Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Мамедов, О краевой задаче для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:27:33

О краевой задаче для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка

А. М. Мамедов

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$\frac{d^3 u(t)}{dt^3} - \rho(t)A^3 u(t) + \sum_{j=0}^2 A_{3-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \quad (2)$$

где $f(t)$, $u(t)$ – векторнозначные функции со значениями в H , $\varphi_0, \varphi_1 \in H$, производные $d^j u/dt^j \equiv u^{(j)}$ понимаются в смысле теории распределений [1], а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- 1) A – нормальный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} , спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon\}$, $0 \leq \varepsilon < \pi/6$;
- 2) операторы $B_j = A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3$, ограничены в H ;
- 3) $\rho(t) = \alpha^3$ при $t \in (0, 1)$ и $\rho(t) = \beta^3$ при $t \in (1, \infty)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, при $\alpha \neq \beta$.

Как известно, при условии 1) оператор A имеет полную ортонормированную систему в H :

$$\{e_k\}_{k=1}^\infty, \quad Ae_k = \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad r_k > 0, \quad |\varphi_k| \leq \varepsilon.$$

Тогда оператор A представляется в виде $A = UC$, где C – положительно-определенный самосопряженный оператор, а U – унитарный оператор:

$$C \cdot = \sum_{k=1}^\infty r_k(\cdot, e_k)e_k, \quad U \cdot = e^{i\varphi_k}(\cdot, e_k)e_k.$$

Обозначим через

$$H_\gamma = D(C^\gamma), \quad \gamma \geq 0,$$

гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y)$, а через $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ – гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$ со значениями в H , причем

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, обозначим

$$W_2^3(\mathbb{R}_+; H) = \left\{ u : \frac{d^3 u}{dt^3}, C^3 u \in L_2(\mathbb{R}_+; H), \right. \\ \left. \|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} = (\|u'''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \|C^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2} \right\}.$$

Под $\Gamma_0(u) = u(0)$, $\Gamma_1(u) = u'(0)$ будем понимать операторы взятия следов и

$$W_{2,\Gamma}^3(\mathbb{R}_+; H) = \{u : u \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H), \Gamma_0(u) = \Gamma_1(u) = 0\}.$$

Из теоремы о следах следует, что $W_{2,\Gamma}^3(\mathbb{R}_+; H)$ – полное гильбертово подпространство пространства $W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ [1].

Аналогично определяются пространства $L_2((a, b); H)$, $W_2^m((a, b); H)$ при $m \geq 1$ и $-\infty \leq a < b \leq \infty$ [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если при $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ вектор-функция $u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, то будем ее называть *регулярным решением* этого уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и $\varphi_\nu \in H_{3-\nu-1/2}$, $\nu = 0, 1$, существует регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u^{(\nu)}(t) - \varphi_\nu\|_{3-\nu-1/2} = 0, \quad \nu = 0, 1,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const}(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \|\varphi_0\|_{5/2} + \|\varphi_1\|_{3/2}),$$

то будем говорить, что краевая задача (1), (2) *регулярно разрешима*.

В данной работе приведены достаточные условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2). Отметим, что такие условия для различных краевых задач в случае $\alpha = \beta = 1$ и $\varepsilon = 0$ (A – самосопряженный оператор) получены в работах [2], [3], при $\alpha \neq \beta$, $\varepsilon = 0$, $\varphi_\nu = 0$, $\nu = 0, 1$, – в работах [4], [5]. Фредгольмовость подобных задач в общем виде при $\alpha = \beta = 1$ изучена в [6]. Исследование краевой задачи (1), (2) целесообразно и в силу того, что ряд неклассических задач математической физики [7], рассматриваемых в неоднородных средах, могут быть приведены к частным случаям задачи (1), (2). Кроме того, мы исследуем некоторые свойства однородного уравнения

$$\frac{d^3 u(t)}{dt^3} - \rho(t)A^3 u(t) + \sum_{j=0}^2 A_{3-j} u^{(j)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а именно, внутреннюю компактность [6], [8] пространства регулярных решений этого уравнения.

1. Обозначим

$$\begin{aligned} P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u &= u''' - \rho(t)A^3 u, & P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u &= \sum_{j=0}^2 A_{3-j} u^{(j)}, \\ P\left(\frac{d}{dt}\right)u &= P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u + P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u, \end{aligned}$$

$u \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда задача

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u = u''' - \rho(t)A^3 u = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0,$$

имеет только нулевое решение из пространства $W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$.

Принимая во внимание лемму 1, получаем следующие утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть выполняется условие 1). Тогда краевая задача

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u = 0, \quad u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \quad \varphi_\nu \in H_{3-\nu-1/2}, \quad \nu = 0, 1, \quad (3)$$

имеет единственное регулярное решение.

ЛЕММА 3. Пусть выполняется условие 1). Тогда задача

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = f(t), \quad u(0) = u'(0) = 0,$$

регулярно разрешима.

Отметим, что из леммы 2 следует, что при выполнении условий 1) и 2) задачу (1), (2) заменой можно привести к задаче

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\omega(t) = g(t), \quad \omega(0) = \omega'(0) = 0, \quad (4)$$

где $\omega(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$, $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$. Действительно, после замены $\omega(t) = u(t) - u_0(t)$, где $u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$, а $u_0(t)$ есть регулярное решение задачи (3), мы получаем задачу (4) (здесь $g(t) = f(t) - P_1(d/dt)u_0(t)$).

Применяя теорему о промежуточных производных [1] и лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \left\| P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} &\leq \sum_{j=0}^2 \|A_{3-j}A^{-(3-j)}\| \|A^{3-j}u_0^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \text{const} \|u_0\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} (\|\varphi_0\|_{5/2} + \|\varphi_1\|_{3/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} (\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \|\varphi_0\|_{5/2} + \|\varphi_1\|_{3/2}).$$

Теперь можем сформулировать основную теорему о регулярной разрешимости задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1) – 3) и имеет место неравенство

$$\alpha(\varepsilon) = \sum_{j=0}^2 C_j(\varepsilon) \|B_{3-j}\| < 1, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_0(\varepsilon) &= \frac{1}{\cos^2 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{\min(\alpha^3; \beta^3)}, \quad C_1(\varepsilon) = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} (1 - \sin 3\varepsilon)^{-1/2} \cdot \frac{\min(\alpha^{1/2}; \beta^{1/2})}{\max(\alpha^{5/2}; \beta^{5/2})}, \\ C_2(\varepsilon) &= \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} (1 - \sin 3\varepsilon)^{-1/2} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^2; \beta^2)}, \end{aligned}$$

тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Отметим, что в теореме 1 числа C_j , $j = 0, 1, 2$, являются точными оценками норм операторов промежуточных производных через норму, порожденную главной частью уравнения (1), в пространстве $W_{2,\Gamma}^3(\mathbb{R}_+; H)$. Кроме того, заметим, что условие (5) является существенным, т.е. при невыполнении этого условия задача (1), (2) не регулярно разрешима.

2. Теперь исследуем внутреннюю компактность регулярных решений уравнения $P(d/dt)u = 0$. Из теоремы 1 следует, что задача

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0, \quad u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \quad \varphi_\nu \in H_{3-\nu-1/2}, \quad \nu = 0, 1,$$

имеет единственное регулярное решение.

Пространство регулярных решений уравнения $P(d/dt)u = 0$ обозначим $\text{Ker } P(\mathbb{R}_+; H)$. При выполнении условий 1) и 2) оператор $P(d/dt)$ является ограниченным оператором из $W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$, и поэтому как ядро этого оператора $\text{Ker } P(\mathbb{R}_+; H)$ – замкнутое подпространство пространства $W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$. Пополним пространство $\text{Ker } P(\mathbb{R}_+; H)$ с нормой $\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)}$, которая слабее, чем норма $\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)}$. Полученное пространство обозначим через $L(\mathbb{R}_+; H)$. Очевидно, что $L(\mathbb{R}_+; H) \subset W_2^3(\mathbb{R}_+; H) \subset W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$. Следуя работе [8] Лакса, введем понятие внутренней компактности пространства $\text{Ker } P(\mathbb{R}_+; H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть a_1, b_1, a и b – любые действительные числа такие, что $0 < a < a_1 < b_1 < b < \infty$, и M – любое положительное число. Если множество

$$Q_M = \{u : u \in L(\mathbb{R}_+; H), \|u\|_{W_2^2((a,b);H)} \leq M\}$$

компактно по норме $\|u\|_{W_2^2((a_1,b_1);H)}$, то будем говорить, что пространство регулярных решений уравнения $P(d/dt)u = 0$ *внутренне компактно*.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда $\text{Ker } P(\mathbb{R}_+; H)$ *внутренне компактно*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. 1, Мир, М., 1971. [2] С. С. Мирзоев, *Докл. АН СССР*, **273**:2, (1983), 292–295. [3] С. С. Мирзоев, *Функци. анализ и его прил.*, **17**:2, (1983), 84–85. [4] А. Р. Алиев, *Докл. РАН*, **421**:2, (2008), 151–153. [5] А. Р. Алиев, *Тр. Ин-та матем. и мех. АН Азербайджана*, **7**, (1997), 18–25. [6] А. А. Шкаликов, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14**, Изд-во МГУ, М., 1989, 140–224. [7] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981. [8] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:3, (1957), 361–389.

А. М. Мамедов

Нахичеванский государственный университет, Азербайджан

E-mail: ebulfiez-mammadov@rambler.ru

Поступило

20.10.2009