Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 914–928

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:59:14

Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона

Ю. А. Фарков

В пространствах комплексных периодических последовательностей с помощью преобразования Виленкина–Крестенсона построены новые ортогональные вейвлетные базисы, определяемые по конечным наборам параметров. Ранее подобные базисы были определены для групп Кантора и Виленкина на основе обобщенных функций Уолша. Отмечается, что аналогичные конструкции могут быть реализованы для биортогональных вейвлетов, а также для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Библиография: 11 названий.

1. Формулировки теорем и примеры. Преобразование Виленкина–Крестенсона является дискретным мультипликативным преобразованием и имеет ряд преимуществ по сравнению с дискретным преобразованием Фурье в задачах кодирования информации и некоторых других областях; последние результаты в этом направлении и подробные библиографические сведения приведены в книге [1]. В статье [2] на основе преобразования Виленкина–Крестенсона построены вейвлетные базисы типа Хаара и соответствующие им вейвлет-пакеты, связанные с прореживанием по времени и прореживанием по частоте дискретных периодических сигналов.

В настоящей работе для пространств комплексных периодических последовательностей с помощью преобразования Виленкина–Крестенсона вводятся аналоги ортогональных вейвлетов, изучавшихся для групп Кантора и Виленкина в [3]–[5], и указываются алгоритмы для их построения. Аналогичные конструкции могут быть реализованы для биортогональных вейвлетов, а также для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел (см. замечания 1 и 2).

Пусть $N = p^n$ и $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, где n и p – натуральные числа, причем $p \geq 2$. Пространство $\mathbb{C}_N$ состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

таких, что $x(j + N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Произвольная последовательность x из $\mathbb{C}_N$ задана, если указаны значения $x(j)$ для $j \in \mathbb{Z}_N$, поэтому иногда элемент x отождествляют с вектором $(x(0), x(1), \dots, x(N - 1))$. Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}_N$ вводятся по формулам $\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}$, $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Обозначим через $\langle k \rangle_p$ остаток от деления целого числа k на число p и через $[a]$ – целую часть числа a . Для любого $a \in \mathbb{R}_+$ цифры p -ичного

разложения

$$a = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} p^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} p^{-\nu} \quad (1)$$

находятся по формулам $a_{-\nu} = \langle [p^{1-\nu}a] \rangle_p$, $a_{\nu} = \langle [p^{\nu}a] \rangle_p$ (для p -ично рационального a получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Легко видеть, что для каждого $a \in \mathbb{R}_+$ существует натуральное число μ такое, что $a_{-\nu} = 0$ для всех $\nu > \mu$, а также что первая сумма в (1) равна $[a]$. Операция поразрядного сложения по модулю p на множестве $\mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$a \oplus_p b := \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle a_{-\nu} + b_{-\nu} \rangle_p p^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle a_{\nu} + b_{\nu} \rangle_p p^{-\nu}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+,$$

где a_{ν}, b_{ν} берутся из разложений вида (1). Как обычно, равенство $c = a \ominus_p b$ означает, что $c \oplus_p b = a$.

Для произвольного $j \in \mathbb{Z}_N$ обозначим через j^* неотрицательное целое число, определяемое условием $j \oplus_p j^* = 0$. При $p = 2$ имеем $j^* = j$, а при $p > 2$ число j^* является p -ично противоположным к j . Для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ обозначим через $\tilde{x}$ вектор из $\mathbb{C}_N$ такой, что $\tilde{x}(j) = \overline{x(j^*)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}_N$. Далее, для $k, j \in \mathbb{Z}_N$ положим $\{k, j\}_p := \sum_{\nu=1}^n k_{n-\nu-1} j_{-\nu}$, где

$$k = \sum_{\nu=1}^n k_{-\nu} p^{\nu-1}, \quad j = \sum_{\nu=1}^n j_{-\nu} p^{\nu-1}, \quad k_{-\nu}, j_{-\nu} \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. Функции Виленкина–Крестенсона $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\mathbb{C}_N$ определяются равенствами $w_k^{(N)}(j) = \varepsilon_p^{\{k, j\}_p}$ и $w_k^{(N)}(l) = w_k^{(N)}(l + N)$, где $k, j \in \mathbb{Z}_N, l \in \mathbb{Z}$. При $n \geq 2$ и $p = 2$ функции Виленкина–Крестенсона совпадают с функциями Уолша, а в случае $n = 1$ и $p \geq 2$ они являются экспоненциальными функциями:

$$w_k^{(p)}(j) = \varepsilon_p^{kj}, \quad k, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Функции $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, причем

$$\|w_k^{(N)}\|^2 = N \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_N.$$

Преобразование Виленкина–Крестенсона сопоставляет произвольному вектору x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\hat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$:

$$\hat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{w_k^{(N)}(j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$ определим p -свертку $x * y$ по формуле

$$(x * y)(k) := \sum_{j=0}^{N-1} x(k \ominus_p j) y(j), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Едини́чным N -периодическим импульсом называется вектор δ_N из $\mathbb{C}_N$, определяемый равенством

$$\delta_N(j) := \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases}$$

Система сдвигов $\{\delta_N(\cdot \ominus_p k) \mid k \in \mathbb{Z}_N\}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$ и

$$x(j) = (x * \delta_N)(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta_N(j \ominus_p k), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

для всех $x \in \mathbb{C}_N$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p -ичного сдвига $T_k: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus_p k), \quad x \in \mathbb{C}_N, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Из определений следует, что для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$ имеют место равенства

$$\langle x, y \rangle = N \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle, \quad \widehat{x * y} = N \widehat{x} \widehat{y}, \quad (\widehat{T_k x})(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)} \widehat{x}(l), \quad (\widehat{x})(k) = \overline{\widehat{x}(k)}, \quad (2)$$

$$\langle y, T_k x \rangle = y * \widetilde{x}(k), \quad \langle T_k x, T_l y \rangle = \langle x, T_{l \ominus_p k} y \rangle, \quad k, l \in \mathbb{Z}_N. \quad (3)$$

Для $\nu = 0, 1, \dots, n$ положим $N_\nu = N/p^\nu$, $\Delta_\nu = p^{\nu-1}$. Операторы $D: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_{N_1}$ и $U: \mathbb{C}_{N_1} \rightarrow \mathbb{C}_N$, определенные по формулам

$$(Dx)(j) := x(pj), \quad j = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

и

$$(Uy)(j) := \begin{cases} y\left(\frac{j}{p}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_1}$, называются оператором сгущающей выборки и оператором разрежающей выборки соответственно. Отметим, что $D(Uy) = y$ для всех $y \in \mathbb{C}_{N_1}$. Далее, пусть $D^1 = D$, $U^1 = U$ и для $\nu = 2, \dots, n$ определим операторы $D^\nu: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_{N_\nu}$, $U^\nu: \mathbb{C}_{N_\nu} \rightarrow \mathbb{C}_N$ по формулам

$$(D^\nu x)(j) := x(p^\nu j), \quad (U^\nu y)(j) := \begin{cases} y\left(\frac{j}{p^\nu}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p^\nu, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p^\nu, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$. Для любого $y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$ имеет место равенство $\widehat{U^\nu y}(l) = p^{-\nu} \widehat{y}(l)$, $l \in \mathbb{Z}_N$, где в левой части преобразование Виленкина–Крестенсона берется в $\mathbb{C}_N$, а в правой части – в $\mathbb{C}_{N_\nu}$. Кроме того,

$$U^\nu(x * y) = U^\nu(x) * U^\nu(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{C}_{N_\nu}. \quad (4)$$

Следуя подходу, изложенному в [6; глава 3], дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_N$. Если система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) = \{T_{p \cdot k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p \cdot k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{p \cdot k} u_{p-1}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$, то $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ называется *вейвлет-базисом первого этапа* в $\mathbb{C}_N$, порожденным набором векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.

Следующая теорема характеризует все наборы векторов, порождающие вейвлет-базисы первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

ТЕОРЕМА 1. *Набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда матрица*

$$\frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \dots & \hat{u}_{p-1}(l) \\ \hat{u}_0(l + N_1) & \hat{u}_1(l + N_1) & \dots & \hat{u}_{p-1}(l + N_1) \\ \hat{u}_0(l + 2N_1) & \hat{u}_1(l + 2N_1) & \dots & \hat{u}_{p-1}(l + 2N_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{u}_0(l + (p-1)N_1) & \hat{u}_1(l + (p-1)N_1) & \dots & \hat{u}_{p-1}(l + (p-1)N_1) \end{pmatrix} \quad (5)$$

унитарна для $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

Для каждого $1 \leq m \leq n$ определим следующую процедуру построения вейвлет-базиса первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Шаг 1. Выбрать комплексные числа b_l , $0 \leq l \leq p^m - 1$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{p-1} |b_{l+kp^{m-1}}|^2 = 1, \quad l = 0, 1, \dots, p^{m-1} - 1. \quad (6)$$

Шаг 2. Вычислить $a_0, \dots, a_{p^m-1}$ по формулам

$$a_j = p^{-m+1/2} \sum_{l=0}^{p^m-1} b_l \overline{w_l^{(p^m)}(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, p^m - 1.$$

Шаг 3. Определить вектор $u_0 \in \mathbb{C}_N$, для которого

$$u_0(j) = \begin{cases} a_j & \text{для } 0 \leq j \leq p^m - 1, \\ 0 & \text{для } p^m \leq j \leq p^n - 1. \end{cases} \quad (7)$$

Шаг 4. Найти векторы $u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_N$ такие, что для всех $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ матрица (5) унитарна.

С помощью теоремы 1 проверяется, что полученный набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Шаг 4 этой процедуры в случае $p = 2$ осуществляется по формуле

$$u_1(j) = (-1)^j \overline{u_0(1 \oplus_2 j)}, \quad j \in \mathbb{Z}_N, \quad (8)$$

а алгоритмы реализации этого шага при $p > 2$ приведены в [7; § 2.6]. Один из этих алгоритмов основан на преобразовании Хаусхолдера и может быть задан формулами

$$\hat{u}_k(l) = \overline{\hat{u}_0(l + kN_1)} \frac{1 - \hat{u}_0(l)}{1 - \hat{u}_0(l)}, \quad \hat{u}_k(l + jN_1) = \delta_{kj} - \frac{\hat{u}_0(l + jN_1) \overline{\hat{u}_0(l + kN_1)}}{1 - \hat{u}_0(l)}, \quad (9)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, $k, j = 1, 2, \dots, p - 1$ и $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

ПРИМЕР 1. Пусть $N > p$. Возьмем $m = 1$ и $b_0 = 1$, $b_1 = \dots = b_{p-1} = 0$. Тогда система $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ порождается векторами

$$u_\mu = p^{-1/2}(1, \varepsilon_p^\mu, \varepsilon_p^{2\mu}, \dots, \varepsilon_p^{(p-1)\mu}, 0, 0, \dots, 0), \quad \mu = 0, 1, \dots, p-1.$$

В частности, при $p = 2$ имеем базис Хаара первого этапа в $\mathbb{C}_N$:

$$u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right), \quad u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right).$$

Следующий пример получен модификацией ортогональных вейвлетов, построенных для группы Кантора в [3], и соответствует случаю $m = p = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = a$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$ в приведенной выше процедуре.

ПРИМЕР 2. Пусть a и b – комплексные числа такие, что $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Предположим, что $p = 2$, $N \geq 4$, и векторы $u_0, u_1 \in \mathbb{C}_N$ заданы равенствами

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, & u_0(1) &= \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, & u_0(2) &= \frac{1-a-b}{2\sqrt{2}}, & u_0(3) &= \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}}, \\ u_1(0) &= \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, & u_1(1) &= -\frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, & u_1(2) &= \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}}, & u_1(3) &= -\frac{1-a-b}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

при условии, что $u_0(j) = u_1(j) = 0$ для $4 \leq j \leq N-1$. Тогда векторы u_0, u_1 порождают вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Отметим, что при $a = 1$, $b = 0$ полученный вейвлет-базис $B(u_0, u_1)$ совпадает с вейвлет-базисом Хаара первого этапа из примера 1.

Следующие два примера аналогичны соответственно примерам 3 и 4 в [4].

ПРИМЕР 3. Пусть $p = 2$, $n > 3$, $m = 3$. Положим

$$(b_0, b_1, \dots, b_7) = \frac{1}{2}(1, a, b, c, 0, \alpha, \beta, \gamma),$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда в соответствии с (7) имеем

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+a+b+c+\alpha+\beta+\gamma), & u_0(1) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+a+b+c-\alpha-\beta-\gamma), \\ u_0(2) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+a-b-c+\alpha-\beta-\gamma), & u_0(3) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+a-b-c-\alpha+\beta+\gamma), \\ u_0(4) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-a+b-c-\alpha+\beta-\gamma), & u_0(5) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-a+b-c+\alpha-\beta+\gamma), \\ u_0(6) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-a-b+c-\alpha-\beta+\gamma), & u_0(7) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-a-b+c+\alpha+\beta-\gamma). \end{aligned}$$

Далее, положим $u_1(j) = u_0(j) = 0$ для $8 \leq j \leq 2^n - 1$, а остальные компоненты вектора u_1 выберем так, чтобы выполнялись равенства (8), т.е.

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \overline{u_0(1)}, & u_1(1) &= -\overline{u_0(0)}, & u_1(2) &= \overline{u_0(3)}, & u_1(3) &= -\overline{u_0(2)}, \\ u_1(4) &= \overline{u_0(5)}, & u_1(5) &= -\overline{u_0(4)}, & u_1(6) &= \overline{u_0(7)}, & u_1(7) &= -\overline{u_0(6)}. \end{aligned}$$

Полученная пара u_0, u_1 порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

ПРИМЕР 4. Пусть $p = 3$, $n > 2$, $m = 2$ и

$$(b_0, b_1, \dots, b_8) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, a, \alpha, 0, b, \beta, 0, c, \gamma),$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда, применяя (6) и (7), получим

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma), \\ u_0(1) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + \alpha(b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3), \\ u_0(2) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2), \\ u_0(3) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3), \\ u_0(4) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3), \\ u_0(5) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3), \\ u_0(6) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2), \\ u_0(7) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2), \\ u_0(8) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$. Положим $u_0(j) = u_1(j) = u_2(j) = 0$ для $9 \leq j \leq 3^n - 1$ и определим с помощью формул (9) остальные компоненты векторов $u_1, u_2 \in \mathbb{C}_N$ так, чтобы матрица

$$\frac{9}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \hat{u}_2(l) \\ \hat{u}_0(l+3) & \hat{u}_1(l+3) & \hat{u}_2(l+3) \\ \hat{u}_0(l+6) & \hat{u}_1(l+6) & \hat{u}_2(l+6) \end{pmatrix}$$

была унитарной для $l = 0, 1, 2$. Полученный набор из трех векторов u_0, u_1, u_2 порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Значения параметров b_l в примерах 2–4 универсальны в том смысле, что они возникают не только при построении вейвлет-базисов в $\mathbb{C}_N$, но также и в соответствующих примерах для пространств $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$. Вместе с тем, при построении ортогональных вейвлетов на группах Кантора и Виленкина (а также на полупрямой $\mathbb{R}_+$; см. [8], [9]) требуется еще некоторое дополнительное ограничение, связанное с условием отсутствия у масок блокирующих множеств (так, в примере 2 пара $a = 0, b = 1$ приводит к вейвлет-базису пространства $\mathbb{C}_N$, а в оригинальном примере Лэнга этой паре соответствует линейно зависящая система; см. пример 2 в [4]). Бóльшая свобода в выборе значений параметров при построении ортогональных вейвлетов в пространстве $\mathbb{C}_N$ излагаемым методом проявляется в том, что в соответствии с шагом 1 приведенной выше процедуры в качестве $(b_0, b_1, \dots, b_{p^m-1})$ можно выбрать любой комплексный вектор размерности p^m , удовлетворяющий

условию (6) (сравните с построением дискретных вейвлетов Добеши в [6] и [10]). Это свойство существенно для приложений, так как расширяет возможности применения известных адаптивных методов аппроксимации сигналов (см., например, главы 8–10 в книге Малла [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Последовательностью ортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа называется последовательность векторов

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{p-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_{p-1}^{(m)}$$

таких, что $u_\mu^{(\nu)} \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$ для $\nu = 1, 2, \dots, m$, $\mu = 0, 1, \dots, p-1$ и матрицы

$$A^{(\nu)}(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{(\nu)}(l) & \hat{u}_1^{(\nu)}(l) & \dots & \hat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l) \\ \hat{u}_0^{(\nu)}(l + N_\nu) & \hat{u}_1^{(\nu)}(l + N_\nu) & \dots & \hat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l + N_\nu) \\ \hat{u}_0^{(\nu)}(l + 2N_\nu) & \hat{u}_1^{(\nu)}(l + 2N_\nu) & \dots & \hat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l + 2N_\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{u}_0^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu) & \hat{u}_1^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu) & \dots & \hat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu) \end{pmatrix}$$

унитарны для $\nu = 1, 2, \dots, m$, $l = 0, 1, \dots, N_\nu - 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Для данного $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, положим

$$u_\mu^{(1)}(j) = u_\mu(j), \quad u_\mu^{(\nu)}(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu-1} u_\mu^{(1)}(j + kN_{\nu-1}), \quad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}, \quad (10)$$

где $\nu = 2, \dots, m$, $\mu = 0, 1, \dots, p-1$. Тогда векторы

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{p-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_{p-1}^{(m)},$$

образуют последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа.

Таким образом, по данному вектору $u_0 \in \mathbb{C}_N$, определенному согласно (6) и (7), можно сначала с помощью формул (8) или (9) найти вейвлет-базис первого этапа $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$, а затем, пользуясь формулами (10), получить последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа. Обозначим через $\oplus$ прямую сумму подпространств пространства $\mathbb{C}_N$. Согласно следующей теореме по любой последовательности ортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа можно построить ортонормированный вейвлет-базис в $\mathbb{C}_N$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в пространстве $\mathbb{C}_N$ задана последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа:

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{p-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_{p-1}^{(m)}.$$

Положим $\varphi^{(1)} = u_0^{(1)}$, $\psi_\mu^{(1)} = u_\mu^{(1)}$, $\mu = 1, \dots, p-1$, и определим $\varphi^{(\nu)}$, $\psi_\mu^{(\nu)}$ для $\nu = 2, \dots, m$, $\mu = 1, \dots, p-1$ по формулам

$$\varphi^{(\nu)} = \varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1} u_0^{(\nu)}, \quad \psi_\mu^{(\nu)} = \varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1} u_\mu^{(\nu)}.$$

Далее, для $\nu = 1, \dots, t$, $\mu = 1, \dots, p - 1$ положим

$$\varphi_{-\nu,k} = T_{p^\nu k} \varphi^{(\nu)}, \quad \psi_{-\nu,k}^{(\mu)} = T_{p^\nu k} \psi_\mu^{(\nu)}, \quad k = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,$$

и определим подпространства

$$V_{-\nu} = \text{span}\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1}, \quad W_{-\nu}^{(\mu)} = \text{span}\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}, \\ W_{-\nu} = W_{-\nu}^{(1)} \oplus \dots \oplus W_{-\nu}^{(p-1)}.$$

Тогда имеет место разложение

$$\mathbb{C}_N = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \dots \oplus W_{-m} \oplus V_{-m} \quad (11)$$

и для каждого $\nu = 1, 2, \dots, t$ выполнены следующие свойства:

- (a) $V_{-\nu} = V_{-\nu-1} \oplus W_{-\nu-1}$;
- (b) $\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – ортонормированный базис в $V_{-\nu}$;
- (c) $\{\psi_{-\nu,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – ортонормированный базис в $W_{-\nu}$.

Эта теорема обосновывает метод построения подпространств $V_{-1}, \dots, V_{-n}$ в $\mathbb{C}_N$ со следующими свойствами:

- (i) $V_{-\nu-1} \subset V_{-\nu}$ для всех $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- (ii) для каждого $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует вектор $\varphi^{(\nu)} \in V_{-\nu}$ такой, что система $\{T_{p^\nu k} \varphi^{(\nu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ является ортонормированным базисом в $V_{-\nu}$;
- (iii) для каждого $1 \leq m \leq n$ верно равенство (11);
- (iv) для каждого $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ существуют векторы $\psi_1^{(\nu)}, \dots, \psi_{p-1}^{(\nu)} \in W_{-\nu}$ такие, что система $\bigcup_{\mu=1}^{p-1} \{T_{p^\nu k} \psi_\mu^{(\nu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – ортонормированный базис в $W_{-\nu}$.

Подобная конструкция в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ хорошо известна и связана с понятием *кратномасштабного анализа*. В соответствии с принятой в теории кратномасштабного анализа терминологией, указанную в свойстве (ii) последовательность $\{\varphi^{(\nu)}\}_{\nu=1}^n$ естественно называть *масштабирующей последовательностью* в $\mathbb{C}_N$.

В частности, при $p = 2$, $n = 3$ по теореме 3 получаются три ортонормированных вейвлет-базиса в $\mathbb{C}_8$:

$$\begin{aligned} \{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\varphi_{-1,k}\}_{k=0}^3, & \quad m = 1, \\ \{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^1 \cup \{\varphi_{-2,k}\}_{k=0}^1, & \quad m = 2, \\ \{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^1 \cup \{\psi_{-3,0}\} \cup \{\varphi_{-3,0}\}, & \quad m = 3. \end{aligned}$$

В случае Хаара (см. пример 1) эти базисы состоят из векторов

$$\begin{aligned} \varphi_{-1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \psi_{-1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \varphi_{-1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), & \psi_{-1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0), \\ \varphi_{-1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0), & \psi_{-1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0), \\ \varphi_{-1,3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & \psi_{-1,3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{-2,0} &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), & \psi_{-2,0} &= \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0), \\
\varphi_{-2,1} &= \frac{1}{2}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), & \psi_{-2,1} &= \frac{1}{2}(0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1), \\
\varphi_{-3,0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & \psi_{-3,0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1).
\end{aligned}$$

В общем случае ортогональные проекторы $P_{-\nu}: \mathbb{C}_N \rightarrow V_{-\nu}$ и $Q_{-\nu}: \mathbb{C}_N \rightarrow W_{-\nu}$ действуют по формулам

$$P_{-\nu}x = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \langle x, \varphi_{-\nu,k} \rangle \varphi_{-\nu,k}, \quad Q_{-\nu}x = \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \langle x, \psi_{-\nu,k}^{(\mu)} \rangle \psi_{-\nu,k}^{(\mu)}, \quad x \in \mathbb{C}_N. \quad (12)$$

Пусть I – тождественный оператор на $\mathbb{C}_N$. Полагая $P_0 = I$, $V_0 = \mathbb{C}_N$, по теореме 3 для любого $x \in \mathbb{C}_N$ получаем равенства

$$x = P_{-\nu}x + \sum_{k=1}^{\nu} Q_{-k}x, \quad P_{-\nu+1}x = P_{-\nu}x + Q_{-\nu}x, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Произвольный вектор x из $\mathbb{C}_N$ можно рассматривать как входной сигнал $a_0 = x$ и для $\nu = 1, 2, \dots, m$ положить

$$a_\nu = D(a_{\nu-1} * \tilde{u}_0^{(\nu)}), \quad d_\nu^{(\mu)} = D(a_{\nu-1} * \tilde{u}_\mu^{(\nu)}), \quad \mu = 1, \dots, p-1. \quad (13)$$

Легко видеть, что компонентами векторов a_ν и $d_\nu^{(\mu)}$ являются коэффициенты разложений (12) для выбранного x . Применение формул (13) составляет *фазу анализа* сигнала x и приводит к набору векторов

$$d_1^{(1)}, \dots, d_{p-1}^{(1)}, \quad d_1^{(2)}, \dots, d_{p-1}^{(2)}, \quad \dots, \quad d_1^{(m)}, \dots, d_{p-1}^{(m)}, a_m. \quad (14)$$

Обратный переход от набора (14) к исходному вектору x составляет *фазу восстановления* и определяется формулами

$$a_{\nu-1} = u_0^{(\nu)} * Ua_\nu + \sum_{\mu=1}^{p-1} u_\mu^{(\nu)} * Ud_\mu^{(\nu)}, \quad \nu = m, m-1, \dots, 1. \quad (15)$$

Формулы (13) и (15) задают *прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования*, ассоциированные с последовательностью вейвлет-фильтров

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{p-1}^{(1)}, \quad u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{p-1}^{(2)}, \quad \dots, \quad u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_{p-1}^{(m)},$$

и реализуются с помощью быстрых алгоритмов (сравните с [6; § 3.2], [8; § 4]).

2. Доказательства. Имеет место следующий критерий ортонормированности системы сдвигов элемента из $\mathbb{C}_N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u \in \mathbb{C}_N$, $\nu \in \{0, 1, \dots, n\}$. Система $\{T_{p^\nu k}u\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда

$$|\hat{u}(l)|^2 + |\hat{u}(l + N_\nu)|^2 + \dots + |\hat{u}(l + (p^\nu - 1)N_\nu)|^2 = \frac{p^\nu}{N^\nu} \quad (16)$$

для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2) имеем

$$(\widehat{T_{p^\nu k} u})(l) = \overline{w_{p^\nu k}^{(N)}(l)} \widehat{u}(l).$$

Пользуясь равенством Парсеваля, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \langle u, T_{p^\nu k} u \rangle &= N \sum_{l=0}^{N_\nu-1} |\widehat{u}(l)|^2 w_{p^\nu k}^{(N)}(l) = N \sum_{\mu=0}^{p^\nu-1} \sum_{l=0}^{N_\nu-1} |\widehat{u}(l + \mu N_\nu)|^2 w_k^{(N)}(p^\nu(l + \mu N_\nu)) \\ &= \frac{1}{N_\nu} \sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_{p^\nu k}^{(N)}(l) \frac{N^2}{p^\nu} \sum_{\mu=0}^{p^\nu-1} |\widehat{u}(l + \mu N_\nu)|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, произведение $N_\nu \langle u, T_{p^\nu k} u \rangle$ совпадает с обратным преобразованием Виленкина–Крестенсона в $\mathbb{C}_{N_\nu}$ последовательности

$$\Phi_\nu(l) := \frac{N^2}{p^\nu} \sum_{\mu=0}^{p^\nu-1} |\widehat{u}(l + \mu N_\nu)|^2, \quad l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_{p^\nu k}^{(N)}(l) = \sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_l^{(N_\nu)}(k) = N_\nu \delta_{N_\nu}(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Следовательно, равенство

$$\langle u, T_{p^\nu k} u \rangle = \begin{cases} 1 & \text{для } k = 0, \\ 0 & \text{для } k = 1, \dots, N_\nu - 1, \end{cases}$$

выполнено в том и только том случае, когда

$$\sum_{\mu=0}^{p^\nu-1} |\widehat{u}(l + \mu N_\nu)|^2 = \frac{p^\nu}{N^2}, \quad l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Кроме того, применяя (3), для любых $k, l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$ имеем

$$\langle T_{p^\nu k} u, T_{p^\nu l} u \rangle = \langle u, T_{p^\nu(l \ominus_p k)} u \rangle;$$

значит, ортонормированность системы $\{T_{p^\nu k} u\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ равносильна условию (16). Предложение 1 доказано.

При $\nu = 0$ из предложения 1 следует, что система сдвигов $\{T_k u\}_{k=0}^{N-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда $|\widehat{u}(l)| = N^{-1}$ для всех $l \in \mathbb{Z}_N$ (согласно (2) при этом равенство $|\widehat{(T_k u)}(l)| = N^{-1}$ выполнено для всех $k, l \in \mathbb{Z}_N$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $u, v \in \mathbb{C}_N$. Условие ортогональности

$$\langle T_{p^{-1}k} u, T_{p^{-1}l} v \rangle = 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}_{N_1}, \quad (18)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=0}^{p-1} \widehat{u}(l + jN_1) \overline{\widehat{v}(l + jN_1)} = 0, \quad l \in \mathbb{Z}_{N_1}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3) условие (18) эквивалентно равенствам

$$\langle u, T_p \, {}_k v \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{N_1}.$$

Отсюда, поскольку

$$\langle u, T_p \, {}_k v \rangle = N \sum_{l=0}^{N_1-1} \overline{w_p^{(N)}(l)} \sum_{\mu=0}^{p-1} \widehat{u}(l + \mu N_1) \widehat{v}(l + \mu N_1), \quad k \in \mathbb{Z}_{N_1},$$

(эта формула устанавливается аналогично (17)) следует, что (18) эквивалентно (19). Предложение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По предложению 1 системы

$$\{T_p \, {}_k u_0\}_{k=0}^{N_1-1}, \quad \dots, \quad \{T_p \, {}_k u_{p-1}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

ортонормированы в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда векторы-столбцы

$$\frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) \\ \widehat{u}_0(l + N_1) \\ \widehat{u}_0(l + 2N_1) \\ \dots \\ \widehat{u}_0(l + (p-1)N_1) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_{p-1}(l) \\ \widehat{u}_{p-1}(l + N_1) \\ \widehat{u}_{p-1}(l + 2N_1) \\ \dots \\ \widehat{u}_{p-1}(l + (p-1)N_1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

имеют длины, равные 1. Кроме того, по предложению 2 условие

$$\langle T_p \, {}_k u_\mu, T_p \, {}_j u_\nu \rangle = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad k, j \in \mathbb{Z}_{N_1},$$

равносильно попарной ортогональности векторов (20). Остается заметить, что число элементов системы $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ для данного набора векторов совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для $\mu = 0, 1, \dots, p-1$, $l = 0, 1, \dots, N_1-1$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\mu^{(2)}(l) &= \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} u_\mu^{(2)}(j) \overline{w_l^{(N_1)}(j)} = \frac{1}{pN_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{p-1} u_\mu^{(1)}(j + kN_1) \overline{w_{p \, l}^{(pN_1)}(j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{p-1} u_\mu^{(1)}(j + kN_1) \overline{w_p^{(N)}(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_\mu^{(1)}(j) \overline{w_p^{(N)}(j)} = \widehat{u}_\mu^{(1)}(p \, l). \end{aligned}$$

Применяя индукцию, для любого $\nu \in \{2, \dots, m\}$ получаем

$$\widehat{u}_\mu^{(\nu)}(l) = \widehat{u}_\mu^{(1)}(p^{\nu-1}l), \quad \mu = 0, 1, \dots, p-1, \quad l \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}.$$

Поэтому для любого $\nu \in \{1, 2, \dots, m\}$ справедливо равенство $A^{(\nu)}(l) = A^{(1)}(p^{\nu-1}l)$, где в силу теоремы 1 матрица $A^{(1)}(p^{\nu-1}l)$ унитарна для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}$. Теорема 2 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f \in \mathbb{C}_N$ и $u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, где $1 \leq \nu \leq n$. Предположим, что система $\{T_{p^{\nu-1}k} f\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$, а система

$$\{T_{pk} u_0\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1} \cup \dots \cup \{T_{pk} u_{p-1}\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1}$$

является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$. Положим

$$g = f * U^{\nu-1}u_0, \quad h_1 = f * U^{\nu-1}u_1, \quad \dots, \quad h_{p-1} = f * U^{\nu-1}u_{p-1}. \quad (21)$$

Тогда система

$$\{T_{p^\nu k}g\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \{T_{p^\nu k}h_1\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \dots \cup \{T_{p^\nu k}h_{p-1}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \quad (22)$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $k \in \{0, 1, \dots, N_{\nu-1} - 1\}$ в силу (3), (4) и (21) имеем

$$\langle g, T_{p^\nu k}g \rangle = g * \tilde{g}(p^\nu k) = (f * U^{\nu-1}u_0 * \tilde{f} * U^{\nu-1}\tilde{u}_0)(p^\nu k) = (f * \tilde{f}) * (U^{\nu-1}(u_0 * \tilde{u}_0))(p^\nu k)$$

или по определению свертки

$$\langle g, T_{p^\nu k}g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} (f * \tilde{f})(p^\nu k \ominus_p j)(U^{\nu-1}(u_0 * \tilde{u}_0))(j).$$

Поскольку

$$U^{\nu-1}(u_0 * \tilde{u}_0)(j) = \begin{cases} (u_0 * \tilde{u}_0)\left(\frac{j}{p^{\nu-1}}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p^{\nu-1}, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p^{\nu-1}, \end{cases}$$

то

$$\langle g, T_{p^\nu k}g \rangle = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} (f * \tilde{f})(p^\nu k \ominus_p p^{\nu-1}m)(u_0 * \tilde{u}_0)(m).$$

Учитывая ортонормированность системы $\{T_{p^{\nu-1}k}f\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1}$, для произвольного $m \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}$ получаем

$$f * \tilde{f}(p^{\nu-1}(pk \ominus_p m)) = \langle f, T_{p^{\nu-1}(pk \ominus_p m)}f \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } m = pk, \\ 0, & \text{если } m \neq pk. \end{cases}$$

Поэтому

$$\langle g, T_{p^\nu k}g \rangle = (u_0 * \tilde{u}_0)(pk) = \langle u_0, T_{pk}u_0 \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N_\nu - 1. \end{cases}$$

Для каждого $\mu \in \{1, \dots, p-1\}$ аналогично имеем

$$\langle h_\mu, T_{p^\nu k}h_\mu \rangle = \langle g, T_{p^\nu k}h_\mu \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N_\nu - 1. \end{cases}$$

Следовательно, система (22) ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Предложение 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Равенство $\mathbb{C}_N = W_{-1} \oplus V_{-1}$ и свойства (b), (c) для $\nu = 1$ следуют из того, что по теореме 1 система

$$\{\varphi_{-1,k}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{\psi_{-1,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-1,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$. По условию,

$$\varphi_{-2,k} = T_{p^2k} \varphi^{(2)}, \quad \psi_{-2,k}^{(\mu)} = T_{p^2k} \psi_{\mu}^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots, N_2 - 1,$$

где

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} * U(u_0^{(2)}), \quad \psi_{\mu}^{(2)} = \varphi^{(1)} * U(u_{\mu}^{(2)}), \quad \mu = 1, \dots, p - 1.$$

Пользуясь предложением 3, замечаем, что система

$$\{\varphi_{-2,k}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \{\psi_{-2,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-2,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_2-1}$$

является ортонормированным базисом пространства V_1 . Отсюда следует свойство (a) для $\nu = 1$.

Пусть теперь $\nu \in \{2, 3, \dots, m\}$. Применяя предложение 3 для $f = \varphi^{(\nu-1)}$, $u_0 = u_0^{(\nu)}$, $\dots$, $u_{p-1} = u_{p-1}^{(\nu)}$, получаем, что система

$$\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_{\nu}-1} \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_{\nu}-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_{\nu}-1} \quad (23)$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Поэтому

$$\langle \varphi_{-\nu,k}, \psi_{-\nu,l}^{(\mu)} \rangle = \langle \psi_{-\nu,k}^{(\mu')}, \psi_{-\nu,l}^{(\mu)} \rangle = 0 \quad \text{для} \quad k, l \in \mathbb{Z}_{N_{\nu}}, \quad \mu, \mu' \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \mu \neq \mu'. \quad (24)$$

Далее, для произвольных $k \in \mathbb{Z}_{N_{\nu}}$, $j \in \mathbb{Z}_N$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{-\nu,k}(j) &= \varphi^{(\nu)}(j \ominus_p p^{\nu}k) = (\varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1}u_0^{(\nu)})(j \ominus_p p^{\nu}k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \varphi^{(\nu-1)}(j \ominus_p p^{\nu}k \ominus_p m) U^{\nu-1}u_0^{(\nu)}(m) \\ &= \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} \varphi^{(\nu-1)}(j \ominus_p p^{\nu}k \ominus_p p^{\nu-1}m) u_0^{(\nu)}(m) \\ &= \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_0^{(\nu)}(m) T_{p^{\nu-1}(pk \oplus_p m)} \varphi^{(\nu-1)}(j). \end{aligned}$$

Значит, для любого $k \in \mathbb{Z}_{N_{\nu}}$

$$\varphi_{-\nu,k} = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_0^{(\nu)}(m) \varphi_{-\nu+1, pk \oplus_p m}. \quad (25)$$

Аналогично, для всех $k \in \mathbb{Z}_{N_{\nu}}$, $\mu \in \{1, \dots, p-1\}$

$$\psi_{-\nu,k}^{(\mu)} = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_{\mu}^{(\nu)}(m) \varphi_{-\nu+1, pk \oplus_p m}. \quad (26)$$

Из формул (24)–(26) следуют соотношения

$$V_{-\nu} \perp W_{-\nu}, \quad V_{-\nu} \subset V_{-\nu+1}, \quad W_{-\nu} \subset V_{-\nu+1}$$

и, так как $\dim V_{-\nu} + \dim W_{-\nu} = \dim V_{-\nu+1}$, то $V_{-\nu+1}$ является прямой суммой подпространств $V_{-\nu}$ и $W_{-\nu}$:

$$V_{-\nu+1} = V_{-\nu} \oplus W_{-\nu}. \quad (27)$$

Отсюда и из ортонормированности системы (23) следуют свойства (а)–(с) для каждого ν . Для доказательства разложения (11) покажем, что система

$$\bigcup_{\mu=1}^{p-1} \{\psi_{-1,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \bigcup_{\mu=1}^{p-1} \{\psi_{-2,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \dots \cup \bigcup_{\mu=1}^{p-1} \{\psi_{-m,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_m-1} \cup \{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1} \quad (28)$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Из ортонормированности системы (23) следуют равенства (24) и ортонормированность каждой из систем $\{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1}$ и $\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$. Предположим, что $\nu' < \nu$ и рассмотрим элементы $\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}$ и $\psi_{-\nu',l}^{(\mu)}$. Тогда $\psi_{-\nu',k}^{(\mu)} \in W_{-\nu'}$ и по доказанному

$$\psi_{-\nu,k}^{(\mu)} \in W_{-\nu} \subset V_{-\nu+1} \subset \dots \subset V_{-\nu'}.$$

Учитывая (27), отсюда получаем, что множества

$$\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \quad \text{и} \quad \{\psi_{-\nu',l}^{(\mu)}\}_{l=0}^{N_{\nu'}-1}$$

ортогональны. Аналогично, множество $\{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1}$ ортогонально любому из множеств $\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$, $1 \leq \nu \leq m$. Остается заметить, что число элементов множества (28) совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Для данной последовательности векторов $u_0^{(1)}, \dots, u_{p-1}^{(1)}, \quad v_0^{(1)}, \dots, v_{p-1}^{(1)}, \quad \dots, \quad u_0^{(m)}, \dots, u_{p-1}^{(m)}, \quad v_0^{(m)}, \dots, v_{p-1}^{(m)}, \quad (29)$

таких, что $u_\mu^{(\nu)}, v_\mu^{(\nu)} \in \mathbb{C}_{N_\nu-1}$ для $\nu = 1, 2, \dots, m$, $\mu = 0, 1, \dots, p-1$, матрицы $A^{(\nu)}(l)$ введем как в определении 2 и положим

$$\overline{B}^{(\nu)}(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l)} \\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l + N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l + N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l + N_\nu)} \\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l + 2N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l + 2N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l + 2N_\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l + (p-1)N_\nu)} \end{pmatrix}^T,$$

где T обозначает транспонирование. Будем говорить, что векторы (29) образуют последовательность биортогональных вейвлет-фильтров m -го этапа, если

$$\overline{B}^{(\nu)}(l)A^{(\nu)}(l) = E_p, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad l = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,$$

где E_p – единичная матрица порядка p . Пользуясь этим определением, можно обобщить приведенную выше конструкцию на биортогональный случай и вместо примеров 2–4 получить дискретные аналоги соответствующих примеров из [5]. Ограничимся здесь формулировкой следующего аналога предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $u, v \in \mathbb{C}_N$, $\nu \in \{0, 1, \dots, n\}$. Системы

$$\{T_{p^\nu k} u\}_{k=0}^{N_\nu-1} \quad \text{и} \quad \{T_{p^\nu k} v\}_{k=0}^{N_\nu-1}$$

биортонормированы в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда

$$\widehat{u}(l)\overline{\widehat{v}(l)} + \widehat{u}(l + N_\nu)\overline{\widehat{v}(l + N_\nu)} + \dots + \widehat{u}(l + (p^\nu - 1)N_\nu)\overline{\widehat{v}(l + (p^\nu - 1)N_\nu)} = \frac{p^\nu}{N^2}$$

для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ – обобщенная система Уолша, определяемая по данному $p \geq 2$ и образующая ортонормированный базис в L^2 -пространстве на интервале $\Delta = [0, 1)$ (случай $p = 2$ соответствует классической системе Уолша; см., например, [1]). Каждой последовательности $x = (x_0, x_1, \dots)$ из $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ сопоставим функцию $\widehat{x} := \sum_{k=0}^\infty x_k w_k$ в $L^2(\Delta)$. Пользуясь этим отображением вместо преобразования Виленкина–Крестенсона, можно доказать аналоги теорем 1–3 для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (сравните с [6; глава 4]) и получить дискретные непериодические аналоги вейвлет-базисов из [4] и [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: теория и применения*, Изд-во ЛКИ, М., 2008.
- [2] В. Н. Малоземов, С. М. Машарский, “Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 111–157.
- [3] W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.
- [4] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952.
- [5] Ю. А. Фарков, “Биортогональные всплески на группах Виленкина”, *Избранные вопросы математической физики и р-адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 110–124.
- [6] М. Фрейзер, *Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры*, БИНОМ. Лаб. знаний, М., 2008.
- [7] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [8] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.
- [9] Yu. A. Farkov, “On wavelets related to the Walsh series”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 259–279.
- [10] S. A. Broughton, K. Bryan, *Discrete Fourier Analysis and Wavelets. Applications to Signal and Image Processing*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2009.
- [11] С. Малла, *Вейвлеты в обработке сигналов*, Мир, М., 2005.

Ю. А. Фарков

Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru

Поступило

20.01.2010