Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Задорожний, Г. А. Курина, Обратная задача вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 231–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:08:22

Обратная задача вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом

В. Г. Задорожний, Г. А. Курина

Найдены условия разрешимости обратной задачи вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом специального вида, а также получена формула для функционала обратной задачи, задаваемого интегралом, который отличается от стандартного наличием запаздывающего аргумента у искомой функции.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом рассмотрим следующую задачу.

Требуется определить, существует ли функционал J , задаваемый интегралом, для которого данное уравнение представляет собой необходимое условие экстремума функционала. Если такой функционал существует, то нужно его найти. Эту задачу называют *обратной задачей вариационного исчисления*. Для обыкновенного дифференциального уравнения такая задача решена в [1].

В настоящей статье найдены условия разрешимости обратной задачи вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом специального вида, а также получена формула для функционала обратной задачи, который отличается от стандартного наличием запаздывающего аргумента у искомой функции.

Напомним, что *дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом* называются дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента. Как указано в [2; с. 9], такие уравнения находят много приложений в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении проблем, связанных с горением в ракетном двигателе, проблем долгосрочного прогнозирования в экономике, ряда биофизических проблем и во многих других областях науки и техники, число которых неуклонно расширяется. В [3; с. 267] говорится, что причина появления эффекта запаздывания в вариационных задачах, связанных с процессами регулирования, иногда связана с затратой времени на передачу сигнала,

а чаще вызвана упрощающими явлением предположениями, в силу которых считают, что действие промежуточных передающих и усиливающих звеньев в системе регулирования сводится к передаче сигнала с запаздыванием.

Сначала приведем необходимое условие экстремума функционала, задаваемого интегралом, который отличается от стандартного наличием запаздывающего аргумента у искомой функции.

2. Необходимое условие экстремума функционала с запаздыванием. Рассмотрим задачу об отыскании экстремума для функционала вида

$$J(y(\cdot)) = \int_a^b F(x, y(x), y(x - \theta), y'(x)) dx \quad (2.1)$$

при заданных условиях

$$y(x) = \varphi(x), \quad a - \theta \leq x \leq a, \quad y(b) = y_b, \quad (2.2)$$

где $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $y(x) \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < b - a$ и y_b – заданные числа, функции $\varphi: [a - \theta, a] \rightarrow \mathbb{R}$ и $F: [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ заданы, начальная функция φ предполагается непрерывно дифференцируемой, а функция F – непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам, кроме первого. В качестве допустимых функций $y(\cdot)$ берутся абсолютно непрерывные функции из пространства W_2^1 .

Отметим, что впервые вариационные задачи с запаздывающим аргументом при условиях вида (2.2) были рассмотрены в [3; с. 267].

Для сокращения записи не всегда будем указывать значения аргументов, от которых зависят функции. В частности, будем кратко обозначать $F = F(x, y(x), y(x - \theta), y'(x))$. Также, следуя [4], будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= F(x + \theta, y(x + \theta), y(x), y'(x + \theta)), \\ \Phi &= \begin{cases} F + \tilde{F}, & x \in [a, b - \theta], \\ F, & x \in (b - \theta, b]. \end{cases} \end{aligned}$$

В дальнейшем F_y (соответственно $F_{y'}$) означает частную производную функции F по переменной y (соответственно y'), аналогичные обозначения используются и для производных второго порядка.

Сформулируем теорему из [4] (см. также [5]), дающую необходимое условие экстремума для задачи вида (2.1), (2.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть экстремум функционала (2.1) при условиях (2.2) достигается на элементе $y(\cdot) \in W_2^1$. Тогда почти всюду справедливо равенство

$$\Phi_y - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} = 0. \quad (2.3)$$

Последнее соотношение является обобщением уравнения Эйлера на случай функционала с запаздывающим аргументом.

Получим утверждение теоремы 2.1, опираясь на известные результаты об условиях оптимальности управления в форме принципа максимума Понтрягина для задач с запаздыванием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Введем новую функцию $u(x)$ (управление) следующим образом:

$$u(x) = y'(x) \quad (2.4)$$

и будем рассматривать задачу минимизации функционала (2.1). Тогда задача (2.1), (2.2) примет форму задачи оптимального управления с запаздыванием.

Для задач вида (2.1), (2.2), (2.4) хорошо известны необходимые условия оптимальности управления (см., например, [6; с. 240–254]). Отметим, что отсутствие независимой переменной в подынтегральной функции из критерия качества в [6] несущественно, поскольку стандартным приемом, а именно, увеличением размерности переменной состояния на единицу путем добавления к состоянию новой компоненты (независимой переменной), удовлетворяющей уравнению $x' = 1$, приходим к задаче без независимой переменной в подынтегральной функции.

Следуя [6; с. 242], введем вспомогательную непрерывную вектор-функцию (сопряженную переменную) $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ и запишем скалярную функцию H (функцию Понтрягина) переменных $\psi(x)$, x , $y(x)$, $y(x - \theta)$, $u(x)$. Она имеет вид

$$H = \psi_0 F + \psi_1 u + \psi_2. \quad (2.5)$$

При этом вспомогательные переменные ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \psi'_i(x) &= -H_{y^i(x)}(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta), u(x)) \\ &\quad - H_{y^i(x)}(\psi(x + \theta), x + \theta, y(x + \theta), y(x), u(x + \theta)), \quad x \in [a, b - \theta], \\ \psi'_i(x) &= -H_{y^i(x)}(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta), u(x)), \quad x \in (b - \theta, b], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $i = 0, 1, 2$, $y^0 = \int_0^x F dx$, $y^1 = y$, $y^2 = x$. Через $M(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta))$ обозначим верхнюю грань значений функции H при фиксированных $\psi(x)$, x , $y(x)$, $y(x - \theta)$. В силу теоремы 20 из [6; с. 243] для оптимального управления $u(x)$ необходимо существование такой ненулевой вектор-функции $\psi(x)$, удовлетворяющей системе (2.6), что выполнены следующие условия:

1) для всех $x \in [a, b]$ выполняется условие максимума

$$H(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta), u(x)) = M(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta)); \quad (2.7)$$

2) в конечной точке $x = b$ выполнены соотношения

$$\psi_0(b) \leq 0, \quad M(\psi(b), b, y(b), y(b - \theta)) = 0. \quad (2.8)$$

Из системы (2.6) и вида H следует, что

$$\psi_0 = \text{const}. \quad (2.9)$$

Поскольку на управление не налагается никаких ограничений, из (2.7) вытекает равенство

$$H_u(\psi(x), x, y(x), y(x - \theta), u(x)) = 0. \quad (2.10)$$

Учитывая соотношения (2.4), (2.5), из (2.10), (2.6), (2.8), (2.9) получаем

$$\psi_0 F_{y'} + \psi_1(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (2.11)$$

$$\psi_1'(x) = -\psi_0 F_{y(x)} - \psi_0 \tilde{F}_{y(x)}, \quad x \in [a, b - \theta], \quad (2.12)$$

$$\psi_1'(x) = -\psi_0 F_{y(x)}, \quad x \in (b - \theta, b], \quad (2.13)$$

$$\psi_0 \leq 0, \quad \psi_0 F(b, y(b), y(b - \theta), y'(b)) + \psi_1(b)u(b) + \psi_2(b) = 0. \quad (2.14)$$

Докажем, что $\psi_0 \neq 0$. Предположим противное. Тогда из (2.6) с учетом (2.5) получаем, что $\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = \text{const}$. Из (2.11) следует, что $\psi_1 = 0$, из (2.14) – $\psi_2 = 0$, что противоречит нетривиальности ψ . Значит, без ограничения общности можем положить $\psi_0 = -1$.

Дифференцируя (2.11) по x , с учетом (2.12), (2.13) получаем необходимое условие минимума функционала (2.1) (аналог уравнения Эйлера) в виде

$$F_{y(x)} + \tilde{F}_{y(x)} - \frac{d}{dx} F_{y'(x)} = 0, \quad x \in [a, b - \theta], \quad (2.15)$$

$$F_{y(x)} - \frac{d}{dx} F_{y'(x)} = 0, \quad x \in (b - \theta, b], \quad (2.16)$$

который соответствует (2.3).

Поскольку задача максимизации функционала $J(y(\cdot))$ эквивалентна задаче отыскания минимума для $-J(y(\cdot))$, в уравнениях (2.15), (2.16) нужно F заменить на $-F$, что приводит к прежней форме.

Итак, решение задачи (2.1), (2.2) должно удовлетворять системе (2.15), (2.16) и условиям (2.2).

Предполагая, что существуют все необходимые производные, из (2.15), (2.16) получаем аналог уравнения Эйлера в развернутом виде:

$$\begin{aligned} F_{y(x)} + \tilde{F}_{y(x)} - F_{xy'(x)} - F_{y(x)y'(x)}y'(x) \\ - F_{y(x-\theta)y'(x)}y'(x-\theta) - F_{y'(x)y'(x)}y''(x) = 0, \quad x \in [a, b - \theta], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} F_{y(x)} - F_{xy'(x)} - F_{y(x)y'(x)}y'(x) \\ - F_{y(x-\theta)y'(x)}y'(x-\theta) - F_{y'(x)y'(x)}y''(x) = 0, \quad x \in (b - \theta, b]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, соотношения (2.15), (2.16) (соответственно (2.17), (2.18)) являются необходимыми условиями экстремума функционала (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если функция F линейно зависит от $y'(x)$, то уравнения (2.17), (2.18) не будут содержать второй производной и управление в задаче оптимального управления, рассматриваемой в доказательстве теоремы 2.1, будет являться особым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если вместо значения в конечной точке $x = b$ (см. (2.2)) задавать, как в [7; с. 392], значение функции y при $x \in [b - \theta, b]$, то аналог уравнения Эйлера для вариационной задачи с отклоняющимся аргументом при таком задании условий на искомую функцию вблизи правого конца $x = b$ приводится в [7; с. 391–395] для функционала с произвольным числом производных. Уравнение (44) из [7; с. 394] при $m = 1$, $n = 0$ совпадает с (2.15).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Проблемы существования, единственности, гладкости, а также приближенные методы для решения краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом, возникающих в вариационных задачах, обсуждаются в обзорной статье [4].

3. Обратная задача вариационного исчисления. Теперь для заданного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом попытаемся найти функционал вида (2.1), для которого данное уравнение представляет необходимое условие экстремума. Значит, фактически нужно найти функцию F четырех аргументов, определяющую функционал (2.1).

Итак, пусть имеется некоторое уравнение, зависящее от

$$x, y(x), y(x - \theta), y(x + \theta), y'(x), y'(x - \theta), y'(x + \theta), y''(x), y''(x - \theta), y''(x + \theta).$$

Из необходимого условия (2.17), (2.18) экстремума функционала вида (2.1) следует, что это уравнение должно задаваться разными формулами на двух промежутках $[a, b - \theta]$ и $(b - \theta, b]$. Также видно, что оно должно быть линейным относительно $y'(x - \theta)$ и $y''(x)$ и не должно содержать $y''(x - \theta)$, $y''(x + \theta)$. Таким образом, в силу (2.17), (2.18) данное уравнение должно иметь следующий вид:

$$Ay''(x) + B + Cy'(x - \theta) + \tilde{D} = 0, \quad x \in [a, b - \theta], \quad (3.1)$$

$$Ay''(x) + B + Cy'(x - \theta) = 0, \quad x \in (b - \theta, b], \quad (3.2)$$

где функции A, B, C, D зависят от $x, y(x), y(x - \theta), y'(x)$; будем считать их дважды непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам. Из полученных ниже формул будет видно, что эти условия гладкости можно ослабить.

Уточним постановку обратной задачи. Для уравнения (3.1), (3.2) требуется найти функционал вида (2.1), левая часть уравнения Эйлера для которого совпадает с левой частью уравнения (3.1), (3.2) при всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях $y(\cdot)$, удовлетворяющих условию (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как отмечено в [7; с. 396], для уравнений, являющихся аналогом уравнения Эйлера для вариационных задач с отклоняющимся аргументом, характерны решения, имеющие разрывы второй производной в точках $a, a + \theta, a + 2\theta, \dots$ (или в точках $b - \theta, b - 2\theta, \dots$). Поэтому в этой монографии в качестве класса допустимых функций при другом задании краевых условий (см. замечание 2.2) рассматриваются функции, непрерывные на $(a, b - \theta)$ и имеющие две непрерывные производные на интервалах $(a, a + \theta)$, $(a + \theta, a + 2\theta), \dots$, а в точках $a + k\theta$ имеющие правые и левые производные первого и второго порядков, вообще говоря, между собой не совпадающие. Значит, в общем случае равенства (3.1), (3.2) и (2.17), (2.18) должны выполняться лишь почти всюду.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы обратная задача вариационного исчисления имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции, входящие в (3.1), (3.2), удовлетворяли условиям*

$$Cy'(x) - Ay_{y(x-\theta)} = 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.3)$$

$$By'_{y'(x)} - Ax - y'(x)Ay_{y(x)} = 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.4)$$

$$Dy'_{y'(x)} + C = 0, \quad x \in [a + \theta, b], \quad (3.5)$$

$$Dy_{y(x)} + \int_0^{y'(x)} Cy_{y(x)} dy'(x) - G_{y(x)y(x-\theta)} = 0, \quad x \in [a + \theta, b], \quad (3.6)$$

где

$$G = G(x, y(x), y(x - \theta)) = \int_0^{y(x)} \left(B - \int_0^{y'(x)} By'_{y'(x)} dy'(x) + E_x \right) dy(x) + Q, \quad (3.7)$$

$$Q = \begin{cases} 0, & x \in (b - \theta, b], \\ \int_0^{y(x)} \left(\tilde{D} + \int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{C} dy'(x + \theta) - \tilde{G}_{y(x)} \right) dy(x), & x \in [a, b - \theta], \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E &= E(x, y(x), y(x - \theta)) \\ &= \int_0^{y(x-\theta)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)} dy'(x) - C \right) dy(x - \theta), \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (3.8)$$

функция Q при $x \in [a, b - \theta]$ определяется последовательно на промежутках $(b - k\theta, b - (k - 1)\theta]$, $k = 2, \dots, b - k\theta \geq a$.

При этом функцию F , определяющую решение обратной задачи вариационного исчисления – функционал вида (2.1), можно найти следующим образом:

$$F = - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A dy'(x) \right) dy'(x) + Ey'(x) + G, \quad x \in [a, b]. \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в задаче (2.1), (2.2) отбросить запаздывание, то в теореме 3.1 остается одно условие (3.4), совпадающее с (3.5) из [1], и выражение (3.9), дающее решение соответствующей обратной задачи вариационного исчисления, совпадает с подынтегральной функцией (3.6) из [1; с. 53], если в качестве первообразных взять интегралы с переменным верхним пределом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из (3.3)–(3.6) видно, что для того чтобы обратная задача вариационного исчисления для (3.1), (3.2) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы функции B , C , D имели в некотором смысле определенные выражения, задаваемые функцией A , стоящей в (3.1), (3.2) перед второй производной.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если окажется, что какой-либо из интегралов в формулировке теоремы 3.1 не существует, то можно заменить нижний предел интегрирования на любое число такое, чтобы указанные интегралы существовали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Необходимость. Пусть обратная задача имеет решение. Тогда левые части в (3.1), (3.2) совпадают с левыми частями в (2.17), (2.18) соответственно для некоторой функции F . Возьмем произвольное $x_0 \in [a, b]$. За счет выбора функции $y(\cdot)$ значение $y''(x_0)$ может быть выбрано любым числом независимо от значений $y(x_0)$, $y(x_0 \pm \theta)$, $y'(x_0)$, $y'(x_0 \pm \theta)$, поэтому коэффициенты при $y''(x)$ должны быть равны. Аналогично, должны совпадать и коэффициенты при $y'(x - \theta)$. Таким образом, должны выполняться следующие равенства (3.10)–(3.13):

$$-F_{y'(x)y'(x)} = A, \quad x \in [a, b], \quad (3.10)$$

$$-F_{y(x-\theta)y'(x)} = C, \quad x \in [a, b], \quad (3.11)$$

$$F_{y(x)} + \tilde{F}_{y(x)} - F_{xy'(x)} - F_{y(x)y'(x)}y'(x) = B + \tilde{D}, \quad x \in [a, b - \theta], \quad (3.12)$$

$$F_{y(x)} - F_{xy'(x)} - F_{y(x)y'(x)}y'(x) = B, \quad x \in (b - \theta, b]. \quad (3.13)$$

Из (3.10) получаем

$$F_{y'(x)} = - \int_0^{y'(x)} A dy'(x) + E(x, y(x), y(x - \theta)), \quad x \in [a, b], \quad (3.14)$$

$$F = - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A dy'(x) \right) dy'(x) + E(x, y(x), y(x - \theta)) y'(x) + G(x, y(x), y(x - \theta)), \quad x \in [a, b], \quad (3.15)$$

где E и G – функции указанных аргументов, обладающие нужной гладкостью.

Подставляя выражение (3.14) для $F_{y'(x)}$ в (3.11), получаем

$$\int_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)} dy'(x) - C = E_{y(x-\theta)}, \quad x \in [a, b]. \quad (3.16)$$

Так как функция E не должна явным образом зависеть от $y'(x)$, то, дифференцируя последнее равенство по $y'(x)$, приходим к (3.3).

Если равенство (3.3) выполняется, то левая часть равенства (3.16) не зависит явным образом от $y'(x)$.

Подставим (3.15) в (3.13):

$$- \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) + y'(x) \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) - B = E_x - G_{y(x)}, \quad x \in (b - \theta, b]. \quad (3.17)$$

Так как функции E и G не зависят от $y'(x)$, то, дифференцируя последнее равенство по $y'(x)$, получаем равенство (3.4) при $x \in (b - \theta, b]$.

Если равенство (3.4) выполняется, то левая часть равенства (3.17) не зависит явным образом от $y'(x)$.

Подставим (3.15) в (3.12):

$$\begin{aligned} & - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) + y'(x) \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \\ & - \int_0^{y'(x+\theta)} \left(\int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{A}_{y(x)} dy'(x+\theta) \right) dy'(x+\theta) - B - \tilde{D} \\ & = E_x - \tilde{E}_{y(x)} y'(x+\theta) - G_{y(x)} - \tilde{G}_{y(x)}, \quad x \in [a, b - \theta]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу (3.16) отсюда имеем

$$\begin{aligned} & - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) + y'(x) \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \\ & - \int_0^{y'(x+\theta)} \left(\int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{A}_{y(x)} dy'(x+\theta) \right) dy'(x+\theta) - B - \tilde{D} \\ & = E_x - \left(\int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{A}_{y(x)} dy'(x+\theta) - \tilde{C} \right) y'(x+\theta) \\ & - G_{y(x)} - \tilde{G}_{y(x)}, \quad x \in [a, b - \theta]. \end{aligned}$$

Из (3.3) следует, что $\tilde{A}_{y(x)} = \tilde{C}_{y'(x+\theta)}$, поэтому из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} & - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) + y'(x) \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \\ & \quad - B - E_x - \tilde{D} - \int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{C} dy'(x+\theta) \\ & = -G_{y(x)} - \tilde{G}_{y(x)}, \quad x \in [a, b - \theta]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Дифференцируя это равенство по $y'(x)$, получаем равенство (3.4) при $x \in [a, b - \theta]$.

Если (3.4) выполняется, то левая часть равенства (3.19) не зависит явным образом от $y'(x)$. Дифференцируя (3.19) по $y'(x + \theta)$, имеем

$$-\tilde{D}_{y'(x+\theta)} - \tilde{C} = 0, \quad x \in [a, b - \theta].$$

Отсюда следует равенство (3.5).

Если равенство (3.5) выполняется, то левая часть равенства (3.19) не зависит явным образом от $y'(x + \theta)$.

Используя условие (3.4), из (3.17), (3.19) получаем равенства

$$B - \int_0^{y'(x)} B_{y'(x)} dy'(x) + E_x = G_{y(x)}, \quad x \in (b - \theta, b], \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & B - \int_0^{y'(x)} B_{y'(x)} dy'(x) + E_x + \tilde{D} + \int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{C} dy'(x+\theta) \\ & = G_{y(x)} + \tilde{G}_{y(x)}, \quad x \in [a, b - \theta]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Учитывая независимость функций B , E , G от $y(x + \theta)$, путем дифференцирования последнего равенства по $y(x + \theta)$ приходим к условию (3.6). Если равенство (3.6) выполняется, то получаемое из (3.21) выражение для $G_{y(x)}$ не зависит явным образом от $y(x + \theta)$.

Достаточность. Будем предполагать, что выполнены условия (3.3)–(3.6). Покажем, что при этих условиях функционал (2.1), определяемый функцией F из (3.9), является решением обратной задачи вариационного исчисления, т.е. необходимое условие экстремума для этого функционала при условиях (2.2), определяемое соотношениями (2.17), (2.18), совпадает с (3.1), (3.2). Отметим, что задача определения общего вида функции F здесь не ставится.

Из (3.8) следует, что выражение для функции E формально зависит от $y'(x)$, а из (3.7) вытекает, что выражение для G формально зависит от $y'(x)$, $y(x + \theta)$, $y'(x + \theta)$. Но в силу условия (3.3) выражения для E , G не зависят в явном виде от $y'(x)$, а в силу условий (3.5), (3.6) в выражении для функции G нет зависимости от $y'(x + \theta)$, $y(x + \theta)$ соответственно.

Учитывая, что E , G не зависят явным образом от $y'(x)$, из (3.9) имеем

$$\begin{aligned} F_{y(x)} &= - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + E_{y(x)} y'(x) + G_{y(x)}, \\ \tilde{F}_{y(x)} &= - \int_0^{y'(x+\theta)} \left(\int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{A}_{y(x)} dy'(x+\theta) \right) dy'(x+\theta) + \tilde{E}_{y(x)} y'(x) + \tilde{G}_{y(x)}, \end{aligned}$$

$$F_{y'(x)} = - \int_0^{y'(x)} A dy'(x) + E,$$

$$F_{xy'(x)} = - \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) + E_x,$$

$$F_{y(x)y'(x)} = - \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) + E_{y(x)},$$

$$F_{y(x-\theta)y'(x)} = - \int_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)} dy'(x) + E_{y(x-\theta)},$$

$$F_{y'(x)y'(x)} = -A.$$

Запишем (2.18):

$$\begin{aligned} & - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + E_{y(x)} y'(x) + G_{y(x)} \\ & + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) - E_x + \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) - E_{y(x)} \right) y'(x) \\ & + \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)} dy'(x) - E_{y(x-\theta)} \right) y'(x-\theta) + Ay''(x) = 0, \quad x \in (b-\theta, b]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.7), (3.8) и (3.4) получаем (3.2).

Теперь запишем (2.17):

$$\begin{aligned} & - \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + E_{y(x)} y'(x) + G_{y(x)} \\ & - \int_0^{y'(x+\theta)} \left(\int_0^{y'(x+\theta)} \tilde{A}_{y(x)} dy'(x+\theta) \right) dy'(x+\theta) + \tilde{E}_{y(x)} y'(x+\theta) + \tilde{G}_{y(x)} \\ & + \int_0^{y'(x)} A_x dy'(x) - E_x + \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) - E_{y(x)} \right) y'(x) \\ & + \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)} dy'(x) - E_{y(x-\theta)} \right) y'(x-\theta) + Ay''(x) = 0, \quad x \in [a, b-\theta]. \end{aligned}$$

Учитывая (3.7), (3.8), (3.3) и (3.4), отсюда получаем (3.1).

Отметим, что при преобразовании двух последних выражений использовалось легко проверяемое тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^{y'(x)} \left(\int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x) \right) dy'(x) + \int_0^{y'(x)} y'(x) A_{y(x)} dy'(x) \\ & = y'(x) \int_0^{y'(x)} A_{y(x)} dy'(x). \end{aligned}$$

4. Линейный случай. Приведем условия разрешимости и решение обратной задачи вариационного исчисления для линейного дифференциального уравнения

второго порядка с отклоняющимся аргументом. Из рассуждений в начале п. 3 вытекает, что в этом случае данное уравнение должно иметь следующий вид (см. (3.1), (3.2)):

$$A(x)y''(x) + B_1(x) + B_2(x)y(x) + B_3(x)y(x - \theta) + B_4(x)y'(x) + C(x)y'(x - \theta) + D_1(x + \theta)y(x + \theta) + D_2(x + \theta)y'(x + \theta) = 0, \quad x \in [a, b - \theta], \quad (4.1)$$

$$A(x)y''(x) + B_1(x) + B_2(x)y(x) + B_3(x)y(x - \theta) + B_4(x)y'(x) + C(x)y'(x - \theta) = 0, \quad x \in (b - \theta, b]. \quad (4.2)$$

Сравнивая (4.1) с (3.1), а (4.2) с (3.2), в этом случае имеем

$$\begin{aligned} A &= A(x), & B &= B_1(x) + B_2(x)y(x) + B_3(x)y(x - \theta) + B_4(x)y'(x), \\ C &= C(x), & D &= D_1(x)y(x) + D_2(x)y'(x). \end{aligned}$$

Условие (3.3) здесь выполняется, а условия (3.4), (3.5), (3.6) принимают соответственно вид

$$B_4(x) - A'(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (4.3)$$

$$D_2(x) + C(x) = 0, \quad x \in [a + \theta, b], \quad (4.4)$$

$$D_1(x) - B_3(x) + C'(x) = 0, \quad x \in [a + \theta, b]. \quad (4.5)$$

Значит, коэффициенты в (4.1), (4.2) не могут быть произвольными.

Функция F , определяемая посредством равенства (3.9), при условиях (4.3)–(4.5) выглядит следующим образом:

$$F = -\frac{1}{2} A(x)(y'(x))^2 + Ey'(x) + G, \quad x \in [a, b], \quad (4.6)$$

где

$$E = -C(x)y(x - \theta), \quad (4.7)$$

$$G = (B_1(x) + (B_3(x) - C'(x))y(x - \theta))y(x) + \frac{1}{2} B_2(x)(y(x))^2. \quad (4.8)$$

Несложно непосредственно проверить, что, действительно, соотношения (4.1), (4.2) являются необходимым условием экстремума функционала (2.1) с функцией F из (4.6) при условиях (2.2), если имеют место соотношения (4.3)–(4.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Как уже говорилось ранее, выражение для функции F в теореме 3.1 указывается не общего вида, т.е. F может иметь другую форму, чем (3.9). Например, если в левую часть уравнения (4.1) добавить слагаемое $D_0(x + \theta)y(x)$, то при условиях (4.3)–(4.5) наряду с функцией F , получаемой из (4.6)–(4.8) путем замены $B_2(x)$ на $B_2(x) + D_0(x + \theta)$, решение обратной задачи вариационного исчисления определяется при помощи формул (4.6), (4.7), где

$$G = (B_1(x) + (B_3(x) - C'(x))y(x - \theta))y(x) + \frac{1}{2} B_2(x)(y(x))^2 + \frac{1}{2} D_0(x)(y(x - \theta))^2.$$

5. Иллюстративный пример. Решим обратную задачу вариационного исчисления для уравнений вида

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y(x), y(x - \theta), y'(x), y'(x - \theta), y''(x)) \\ &= -(2x^2 - \alpha y(x - \theta))y''(x) + 24y(x) - 4xy'(x) + \alpha y'(x)y'(x - \theta) = 0, \\ & \qquad \qquad \qquad x \in (b - \theta, b], \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\varphi(x, y(x), y(x - \theta), y'(x), y'(x - \theta), y''(x)) - \frac{\alpha}{2}(y'(x + \theta))^2 = 0, \quad x \in [a, b - \theta]. \quad (5.2)$$

Здесь α – некоторый параметр, $0 < \theta < b - a$. При $\theta = 0$, $\alpha = 0$ получаем пример из [1; с. 58] без отклоняющегося аргумента.

Сравнивая (5.1) с (3.2), а (5.2) с (3.1), имеем в нашем случае

$$A = -2x^2 + \alpha y(x - \theta), \quad B = 24y(x) - 4xy'(x), \quad C = \alpha y'(x), \quad D = -\frac{\alpha}{2}(y'(x))^2.$$

Легко проверить, что равенства (3.3)–(3.6) из теоремы 3.1 (условия разрешимости обратной задачи вариационного исчисления) здесь выполняются.

Используя (3.9), можем записать одну из функций F , которая определяет искомый функционал вида (2.1):

$$F = 12(y(x))^2 + x^2(y'(x))^2 - \frac{\alpha}{2}y(x - \theta)(y'(x))^2. \quad (5.3)$$

Если записать необходимое условие экстремума для функционала (2.1) с функцией F , определяемой (5.3), в виде (2.17), (2.18), то эти соотношения совпадут с (5.1), (5.2). Значит, обратная задача вариационного исчисления для системы (5.1), (5.2) решена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Задорожний, *Методы вариационного анализа*, ИКИ, М.–Ижевск, 2006.
- [2] Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971.
- [3] Л. Э. Эльсгольц, *Качественные методы в математическом анализе*, Гостехиздат, М., 1955.
- [4] G. Kamenskii, “On boundary value problems connected with variational problems for nonlocal functionals”, *Funct. Differ. Equ.*, **12**, 2005, 245–270.
- [5] Г. А. Каменский, “Асимметричные вариационные задачи для функционалов с отклоняющимся аргументом”, *Укр. матем. журн.*, **41**, 1989, 602–609.
- [6] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, 3-е изд., Наука, М., 1976.
- [7] Л. С. Гноенский, Г. А. Каменский, Л. Э. Эльсгольц, *Математические основы теории управляемых систем*, Наука, М., 1969.

В. Г. Задорожний

Воронежский государственный университет

E-mail: zadorozhny@amm.vsu.ru

Поступило

20.11.2009

Г. А. Курина

Воронежская государственная лесотехническая академия

E-mail: kurina@math.vsu.ru