Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, Теоремы сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 630–631

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:00:08

Теоремы сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств

А. А. Коньков

Пусть Ω – непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для всякого вещественного числа $r \geq 0$ обозначим

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}, \quad Q_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}, \quad S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\operatorname{div} A(x, Dv) \geq F(x, v, Dv) \quad \text{в } \Omega \cap B_{R_1} \setminus Q_{R_0}, \quad (1)$$

где $0 \leq R_0 < R_1 < \infty$, а $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ – оператор градиента. Будем предполагать, что $A: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $F: \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$C_1 |\xi|^p \leq \xi A(x, \xi), \quad |A(x, \xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $p > 1$ – некоторые константы;

$$F(x, t, \xi) \geq \sup_{r \in (|x|/\sigma, \sigma|x|) \cap (R_0, R_1)} f(r, t) - |\xi|^{p-1} \inf_{r \in (|x|/\sigma, \sigma|x|) \cap (R_0, R_1)} b(r)$$

для почти всех $x \in \Omega \setminus Q_{R_0}$ и всех $t \in (0, \infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\sigma > 1$ – некоторое вещественное число, а $f: [R_0, R_1) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $b: [R_0, R_1) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции, причем

$$\begin{aligned} f(r, t - 0) &= f(r, t) && \text{для всех } R_0 < r < R_1, \quad t > 0, \\ f(r, t_1) &\geq f(r, t_2) && \text{для всех } R_0 < r < R_1, \quad t_1 \geq t_2 > 0. \end{aligned}$$

Говорим, что $v \geq 0$ является решением (1), если

$$\begin{aligned} v &\in W_p^1(\Omega \cap B_r \setminus Q_{R_0}) \cap L_\infty(\Omega \cap B_r \setminus Q_{R_0}), \\ A(x, Dv) &\in L_{p/(p-1)}(\Omega \cap B_r \setminus Q_{R_0}), \quad F(x, v, Dv) \in L_{p/(p-1)}(\Omega \cap B_r \setminus Q_{R_0}) \end{aligned}$$

для любого вещественного числа $r \in (R_0, R_1)$, и при этом

$$-\int_{\Omega \cap B_{R_1} \setminus Q_{R_0}} A(x, Dv) D\varphi \, dx \geq \int_{\Omega \cap B_{R_1} \setminus Q_{R_0}} F(x, v, Dv) \varphi \, dx$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap B_{R_1} \setminus Q_{R_0})$. Пишем также

$$v|_{\partial\Omega \cap B_{R_1} \setminus Q_{R_0}} = 0, \quad (2)$$

если $\eta v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ для любой функции $\eta \in C_0^\infty(B_{R_1} \setminus Q_{R_0})$.

Будем считать, что $\Omega \cap S_r \neq \emptyset$ для всех $r \in (R_0, R_1)$. Для каждого решения задачи (1), (2) положим

$$M(r; v) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap S_r} v, \quad r \in (R_0, R_1),$$

где ограничение функции v на множество $\Omega \cap S_r$ понимается в смысле следа, а $\operatorname{ess\,sup}$ в правой части берется по мере Лебега на сфере размерности $n - 1$.

Вопросы, рассматриваемые в этом сообщении, исследовались рядом авторов [1]–[3]. Приведенные ниже утверждения обобщают результаты работы [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00819).

ТЕОРЕМА 1. Пусть v – неотрицательное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$0 < M(R_0 + 0; v), \quad (3)$$

$$M(r_1; v) \leq M(r_2; v) \quad \text{для всех } R_0 < r_1 \leq r_2 < R_1. \quad (4)$$

Тогда для любых вещественных чисел $a > p - 2$ и $k > 0$ найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от n, p, a, k, σ, C_1 и C_2 , такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) + kb(r) \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} &= \alpha f(r, \beta m), \\ m(R_0) &= M(R_0 + 0; v), \quad m'(R_0) = 0, \end{aligned}$$

для которого при всех $r \in (R_0, R_1)$ справедлива оценка $M(r; v) \geq m(r) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть v – неотрицательное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям (3) и (4). Тогда для любых вещественных чисел $a > p - 2$ и $k > 0$ найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от n, p, a, k, σ, C_1 и C_2 , такие, что

$$M(r; v) - M(R_0 + 0; v) \geq \int_{R_0}^r dt \left(\frac{\alpha}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} e^{-k \int_{\xi}^t b(\zeta) d\zeta} f(\xi, \beta M(\xi; v)) d\xi \right)^{1/(p-1)}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, *Матем. сб.*, **135**:3, (1988), 346–360. [2] А. А. Кон'ков, *J. Math. Anal. Appl.*, **325**:2, (2007), 1013–1041. [3] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234**, Наука, М., 2001, 1–383.

А. А. Коньков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Поступило

25.06.2009