них — $(n-1)$ -угольниками (они расположены “по краям”).

Пусть a_1 – количество точек внутри $(n-1)$ -угольника $PQA_0 \dots A_{n-4}$, a_2 – количество точек внутри $(n-2)$ -угольника $PA_{n-4} \dots A_{2(n-4)}$, и так далее вплоть до a_q , которое соответствует $(n-1)$ -угольнику $PA_{(q-1)(n-4)} \dots A_{q(n-4)+1}$.

Согласно лемме среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_q$ найдется непустое подмножество, состоящее из подряд идущих чисел, сумма которых делится на q . Сначала рассмотрим случай, когда такое подмножество имеет ровно один элемент. Если $a_1 \equiv 0 \pmod{q}$ или $a_q \equiv 0 \pmod{q}$, то возникает $(n-1)$ -угольник, число точек внутри которого делится на q и который остается достроить до n -угольника.

Без ограничения общности будем считать, что речь идет об $(n-1)$ -угольнике $PQA_0 \dots A_{n-4}$. Рассмотрим треугольник $PA_{n-4}A_{n-3}$. Если он пустой, то искомым n -угольником есть $PQA_0 \dots A_{n-4}A_{n-3}$. Если же он содержит внутри некоторую точку X' , то переходим к рассмотрению треугольника $PA_{n-4}X'$. Если и он не пустой, то выбираем точку X'' внутри него и переходим к рассмотрению треугольника $PA_{n-4}X''$. Действуем так, пока не дойдем до пустого треугольника $PA_{n-4}X$. Тогда n -угольник $PQA_0 \dots A_{n-4}X$ искомым, ведь количество точек внутри него совпадает с количеством точек внутри $(n-1)$ -угольника $PQA_0 \dots A_{n-4}$, а оно делится на q .

Пусть, далее, $a_j \equiv 0 \pmod{q}$, где $j \neq 1$ и $j \neq q$. Здесь имеем $(n-2)$ -угольник

$$PA_{(j-1)(n-4)} \dots A_{j(n-4)},$$

количество точек внутри которого делится на q . Остается лишь достроить его до нужного n -угольника $PXA_{(j-1)(n-4)} \dots A_{j(n-4)}Y$, где треугольники $PXA_{(j-1)(n-4)}$ и $PA_{j(n-4)}Y$ пустые. Это делается с помощью нехитрой технологии, которую мы уже один раз использовали.

Теперь рассмотрим случай, когда подмножество, найденное применением леммы, содержит более одного элемента. В этом случае, объединяя соответствующие многоугольники, получаем некоторый k -угольник ($k > n$), количество точек внутри которого делится на q . Покажем, что из этого k -угольника всегда удастся выделить нужный нам выпуклый n -угольник с числом точек внутри, делящимся на q . С этой целью убедимся в том, что, каково бы ни было $k > n$, от произвольного выпуклого k -угольника $B_1B_2 \dots B_k$, обладающего известным свойством делимости, всегда можно перейти к выпуклому $(k-1)$ -угольнику, для которого выполнено то же самое свойство.

Заметим, что по условию теоремы $n \geq 2q - 1$, т.е. у нас сейчас $k \geq 2q$. Значит, мы можем рассмотреть треугольники

$$B_1B_2B_3, \quad B_3B_4B_5, \quad \dots, \quad B_{2q-1}B_{2q}B_{2q+1}$$

(см. рис. 2). Все они, очевидно, не пересекаются, хотя при $k = 2q$ имеем, конечно, $B_{2q+1} = B_1$. Обозначим через $b_1, b_2, \dots, b_q$ количества точек внутри этих треугольников соответственно. Снова применяя лемму, находим среди указанных чисел непустое подмножество с суммой, делящейся на q . Если это подмножество одноэлементное, то следует просто “срезать” отвечающий ему треугольник (количество вершин уменьшится на единицу, а свойство делимости сохранится, что и требовалось). Если в этом подмноестве более одного элемента, то без ограничения общности можно считать, что речь идет о подмноестве $b_{k'}, \dots, b_{k''}$. В таком случае следует “срезать” ровно один из треугольников – скажем, $B_{2k'-1}B_{2k'}B_{2k'+1}$, – а внутри

Рис. 2. Уменьшение числа сторон

остальных треугольников, пользуясь уже стандартной для нас технологией, найти такие точки $B'_{2(k'+1)}, \dots, B'_{2k''}$, что треугольники

$$B_{2(k'+1)-1}B'_{2(k'+1)}B_{2(k'+1)+1}, \quad \dots, \quad B_{2k''-1}B'_{2k''}B_{2k''+1}$$

пустые. В итоге $(k-1)$ -угольник

$$B_1 \dots B_{2k'-1}B_{2k'+1}B'_{2(k'+1)}B_{2(k'+1)+1} \dots B_{2k''-1}B'_{2k''}B_{2k''+1} \dots B_k$$

и есть искомый (ср. рис. 2).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что если бы мы изначально делили многоугольник на какие-нибудь другие части – скажем, на треугольники, – то это не позволило бы улучшить результат, поскольку в таком случае в лемме нужно было бы выбрать подмножество из подряд идущих элементов мощности не менее $n-2$. Этому случаю соответствует модификация леммы, по сути являющаяся ее следствием.

ЛЕММА'. Из любых qt целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{qt}$, выписанных в ряд, можно выбрать подмножество мощности t или более из идущих подряд чисел с суммой, делящейся на q .

В лемме' qt нельзя заменить меньшим числом. Контрпример для $qt-1$ дается набором $a_q = a_{2q} = \dots = a_{(m-1)q} = 1$, остальные числа равны нулю.

3. Некоторые улучшения оценки (1). В этом пункте мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если $n \geq q+2$, то для четных и нечетных q соответственно имеют место неравенства (ср. оценку (1))

$$h(n, \text{mod } q) \leq R_3(\underbrace{n, n, \dots, n}_q), \quad h(n, \text{mod } q) \leq R_3(g(n), \underbrace{n, \dots, n}_{q-1}).$$

Разумеется, при $n \geq 2q - 1$ результат теоремы 1 гораздо сильнее результата теоремы 2. Однако здесь речь идет скорее о совершенствовании техники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала рассмотрим случай $n \equiv 2 \pmod{q}$. Допустим, в рамках этого случая мы показали, что в произвольном множестве точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящемся в общем положении и имеющем надлежащую мощность, найдется n точек, которые являются вершинами выпуклого n -угольника и таковы, что все треугольники, строящиеся на них, содержат внутри себя одинаковое число точек из $\mathcal{X}$ по модулю q . Тогда проведем все диагонали из некоторой вершины найденного выпуклого n -угольника. Они разделят его на $n - 2$ треугольника, внутри каждого из которых количество точек равно i по модулю q . Поскольку $n - 2 \equiv 0 \pmod{q}$ и количество точек x внутри n -угольника есть сумма соответствующих количеств для треугольников, $x = i(n - 2) \equiv 0 \pmod{q}$, и все в порядке.

Итак, докажем наше допущение. Для начала рассмотрим ситуацию, когда q – четное и, стало быть,

$$|\mathcal{X}| = R_3(n, \dots, n).$$

Красим все тройки точек из $\mathcal{X}$ в q цветов. А именно используем цвет с номером $i \in \{0, \dots, q - 1\}$, если треугольник, образованный данными тремя точками, содержит внутри себя точки из множества $\mathcal{X}$ в количестве, сравнимом с i по модулю q . По теореме Рамсея (см. [6]–[8]) найдутся n точек, среди которых любая тройка покрашена в один и тот же цвет i . Покажем, что эти n точек находятся в выпуклом положении, т.е. образуют нужный нам n -угольник. Предположим противное. Тогда найдется точка Z , которая не принадлежит границе выпуклой оболочки множества наших точек. Зафиксируем какие-то три точки A, B и C , попавшие на границу выпуклой оболочки и обладающие тем свойством, что треугольник ABC содержит внутри себя найденную точку Z . По доказанному количества точек внутри треугольников AZB, BZC и CZA сравнимы с i по модулю q . Отсюда следует, что количество точек внутри треугольника ABC сравнимо с $3i + 1$ и не может быть сравнимо с i ввиду четности q . Противоречие с предположением невыпуклости.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда q – нечетное и, стало быть,

$$|\mathcal{X}| = R_3(g(n), \dots, n).$$

Доказательство здесь по сути повторяет доказательство для предыдущей ситуации, с той разницей, что если мы выбираем подмножество с одноцветными треугольниками для цвета $i = (q - 1)/2$, то оно должно иметь мощность $g(n)$ (дабы мы могли выбрать из него n точек в выпуклом положении). Отличие связано с тем, что только для указанного значения i не проходит рассуждение о том, что $3i + 1$ не может быть сравнимо с i . Для остальных $q - 1$ цветов ничего не меняется, и найденные n точек будут всегда оказываться в выпуклом положении.

Перейдем к случаю произвольного $n \geq q + 2$. В рамках этого случая снова верно то, что в любом множестве точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящемся в общем положении и имеющем надлежащую мощность, найдется n точек, которые являются вершинами выпуклого n -угольника и таковы, что все треугольники, строящиеся на них, содержат внутри себя одинаковое число i точек из $\mathcal{X}$ по модулю q . Скажем для удобства и краткости, что упомянутый n -угольник *обладает свойством T* . На сей

раз отсутствие условия $n \equiv 2 \pmod{q}$ не позволяет нам, как это было раньше, вывести из свойства T свойство делимости на q числа точек внутри соответствующего многоугольника $A_1 A_2 \dots A_n$. Разве что $i = 0$ (тогда прежнее рассуждение сохраняет силу). При $i \neq 0$ придется слегка над многоугольником $A_1 A_2 \dots A_n$ поработать.

Итак, пусть n' – максимальное целое число такое, что

$$n' \leq n \quad \text{и} \quad n' \equiv 2 \pmod{q}.$$

Тогда для $n_0 = n - n'$ выполнено неравенство $0 \leq n_0 \leq q - 1$. Рассмотрим n' -угольник

$$A_1 A_3 A_5 \dots A_{2n_0-1} A_{2n_0+1} A_{2n_0+2} A_{2n_0+3} \dots A_n.$$

Ясно, что и для него выполнено свойство T . Значит, количество точек внутри него делится на q , ведь $n' \equiv 2 \pmod{q}$. Поскольку $i \neq 0$, внутри треугольников $A_1 A_2 A_3$, $A_3 A_4 A_5, \dots, A_{2n_0-1} A_{2n_0} A_{2n_0+1}$ есть другие точки из нашего множества. Пусть, например, $P_2^{(1)}$ лежит в треугольнике $A_1 A_2 A_3$. Возьмем треугольник $A_1 P_2^{(1)} A_3$. Если он не пустой, то он содержит некоторую точку $P_2^{(2)}$, и мы перейдем к рассмотрению треугольника $A_1 P_2^{(2)} A_3$. Действуем так, пока некоторый треугольник $A_1 P_2^{(j)} A_3$ не окажется пустым. Обозначим точку $P_2^{(j)}$ через A'_2 . Аналогичным образом найдем точки $A'_4, \dots, A'_{2n_0}$. Получим выпуклый n -угольник

$$A_1 A'_2 A'_3 A'_4 A_5 \dots A_{2n_0-1} A'_{2n_0} A_{2n_0+1} A_{2n_0+2} A_{2n_0+3} \dots A_n.$$

Количество точек внутри него равно количеству точек внутри ранее найденного n' -угольника, т.е. оно тоже делится на q , а стало быть, этот n -угольник искомым.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство по сути совпадает с оригинальным доказательством оценки (1), с той лишь разницей, что в [9] с самого начала из исходного множества выбирались $R_3(n', n', \dots, n')$ точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника, а потом уже на этих точках строился нужный n -угольник (здесь n' такое же, как в (1), а не как в нашем доказательстве).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2**, (1935), 463–470.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, “On some extremum problems in elementary geometry”, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, **3–4**, (1961), 53–62.
- [3] W. Morris, V. Soltan, “The Erdős–Szekeres problem on points in convex position – a survey”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **37**:4, (2000), 437–458.
- [4] G. Szekeres, L. Peters, “Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem”, *ANZIAM J.*, **48**:2, (2006), 151–164.
- [5] G. Tóth, P. Valtr, “The Erdős–Szekeres theorem: upper bounds and related results”, *Combinatorial and Computational Geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 557–568.
- [6] F. P. Ramsey, “On a problem of formal logic”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **30**, (1929), 264–286.
- [7] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, NY, 1990.

- [8] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [9] A. Bialostocki, P. Dierker, B. Voxman, “Some notes on the Erdős–Szekeres theorem”, *Discrete Math.*, **91**:3, (1991), 231–238.
- [10] Y. Caro, “On the generalized Erdős–Szekeres conjecture – a new upper bound”, *Discrete Math.*, **160**:1–3, (1996), 229–233.
- [11] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, “A modular version of the Erdős–Szekeres theorem”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **38**, (2001), 245–259.

В. А. Кошелев

Математический институт им. В. А. Стеклова

Поступило

30.01.2009

Исправленный вариант

17.06.2009