Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, О замыкании суммы двух равномерных алгебр на компактах в $\mathbb{C}$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 34–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:13:02

О замыкании суммы двух равномерных алгебр на компактах в $\mathbb{C}$

А. Б. Зайцев

В работе изучаются необходимые и достаточные условия на компакт X в $\mathbb{C}$ и гомеоморфизм ψ плоскости $\mathbb{C}$ на себя, при которых каждая функция, непрерывная на X , может быть равномерно на X приближена выражениями вида $p + h \circ \psi$, где p – полином комплексной переменной, а h – рациональная функция с полюсами, лежащими в ограниченных компонентах дополнения к компакт $\psi(X)$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Обозначим через $C(X)$ пространство комплекснозначных непрерывных на X функций с равномерной нормой. Пусть ψ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя (в дальнейшем коротко $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм). Для компакта X с несвязным дополнением через $Z(X, \psi)$ обозначим замыкание в $C(X)$ пространства функций вида

$$p(z) + h(\psi(z)), \quad (1)$$

где $p(z)$ – полином комплексной переменной, а h – рациональная функция с полюсами, лежащими в ограниченных компонентах множества $\mathbb{C} \setminus \psi(X)$.

В данной статье рассматривается следующая

Задача 1. Пусть компакт X не имеет внутренних точек, $\mathbb{C} \setminus X$ – несвязно. Найти необходимые и достаточные условия на X и ψ , при которых $Z(X, \psi) = C(X)$.

Если X – компакт без внутренних точек со связным дополнением, то каждая функция класса $C(X)$ равномерно на X приближается полиномами комплексной переменной [1; теорема 17].

Пусть ψ – тождественный гомеоморфизм. Тогда задача 1 является частным случаем задачи о равномерной аппроксимации рациональными функциями. Обозначим через $R(X)$ замыкание в $C(X)$ пространства рациональных функций с полюсами вне X . Известно [2; гл. VI, § 2, теорема 1(1)], что $R(X) = C(X)$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества D в $\mathbb{C}$ имеет место равенство $\gamma(D \setminus X) = \gamma(D)$, где γ – аналитическая емкость множества на плоскости.

Рассмотрим также следующую задачу.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3877.2008.1).

ЗАДАЧА 2. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт X в $\mathbb{C}$ и $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм ψ , при которых каждая функция класса $C(X)$ равномерно на X приближается функциями вида $p_1(z) + p_2(\psi(z))$, где p_1 и p_2 – полиномы комплексной переменной.*

Обозначим через ∂X границу компакта X , а через $\hat{X}$ – объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$.

В случае $\psi(z) = \bar{z}$ задача 2 – это частный случай задачи о равномерном приближении гармоническими полиномами. Из теоремы Уолша–Лебега [3; с. 503], [4; гл. II, теорема 3.3] следует, что каждая функция класса $C(X)$ приближается равномерно на X гармоническими полиномами тогда и только тогда, когда $X = \partial \hat{X}$, т.е. X – компакт Каратеодори без внутренних точек. Последнее условие является достаточным в задаче 2, если ψ меняет ориентацию [5; теорема 1]. Если ψ сохраняет ориентацию, то условия на компакт X в задаче 2 имеют аналитический характер [6; предложение 1].

Обозначим через $P(X)$ и $P_\psi(X)$ замыкания в $C(X)$ соответственно пространств полиномов комплексной переменной и полиномов от функции ψ . Через $R_\psi^*(X)$ обозначим замыкание в $C(X)$ пространства функций вида $h(\psi(z))$, где h – рациональная функция с полюсами, лежащими в ограниченных компонентах множества $\mathbb{C} \setminus \psi(X)$. В терминах введенных обозначений пространство $Z(X, \psi)$ – это замыкание в $C(X)$ пространства $P(X) + R_\psi^*(X)$, а задачу 2 можно сформулировать следующим образом: найти условия на компакт X и гомеоморфизм ψ , необходимые и достаточные для того, чтобы пространство $P(X) + P_\psi(X)$ было плотно в $C(X)$.

Если для заданных компакта X и $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизма ψ существует $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм ψ_0 такой, что $R_{\psi_0}^*(X) = P_{\psi_0}(X)$, то задачи 1 и 2 можно свести друг к другу. В конце работы приведен соответствующий пример. Также приведен пример 4, показывающий, что задача 1 в общем случае не сводится непосредственно к задаче 2.

Задача 1 тесно связана со следующей задачей.

ЗАДАЧА 3. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт без внутренних точек и с несвязным дополнением, $f \in C(X)$. Представить f в виде $f(z) = g(z) + h(\psi(z))$, где функция $g(z) \in P(X)$, а функция $h(\psi(z)) \in R_\psi^*(X)$.*

В частности, если $X = \Gamma$ – замкнутый жорданов контур, являющийся границей ограниченной односвязной области D , а ψ – тождественный гомеоморфизм, то задача 3 – это следующая задача о скачке: для функции $f \in C(\Gamma)$ найти функции g и h , голоморфные в D и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ и непрерывные на $\overline{D}$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ соответственно, такие, что $f(z) = g(z) + h(z)$ при всех $z \in \Gamma$.

Условие $Z(X, \psi) = C(X)$ означает, что множество функций, для которых разрешима задача 3, плотно в $C(X)$.

2. Основные результаты и их доказательства. Обозначим через K° множество внутренних точек компакта K . Положим $\Omega_X = (\hat{X})^\circ$. Основным результатом данной статьи является

ТЕОРЕМА. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт без внутренних точек и с несвязным дополнением, $\psi(z)$ – C^1 -диффеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, сохраняющий ориентацию. Предположим также, что каждая точка компакта $X \cap \Omega_X$ является*

границей некоторой ограниченной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$. Тогда $Z(X, \psi) = C(X)$.

Пусть $\psi(z) = T_\beta(z) = z_\beta = x_1 + (i/\beta)x_2$, β – вещественное число, не равное 0 и 1. Тогда каждая функция вида (1) на всей своей области определения удовлетворяет уравнению

$$Lu = 0, \quad (2)$$

где

$$L = \bar{\partial}\partial_\beta, \quad \partial_\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (3)$$

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть компакт X удовлетворяет условиям теоремы, L – оператор вида (3), $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. Тогда каждая функция класса $C(X)$ может быть равномерно на X приближена решениями уравнения (2) вида (1), где $\psi(z) = z_\beta$.

Приведем пример, показывающий, что условие $\beta > 0$ в следствии является существенным.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{C}$ – единичная окружность, $\psi(z) = z_\beta$, $\beta < 0$. Тогда $Z(\Sigma, T_\beta) \neq C(\Sigma)$.

Пусть h – рациональная функция с полюсами в области $T_\beta(B)$, где B – единичный круг. Тогда функция $h(z_\beta) \in R_{T_\beta}^*(\Sigma)$. Имеет место тождество $z_\beta = az + b\bar{z}$, где a и b – некоторые комплексные константы, причем $|a| < |b|$. Тогда $z_\beta = az + b/z$ при всех $z \in \Sigma$. Легко показать, что функция $\tau(z) = az + b/z$ конформно отображает B на область $T_\beta(\mathbb{C} \setminus \bar{B})$. Тогда функция $h(\tau(z))$ голоморфна в окрестности замкнутого круга $\bar{B}$, а значит, принадлежит классу $P(\bar{B})$. Так как $h(z_\beta) = h(\tau(z))$ при всех $z \in \Sigma$, то $h(z_\beta) \in P(\Sigma)$. Итак, $R_{T_\beta}^*(\Sigma) \subseteq P(\Sigma)$ и, таким образом, $Z(\Sigma, T_\beta) \neq C(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Для произвольной равномерной функциональной алгебры A на компакте X и борелевской комплекснозначной меры μ на X запись $\mu \perp A$ означает, что $\int f d\mu = 0$ для любой функции $f \in A$.

Пусть $Z(X, \psi) \neq C(X)$. Так как по теореме Рисса–Маркова [7; теорема IV.17] каждый линейный функционал φ на пространстве $C(X)$ представляется в виде $\varphi(f) = \int f d\mu_\varphi$, где $f \in C(X)$, а μ_φ – конечная борелевская комплекснозначная мера с носителем на X , существует ненулевая борелевская комплекснозначная мера μ на X , удовлетворяющая условиям

$$\mu \perp P(X), \quad (4)$$

$$\mu \perp R_\psi^*(X), \quad (5)$$

Обратно, если существует ненулевая мера μ на X , удовлетворяющая условиям (4) и (5), то $Z(X, \psi) \neq C(X)$.

В дальнейшем через $\text{supp}(\mu)$ обозначается (наименьший замкнутый) носитель меры μ .

Докажем, что $\text{supp}(\mu) \subseteq \partial\Omega_X$.

Пусть $E \subseteq X \setminus \bar{\Omega}_X$ – замкнутое множество. Очевидно, что $C(E) = P(\hat{X})|_E$, т.е. E – интерполяционное множество пика для алгебры $P(\hat{X})|_E$ [4; с. 85]. Из (4) следует, что $|\mu|(E) = 0$ [4; гл. II, следствие из теоремы 12.7]. Поэтому $|\mu|(X \setminus \bar{\Omega}_X) = 0$.

Для произвольного компакта K в $\overline{\mathbb{C}}$ через $A(K)$ обозначим пространство функций класса $C(K)$, голоморфных на множестве K° . Пусть $E \subseteq X \cap \Omega_X$ – замкнутое множество, $Y = \overline{\mathbb{C}} \setminus \widehat{X}$. Так как каждая точка компакта $\psi(X \cap \overline{\Omega}_X)$ является граничной точкой некоторой ограниченной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$, то $R(\psi(X \cup Y)) = A(\psi(X \cup Y))$ [4; гл. VIII, следствие 8.4]. Поэтому $C(\psi(E)) = R(\psi(X \cup Y))|_{\psi(E)}$, а значит, $C(E) = R_\psi^*(X)|_E$, т.е. E – интерполяционное множество пика для алгебры $R_\psi^*(X)$. Из (5) следует, что $|\mu|(E) = 0$. Поэтому $|\mu|(\Omega_X) = 0$.

Итак, $\text{supp}(\mu) \subseteq \partial\Omega_X$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $X = \partial\Omega_X$.

Далее нам понадобится следующая лемма, которая будет доказана после завершения доказательства теоремы.

ЛЕММА. Пусть ψ – C^1 -диффеоморфизм $\mathbb{C}$ на себя, сохраняющий ориентацию, $z_0 \in \mathbb{C}$, K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ существует ветвь функции $\text{Ln}(\psi(\zeta) - \psi(z))/(\zeta - z)$, однозначная, непрерывная по совокупности переменных z и ζ и ограниченная на множестве точек

$$\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : z \neq \zeta, |z - z_0| < \varepsilon, \zeta \in K\}.$$

Указанную в лемме ветвь обозначим через $\ln(\psi(\zeta) - \psi(z))/(\zeta - z)$.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int \ln \frac{\psi(\zeta) - \psi(z)}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Докажем, что в каждой связной компоненте Y_j множества Ω_X оно представляет голоморфную функцию $F_j(z)$ такую, что $F_j'(z) = \widehat{\mu}(z)$, где $\widehat{\mu}$ – преобразование Коши меры μ .

В самом деле, из (5) следует, что при $z \in Y_j$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int \ln \frac{\psi(\zeta) - \psi(z)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \psi(z)}{\partial \bar{z}} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \int \ln \frac{\psi(\zeta) - \psi(z)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} + \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \right) = \widehat{\mu}(z), \end{aligned}$$

а функция $\widehat{\mu}(z)$ имеет однозначную первообразную в области Y_j .

Определим на компакте $X_\psi = \psi(X)$ меру μ_ψ по формуле $\mu_\psi = \psi(\mu)$. Пусть $Y_\psi = \psi(Y)$. Из (5) следует, что мера μ_ψ удовлетворяет условиям

$$\mu_\psi \perp R(\overline{Y_\psi}), \quad (6)$$

$$\mu_\psi \perp P_{\psi^{-1}}(X_\psi). \quad (7)$$

Так как $\int_{\psi(\partial Y_j)} d\mu_\psi = 0$, $j = 1, 2, \dots$, функция $\widehat{\mu}_\psi(t)$ имеет однозначную первообразную в области Y_ψ . Из (6) и (7), повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int \ln \frac{\xi - t}{\psi^{-1}(\xi) - \psi^{-1}(t)} d\mu_\psi(\xi)$$

представляет функцию $F(t)$, голоморфную в области Y_ψ , причем $F'(t) = -\widehat{\mu}_\psi(t)$.

Так как мера μ каждой точки компакта равна 0 [8; лемма 9], из леммы следует, что функции F и F_j непрерывно продолжаются на $\overline{Y_\psi}$ и $\overline{Y_j}$ соответственно, и при всех $\zeta \in \partial Y_j$ имеет место равенство $F_j(\zeta) = F(\psi(\zeta))$.

Докажем, что множество $\bigcup_j F_j(\partial Y_j)$ не имеет внутренних точек. Пусть $\mu_j = \mu|_{\partial Y_j}$. Из [9; теорема 2(2)] следует, что $\mu_j \perp R(\bar{Y}_j)$; следовательно, $\hat{\mu}_k(z) = 0$ при $z \in Y_j$, $k \neq j$. Таким образом, $F'_j(z) = \hat{\mu}_j(z)$ при $z \in Y_j$. При помощи конформного отображения области Y_j на единичный круг доказывается аналогично [6; с. 79–80], что длина множества $F_j(\partial Y_j)$ равна $\|\mu_j\|$. Поэтому длина множества $\bigcup_j F_j(\partial Y_j)$ не превосходит $\|\mu\|$; следовательно, данное множество не имеет внутренних точек.

Пусть функция F не является константой. Так как по условию теоремы $X = \bigcup_j \partial Y_j$, множество $F(X_\psi)$ не имеет внутренних точек. Следовательно, существует константа c такая, что функция $F - c$ не равна нулю нигде на X_ψ и на ∞ и имеет нули в области Y_ψ .

Пусть точки $t_1, t_2, \dots, t_\ell \in Y_\psi$ – нули функции $F - c$ порядков $n_1, n_2, \dots, n_\ell$ соответственно. Существует функция $F_0 \in A(\bar{Y}_\psi)$ такая, что

$$\frac{1}{F(t) - c} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{n_k!}{F^{(n_k)}(t_k)(t - t_k)^{n_k}} + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{c_{jk}}{(t - t_k)^j} + F_0(t),$$

где c_{jk} , $j = 1, \dots, n_k - 1$, $k = 1, \dots, \ell$ – некоторые константы.

Так как $A(\bar{Y}_\psi) = R(\bar{Y}_\psi)$, из (6) следует, что $\int f_0 d\mu_\psi = 0$. Далее, при всех натуральных j имеем

$$F^{(j)}(t_k) = -\frac{(j-1)!}{2\pi i} \int \frac{d\mu_\psi(\xi)}{(\xi - t_k)^j}.$$

Так как $F^{(j)}(t_k) = 0$ при $0 < j < n_k$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu_\psi(\xi)}{F(\xi) - c} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{n_k!}{2\pi i F^{(n_k)}(t_k)} \int \frac{d\mu_\psi(\xi)}{(\xi - t_k)^{n_k}} = -\sum_{k=1}^{\ell} n_k < 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{F(\psi(\zeta)) - c} < 0.$$

Так как функция $F_j - c$ не равна нулю нигде на ∂Y_j , $F'_j(z) = \hat{\mu}_j(z)$ при $z \in Y_j$, используя аналогичные рассуждения, получаем, что выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu_j}{F_j - c}$$

равно числу нулей $F_j - c$ в Y_j с учетом кратности, т.е. неотрицательно. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{F(\psi(\zeta)) - c} = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int \frac{d\mu_j}{F_j - c} \geq 0.$$

Из полученного противоречия следует, что функция F является константой. Но тогда $\hat{\mu}_\psi(t) = 0$ при $t \in Y_\psi$. Но мера μ_ψ удовлетворяет условию (6), поэтому из [8; лемма 4] следует, что $\mu_\psi = 0$. Таким образом, $\mu = 0$. Итак, $Z(X, \psi) = C(X)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $z \in \mathbb{C}$, Γ – спрямляемый контур, $z \notin \Gamma$. Так как гомеоморфизм ψ сохраняет ориентацию, нетрудно доказать, что при любом фиксированном z приращение аргумента функции $(\psi(\zeta) - \psi(z))/(\zeta - z)$ как функции от ζ

при полном обходе контура Γ равно нулю. Для произвольного $\varepsilon > 0$ через $B(z_0, \varepsilon)$ обозначим множество точек $z \in \mathbb{C}$ таких, что $|z - z_0| \leq \varepsilon$. Легко доказывается, что при любых $\varepsilon > 0$ и $r > \varepsilon$ на множестве

$$\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : z \in B(z_0, \varepsilon), \varepsilon \leq |\zeta - z| \leq r \text{ при всех } z \in B(z_0, \varepsilon)\}$$

существует однозначная непрерывная по совокупности переменных z и ζ и ограниченная ветвь функции $\text{Arg}(\psi(\zeta) - \psi(z))/(\zeta - z)$.

Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что искомая ветвь существует при некотором $\varepsilon > 0$ на множестве

$$K_\varepsilon = \left\{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : z \in B(z_0, \varepsilon), \min_{z \in B(z_0, \varepsilon)} |\zeta - z| \leq \varepsilon; \zeta \neq z \right\}.$$

Если $|z - \zeta|$ — достаточно малая величина, то

$$\frac{\psi(\zeta) - \psi(z)}{\zeta - z} = \frac{\partial \psi}{\partial \omega}(z) + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}}(z) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} + \theta(z, \zeta),$$

где функция $\theta(z, \zeta)$ при $|z - \zeta| \rightarrow 0$ стремится к нулю равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}^2$. Далее, так как ψ сохраняет ориентацию, то

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \omega}(z) \right| > \left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}}(z) \right|$$

при всех $z \in \mathbb{C}$.

Легко показать, что если $(z, \zeta) \in K_\varepsilon$, то $|\zeta - z| \leq 4\varepsilon$. Поэтому при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ на множестве K_ε имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \omega}(z) + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}}(z) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \right| > |\theta(z, \zeta)|.$$

Далее, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ на K_ε можно выделить однозначную непрерывную и ограниченную ветвь функции

$$\text{Arg} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}(z) + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}}(z) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \right),$$

а значит, то же самое верно и для функции $\text{Arg}(\psi(\zeta) - \psi(z))/(\zeta - z)$. Лемма доказана.

Пусть ψ — тождественный гомеоморфизм. Существуют примеры компактов X без внутренних точек, для которых $R(X) \neq C(X)$; в частности, следующий “швейцарский сыр” Алисы Рот [10; с. 96]: $X = \overline{B} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, где B — единичный круг в $\mathbb{C}$, B_j , $j = 1, 2, \dots$, — круги, замыкания которых попарно не пересекаются, $\overline{B}_j \subset B$, причем компакт X не имеет внутренних точек, а радиусы r_j кругов B_j удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$.

Следующее утверждение для сохраняющих ориентацию C^1 -диффеоморфизмов вытекает из теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ — компакт Каратеодори без внутренних точек, множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus X$ состоит из двух областей: ограниченной Y_1 и неограниченной Y , $\psi(z)$ — произвольный $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм. Предположим, что существует множество $E_0 \subseteq \partial Y_1$ нулевой гармонической меры относительно области Y_1 такое, что гармоническая мера множества $\psi(E_0)$ относительно области $\psi(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{Y}_1)$ положительна. Тогда $Z(X, \psi) = C(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы, достаточно рассмотреть случай $X = \partial\Omega_X$. Пусть ненулевая мера $\mu \perp Z(X, \psi)$. Так как $\mu \perp P(X)$, имеем $|\mu|(E_0) = 0$ [4; гл. VI, теорема 2.3, гл. II, теорема 8.5].

Определим на компакте $\psi(X)$ меру μ_ψ по формуле $\mu_\psi = \psi(\mu)$. Пусть $Y_\psi = \psi(Y)$. Так как μ_ψ – ненулевая мера и $\mu_\psi \perp R(\overline{Y}_\psi)$, существует точка $a \in Y_\psi$ такая, что $\hat{\mu}_\psi(a) \neq 0$. Тогда мера

$$d\sigma = \frac{d\mu_\psi(\zeta)}{\hat{\mu}_\psi(a)(\zeta - a)}$$

является представляющей мерой точки a в алгебре $R(\overline{Y}_\psi)$. Существует положительная мера t на $\psi(X)$, являющаяся представляющей мерой данной точки в данной алгебре, абсолютно непрерывная относительно меры σ , а значит, и относительно μ_ψ [4; гл. II, теорема 2.2]. Такая мера единственна и она является гармонической мерой на $\psi(X)$ относительно точки a . Следовательно, мера $t(\psi(E_0)) = 0$, что противоречит условию предложения. Поэтому μ_ψ , а следовательно, и μ – нулевая мера. Таким образом, $Z(X, \psi) = C(X)$. Предложение доказано.

Проиллюстрируем предложение на следующем примере.

ПРИМЕР 2. Пусть X – компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$, не имеющий внутренних точек, разделяющий плоскость на две части и содержащий кривую $\Gamma_1 = \{x_2 = \sin(1/x_1), 0 < x_1 \leq 1\}$. Предположим также, что область $Y_1 = \Omega_X$ целиком лежит справа от мнимой прямой и что $\Gamma_1 \subset \partial Y_1$. Пусть ψ – произвольный $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм. Тогда $Z(X, \psi) = C(X)$.

В самом деле, пусть $E_0 = \{x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\}$. Так как ни одна из точек множества E_0 не является достижимой граничной точкой области Y_1 , то гармоническая мера E_0 относительно Y_1 равна нулю [4; гл. VI, лемма 4.3]. В то же время все точки отрезка E_0 являются достижимыми граничными точками области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{Y}_1$. Множество $\psi(E_0)$ является жордановой дугой, все точки которой являются достижимыми граничными точками области $\psi(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{Y}_1)$, поэтому гармоническая мера $\psi(E_0)$ относительно области $\psi(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{Y}_1)$ положительна. По предложению $Z(X, \psi) = C(X)$.

Приведем пример компакта, для которого задачи 1 и 2 можно свести друг к другу.

ПРИМЕР 3. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, ψ – $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм. Тогда существует $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм ψ_0 такой, что $R_\psi^*(\Gamma) = P_{\psi_0}(\Gamma)$. При этом, если гомеоморфизм ψ сохраняет ориентацию, то ψ_0 меняет ориентацию, и наоборот.

Пусть D – область, ограниченная контуром Γ , c – некоторая фиксированная точка в области D , $\psi_0(z) = 1/(\psi(z) - \psi(c))$ при всех $z \in \Gamma$. Очевидно, что ψ_0 гомеоморфно отображает кривую Γ на кривую $\psi_0(\Gamma)$. Функция ψ_0 продолжается до $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизма. В самом деле, пусть D_0 – область, ограниченная контуром $\psi_0(\Gamma)$, ω и χ – конформные отображения единичного круга B на область D и области D_0 на B соответственно. По теореме Каратеодори данные функции продолжаются соответственно до гомеоморфизмов $\overline{B}$ на $\overline{D}$ и $\overline{D}_0$ на $\overline{B}$. Функция $\tilde{\psi}(w) = \chi(\psi_0(\omega(w)))$, $w \in \partial B$, является гомеоморфизмом единичной окружности ∂B на себя. Положив $\psi(w) = |w|\tilde{\psi}(w/|w|)$ при $w \in B \setminus \{0\}$ и $\tilde{\psi}(0) = 0$, мы продолжим $\tilde{\psi}$ до непрерывного автоморфизма $\overline{B}$ на себя. Тогда, положив $\psi_0(z) = \chi^{-1}(\tilde{\psi}(\omega^{-1}(z)))$ при $z \in D$, продолжим функцию ψ_0 до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D}_0$. Аналогичным

образом функция ψ_0 продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{C} \setminus D$ на $\mathbb{C} \setminus D_0$. Очевидно, что любой полином от функции ψ_0 совпадает на Γ с некоторой функцией класса $R_\psi^*(\Gamma)$. Пусть $z_0 \in D$. Тогда

$$\frac{1}{\psi(z) - \psi(z_0)} = \frac{\psi_0(z)}{1 + (\psi(c) - \psi(z_0))\psi_0(z)} \quad \text{при всех } z \in \Gamma.$$

Так как точка $1/(\psi(z_0) - \psi(c)) \notin \overline{D}_0$, то функция $1 + (\psi(c) - \psi(z_0))\psi_0(z)$ не обращается в нуль на $\overline{D}$. Итак, функция $\zeta/(1 + (\psi(c) - \psi(z_0))\zeta)$ голоморфна на $\overline{D}_0$. Поэтому данная функция принадлежит классу $P(\overline{D}_0)$. Значит, функция

$$\frac{\psi_0(z)}{1 + (\psi(c) - \psi(z_0))\psi_0(z)} \in P_{\psi_0}(\overline{D}),$$

а функция $1/(\psi(z) - \psi(z_0)) \in P_{\psi_0}(\Gamma)$. Поэтому $R_\psi^*(\Gamma) = P_{\psi_0}(\Gamma)$. Последнее утверждение в примере 3 следует из того, что при любом $z_0 \in D$ приращения аргументов функций $1/(\psi(z) - \psi(c))$ и $\psi(z) - \psi(z_0)$ при полном обходе Γ против часовой стрелки имеют противоположные знаки.

Приведем пример компакта, для которого задача 1 не может быть непосредственно сведена к задаче 2.

ПРИМЕР 4. Пусть $X = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – замкнутые жордановы кривые в $\mathbb{C}$, $\widehat{\Gamma}_1 \cap \widehat{\Gamma}_2 = \emptyset$, $\psi - (\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизм. Тогда $P_{\psi_0}(X) \not\subseteq R_\psi^*(X)$ для любого $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -гомеоморфизма ψ_0 .

Рассмотрим функцию f , равную 0 на Γ_1 и 1 на Γ_2 . Определим на компактах $\psi(X)$ и $\psi_0(X)$ функции f_ψ и f_{ψ_0} по формулам $f_\psi(\xi) = f(\psi^{-1}(\xi))$ и $f_{\psi_0}(\eta) = f(\psi_0^{-1}(\eta))$ соответственно. Очевидно, f_{ψ_0} продолжается до функции класса $A(\psi_0(\widehat{X}))$. По теореме Мергеляна [11; с. 44] $f_{\psi_0} \in P(\psi_0(X))$. Поэтому $f \in P_{\psi_0}(X)$. Пусть $Y = \overline{\mathbb{C}} \setminus \widehat{X}$. Так как функция f_ψ равна 0 на $\psi(\Gamma_1)$ и 1 на $\psi(\Gamma_2)$, из теоремы единственности Привалова [12; гл. X, § 2, теорема 1] следует, что f_ψ не может быть продолжена до функции класса $A(\psi(Y))$. Поэтому f_ψ не может быть приближена рациональными функциями с полюсами в $\psi(\Omega_X)$. Итак, $f \notin R_\psi^*(X)$. Поэтому $P_{\psi_0}(X) \not\subseteq R_\psi^*(X)$.

Автор выражает искреннюю благодарность П. В. Парамонову и К. Ю. Федоровскому за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Лаврентьев, “О функциях комплексного переменного, представимых рядами полиномов”, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1990, 149–185.
- [2] А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений”, *УМН*, **22**:6 (1967), 141–199.
- [3] J. L. Walsh, “The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35**:4 (1929), 499–544.
- [4] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973.
- [5] A. G. O’Farrell, “A generalized Walsh–Lebesgue theorem”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **73**:1 (1975), 231–234.
- [6] А. Б. Зайцев, “О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$ ”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 75–87.

- [7] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т.1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [8] Э. Бишоп, “Граничные меры аналитических дифференциалов”, *Некоторые вопросы теории приближений*, ИЛ, М., 1963, 87–100; E. Bishop, “Boundary measures of analytic differentials”, *Duke. Math. J.*, **27**:3 (1960), 331–340.
- [9] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions”, *Selected Topics in Complex Analysis*, Oper. Theory. Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.
- [10] A. Roth, “Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen”, *Comment. Math. Helv.*, **11**:1 (1938), 77–125.
- [11] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, *УМН*, **7**:2 (1952), 31–122.
- [12] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

А. Б. Зайцев

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)
E-mail: abzai75@mail.ru

Поступило

12.01.2010