Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Куликова, О количественном уточнении одной теоремы Бёрча, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 897–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:56:48

О количественном уточнении одной теоремы Бёрча

Т. Ю. Куликова

В работе получено обобщение результатов автора о нулевых подпространствах произвольных нечетных полиномов многих переменных на случай общих нулевых подпространств для нескольких нечетных полиномов. Полученные результаты распространены также на комплексный случай.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В 50-е годы прошлого века Бёрчем [1] установлена

ТЕОРЕМА А. Пусть дано поле $\mathbb{K}$ – алгебраическое продолжение конечной степени поля рациональных чисел. Пусть даны $r, k \in \mathbb{N}$, и пусть $n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(r)}$ – нечетные числа. Тогда существует $N_0 = N_0(n^{(1)}, \dots, n^{(r)}; k, \mathbb{K})$ такое, что для любого $N > N_0$ и для любых однородных полиномов от N переменных

$$Q^{(1)}(\bar{x}), \quad Q^{(2)}(\bar{x}), \quad \dots, \quad Q^{(r)}(\bar{x})$$

над полем $\mathbb{K}$ степеней $n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(r)}$ соответственно существует k -мерное линейное подпространство X над полем $\mathbb{K}$ такое, что

$$Q^{(1)}(\bar{x})|_X \equiv \dots \equiv Q^{(r)}(\bar{x})|_X \equiv 0.$$

(Здесь и далее черта над буквой означает вектор, $Q|_X$ означает ограничение функции Q на множество X .)

Доказательство этой теоремы опиралось на алгебраические методы, методы теории чисел и индукцию, что позволяло оценить число $N_0(n^{(1)}, \dots, n^{(r)}; k, \mathbb{K})$ снизу лишь очень грубо – через многоступенчатые экспоненты быстро растущей высоты. В дальнейшем эта тематика разрабатывалась многими авторами – см., например, [1]–[4].

В 2006 г. в работе [5] Арон и Хайек, используя топологические методы, получили значительное улучшение оценки на N для случая поля $\mathbb{R}$ и одного n -однородного полинома. А именно, ими установлена

ТЕОРЕМА В. Пусть даны $n, k, N \in \mathbb{N}$, n – нечетное, удовлетворяющие соотношению

$$N > k! (\log_2 N)^k \binom{k+n-1}{k-1}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00799а).

Тогда для любого n -однородного полинома $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ существует линейное подпространство $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $\dim X = k$, такое, что

$$Q|_X \equiv 0.$$

Из соотношения (1) можно вывести явную оценку на N :

$$N \geq (k + n)^{3k} \quad (\text{при } k + n \geq 16).$$

В недавней работе автора [6] с помощью модификации рассуждений из [5] получено обобщение теоремы В на случай произвольного нечетного полинома с сохранением порядка оценки числа N .

Цель этой заметки – распространить результат из [6] на случай нескольких произвольных нечетных полиномов, т.е. получить обобщение теоремы Бёрча с улучшенной оценкой на число переменных N . Кроме того, в отличие от работ [5], [6] мы получаем этот результат не только для поля действительных чисел, но и распространяем его на комплексный случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что совокупность нечетных чисел $G = \{n_s\}_{s=1}^q$ задает *структуру степеней* полинома Q , если степени всех мономов этого полинома принадлежат G и для любого $s = 1, \dots, q$ в полиноме Q найдется моном степени n_s .

Всюду далее будем считать, что рассматриваемые полиномы заданы над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ – это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны $r, k, N \in \mathbb{N}$, а также r совокупностей нечетных чисел

$$G^{(t)} = \{n_s^{(t)}\}_{s=1}^{q(t)}, \quad t = 1, 2, \dots, r.$$

Пусть при этом имеет место неравенство

$$N > k! (\log_2 N)^k (M + k), \quad (2)$$

где

$$M = M(G^{(1)}, \dots, G^{(r)}) = \sum_{t=1}^r \sum_{s=1}^{q(t)} \binom{n_s^{(t)} + k - 1}{k - 1}. \quad (3)$$

Тогда для любых полиномов

$$Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(r)}: \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}$$

таких, что структура степеней полинома $Q^{(t)}$ задается множеством $G^{(t)}$, $t = 1, \dots, r$, существует линейное подпространство $X \hookrightarrow \mathbb{K}^N$, $\dim X = k$, такое, что

$$Q^{(t)}|_X \equiv 0, \quad t = 1, \dots, r.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $r = 1$ получаем теорему 1 из [6].

2. Предварительные леммы. Нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 1 [6; лемма 2]. Пусть даны $k \in \mathbb{N}$ и семейство различных мономов от k переменных

$$\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^M, \quad f_j = x_1^{\alpha_1^{(j)}} \cdots x_k^{\alpha_k^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Тогда существует множество векторов

$$S = S(k, M) \subset \mathbb{R}^k, \quad |S| = M,$$

такое, что для любого полинома $R: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, состоящего только из мономов семейства $\mathcal{F}$ (с произвольными коэффициентами), справедлива импликация

$$R|_S \equiv 0 \quad \implies \quad R|_{\mathbb{R}^k} \equiv 0.$$

Эта лемма, очевидно, переносится и на комплексный случай – доказательство (см. [6]) остается верным дословно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Обозначим $L_N = \{1, 2, \dots, N\}$. Упорядоченная система непересекающихся подмножеств множества L_N

$$\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k), \quad \bigsqcup_{i=1}^k A_i = L_N,$$

называется *упорядоченным разбиением* ранга k множества L_N .

ЛЕММА 2 [5; лемма 2]. Пусть даны $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Тогда существуют $p = p(k, N) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее оценке

$$p \leq k! (\log_2 N)^k,$$

и семейство разбиений множества L_N ранга k

$$\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p, \quad \mathcal{A}_I = (A_1^I, \dots, A_k^I),$$

такие, что

$$\forall B \subset L_N, |B| = k \quad \exists \mathcal{A}_I \in \{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p \quad |B \cap A_i^I| = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

3. Доказательство теоремы. Пусть $\{\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^N\}$ – канонический базис в $\mathbb{K}^N$ и $\mathbb{K}^k$ – подпространство, натянутое на $\{\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^k\}$. Рассмотрим множества $\mathcal{F}^{(t)}$, $t = 1, \dots, r$, всех возможных мономов от переменных $x_1, \dots, x_k$, степени которых принадлежат соответственно множествам $G^{(t)}$, $t = 1, 2, \dots, r$. Обозначим

$$M(t) = |\mathcal{F}^{(t)}| = \sum_{s=1}^{q(t)} \binom{n_s^{(t)} + k - 1}{k - 1}. \quad (4)$$

Применим к каждому $\mathcal{F}^{(t)}$, $t = 1, \dots, r$, лемму 1. Получим r систем векторов

$$S^{(t)} = S^{(t)}(k, G) = \{\bar{v}_{(t)}^J\}_{J=1}^{M(t)}, \quad \bar{v}_{(t)}^J \in \mathbb{K}^k, \quad J = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, r,$$

таких, что для любого полинома $R^{(t)}: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}$ со структурой степеней $G^{(t)}$ условие $R^{(t)}|_S \equiv 0$ влечет $R^{(t)}|_{E^k} \equiv 0$.

Пусть $\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p$, $p = p(k, N)$, – система упорядоченных разбиений множества L_N ранга k из леммы 2. Нам потребуются следующие обозначения. Для любого $\bar{x} \in \mathbb{K}^N$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{e}^i$, обозначим

$$P_A(\bar{x}) := \sum_{i \in A} \alpha_i \bar{e}^i, \quad \text{где } A \subset L_N, \quad (\bar{v} \cdot \mathcal{A})(\bar{x}) := \sum_{j=1}^k v_j P_{A_j}(\bar{x}),$$

где $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{K}^k$, $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – произвольное упорядоченное разбиение ранга k .

Рассмотрим пространство $\mathbb{K}^{(M+k)p}$ (где M определено в (3)) и произвольный базис в нем, который нам удобно будет занумеровать следующим образом:

$$\{\bar{e}^{t,I,J}, I = 1, \dots, p, J = 1, \dots, M(t), t = 1, \dots, r\} \cup \{\bar{e}^{I,i}, I = 1, \dots, p, i = 1, \dots, k\}.$$

Рассмотрим многомерный полином $T: \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^{(M+k)p}$,

$$T(\bar{x}) := \sum_{I=1}^p \left(\sum_{t=1}^r \sum_{J=1}^{M(t)} Q^{(t)}((\bar{v}_t^J \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x})) \bar{e}^{t,I,J} + \sum_{i=1}^k T_0((\bar{e}^i \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x})) \bar{e}^{I,i} \right), \quad (5)$$

где $T_0 = x_1 + \dots + x_N$.

Отображение T нечетно, так как Q, T_0 – нечетные полиномы и $(\bar{v} \cdot \mathcal{A})(-\bar{x}) = -(\bar{v} \cdot \mathcal{A})(\bar{x})$ для любых $\mathcal{A}, \bar{v}, \bar{x}$.

Оценка (2) из условия теоремы означает, что $N - 1 \geq (M + k)p$. Используем теорему Борсука: для любого непрерывного нечетного отображения $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где S^n – единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, существует $\bar{x} \in S^n$ такой, что $F(\bar{x}) = 0$. В случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, применяем эту теорему к полиному T , а в случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, применяем ее к “овеществленному” полиному $\bar{T}: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2(M+k)p}$, получающемуся из полинома T стандартным переходом от комплексных величин к их действительным и мнимым частям ($z = x + iy$).

Имеем

$$\exists \bar{x}^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_N^\circ) \quad T(\bar{x}^\circ) = 0. \quad (6)$$

Следовательно, для этого $\bar{x}^\circ$ выполнено

$$Q((\bar{v}_t^J \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = 0, \quad I = 1, \dots, p, \quad J = 1, \dots, M(t), \quad t = 1, \dots, r, \quad (7)$$

$$T((\bar{e}^i \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = 0, \quad I = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, k, \quad (8)$$

Обозначим $B = \text{supp } \bar{x}^\circ$ – множество номеров ненулевых координат вектора $\bar{x}^\circ$.

Докажем, что $|B| \geq k$. Предположим противное: пусть $|B| < k$. Свойство системы $\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p$ (лемма 2) гарантирует нам, что при $0 < |B| < k$

$$\exists \mathcal{A}_I \quad \exists A_j^I \in \mathcal{A}_I \quad |B \cap A_j^I| = \{1\}.$$

Пусть $B \cap A_j^I = \{m\}$. Тогда

$$(\bar{e}^j \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ) = (0, \dots, 0, \underset{m\text{-е место}}{x_m^\circ}, 0, \dots, 0).$$

Поэтому

$$T_0((\bar{e}^j \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = x_m^\circ \neq 0.$$

Противоречие с (8).

Итак, мы доказали, что $|B| \geq k$. Значит, по лемме 2

$$\exists \mathcal{A}_I = (A_1^I, \dots, A_k^I) \quad B \cap A_i^I \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обозначим

$$\bar{x}^i := P_{A_i^I}(\bar{x}^\circ) \neq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Очевидно, что все эти векторы линейно независимы. Рассмотрим полиномы

$$R^{(t)}: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}, \quad R^{(t)}(\bar{y}) := Q^{(t)}\left(\sum_{i=1}^k y_i \bar{x}^i\right) = Q^{(t)}((\bar{y}.\mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)), \quad t = 1, \dots, r.$$

Легко проверить, что при каждом $t = 1, \dots, r$ полином $R^{(t)}$ имеет ту же структуру степеней мономов, что и $Q^{(t)}$, т.е. $G^{(t)}$.

При всех $t = 1, \dots, r$, $J = 1, \dots, M(t)$ выполнено

$$R^{(t)}(\bar{v}_{(t)}^J) = Q^{(t)}((\bar{v}^J.\mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = 0$$

в силу (7). Значит, для любого $t = 1, \dots, r$ выполнено $R^{(t)}(\bar{y}) \equiv 0$ на $\mathbb{K}^k$ по лемме 1. Таким образом, в качестве искомого общего нуль-пространства для полиномов $Q^{(t)}$, $t = 1, \dots, r$, достаточно взять

$$X = \text{span}\{\bar{x}^i\}_{i=1}^k.$$

Действительно, произвольный элемент этого пространства представляется в виде

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k y_i \bar{x}^i, \quad y_1, \dots, y_k \in \mathbb{K}.$$

Отсюда для любого $t = 1, \dots, r$

$$Q^{(t)}(\bar{x}) = Q^{(t)}\left(\sum_{i=1}^k y_i \bar{x}^i\right) = R^{(t)}(\bar{y}) = 0.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность П. А. Бородину за ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. J. Birch, “Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables”, *Mathematica*, **4** (1957), 102–105.
- [2] R. Aron, R. Gonzalo, A. Zagorodnyuk, “Zeroes of real polynomials”, *Linear and Multilinear Algebra*, **48**:2 (2000), 107–115.
- [3] T. D. Wooley, “Linear spaces on cubic hypersurfaces, and pairs of homogeneous cubic equations”, *Bull. London Math. Soc.*, **29**:5 (1997), 556–562.
- [4] T. D. Wooley, “An explicit version of Birch’s theorem”, *Acta Arith.*, **85**:1 (1998), 79–96.
- [5] R. M. Aron, P. Hájek, “Zero sets of polynomials in several variables”, *Arch. Math. (Basel)*, **86**:6 (2006), 561–568.
- [6] Т. Ю. Куликова, “Замечание о нулевых подпространствах нечетных полиномов”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 543–549.

Т. Ю. Куликова
Академиздатцентр “Наука” РАН
E-mail: kulikova@mi.ras.ru

Поступило
02.02.2010