Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Степанов, Гладкие трехмерные канонические пороги, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 285–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:30:35

Гладкие трехмерные канонические пороги

Д. А. Степанов

Если X – алгебраическое многообразие с не более чем каноническими особенностями и S – $\mathbb{Q}$ -Картье гиперповерхность на X , канонический порог пары (X, S) определяется как точная верхняя грань таких действительных c , что пара (X, cS) канонична. Мы показываем, что множество всех возможных канонических порогов пар (X, S) , где X гладкое и трехмерное, удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Также мы выводим формулу для канонического порога пары $(\mathbb{C}^3, S)$, где S – особенность Брискорна.

Библиография: 13 названий.

*Посвящается светлой памяти моего научного руководителя
Василия Алексеевича Исковских*

1. Введение

Пусть $P \in X$ – росток комплексного алгебраического многообразия X с не более чем каноническими особенностями. Пусть S – гиперповерхность (не обязательно неприводимая или приведенная) в X , являющаяся дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье, т.е. для некоторого натурального r дивизор rS может быть локально задан на X одним уравнением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Канонический порог* пары (X, S) – это

$$\mathrm{ct}_P(X, S) = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid \text{пара } (X, cS) \text{ канонична}\}.$$

Если в определении выше потребовать, чтобы многообразие X и пара (X, cS) были лог каноническими, мы получим аналогичное понятие *лог канонического порога* $\mathrm{lct}_P(X, S)$, которое, вероятно, известно лучше (см., например, [1; части 8–10]). Так же, как это делается для лог канонического порога, рассматривая подходящее разрешение особенностей пары (X, S) , можно показать, что число $\mathrm{ct}_P(X, S)$ рационально и $\mathrm{ct}_P(X, S) \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1987.2008.1) и Программы развития научного потенциала высшей школы Министерства образования и науки России (грант № 2.1.1/227).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Множество n -мерных канонических порогов* – это множество

$$\mathcal{T}_n^{\text{can}} = \{\text{ct}_P(X, S) \mid \dim X = n\},$$

где (X, S) пробегает все пары, удовлетворяющие условиям определения 1.1.

Обозначим через $\mathcal{T}_n^{\text{lc}}$ соответствующее множество n -мерных лог канонических порогов. Хорошо известна следующая гипотеза об этом множестве, первая часть которой предложена В. В. Шокуровым, а вторая – Колларом.

ГИПОТЕЗА 1.3. (i) *Множество $\mathcal{T}_n^{\text{lc}}$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (у.о.в.ц.).*

(ii) *Множество точек накопления множества $\mathcal{T}_n^{\text{lc}}$ совпадает с $\mathcal{T}_{n-1}^{\text{lc}} \setminus \{1\}$.*

Эти гипотезы очень важны для программы минимальных моделей. Аналогом гипотезы 1.3 (i) для канонических порогов служит

ГИПОТЕЗА 1.4. *Множество $\mathcal{T}_n^{\text{can}}$ удовлетворяет у.о.в.ц.*

Интерес к гипотезе 1.4 обусловлен ее возможными приложениями в бирациональной геометрии. Например, из нее следует обрыв цепочек линков в так называемой программе Саркисова. Сейчас этот обрыв доказывается путем сведения задачи к у.о.в.ц. лог канонических порогов [2]. Также гипотеза 1.4 является частным случаем гипотезы Биркара и Шокурова об a -lc порогах [3; гипотеза 1.7]. Мы затрудняемся сказать определенно, будет ли правдоподобным аналог гипотезы 1.3 (ii) для канонических порогов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Лог канонический порог $\text{lct}_P(X, S)$ можно изучать не только с точки зрения алгебраической геометрии. Он имеет интерпретации в терминах сходимости некоторых интегралов, полиномов Бернштейна–Сато и т.д. (см. [1], [4]). Было бы интересно найти подобные интерпретации канонического порога.

Насколько нам известно, все эти гипотезы остаются открытыми в своей общей постановке. Однако некоторые важные случаи установлены. Обозначим $\mathcal{T}_{n,\text{ns}}^{\text{lc}}$ – множество $\{\text{lct}_P(X, S) \mid \dim X = n, X \text{ гладко}\}$ гладких n -мерных лог канонических порогов. Де Ферне и Мустаца [5] и Коллар [4] доказали аналог гипотезы 1.3 (ii) для множества $\mathcal{T}_{n,\text{ns}}^{\text{lc}}$. Теорема де Ферне, Айна и Мустацы [6] доказывает у.о.в.ц. для множества $\mathcal{T}_{n,\text{ns}}^{\text{lc}}$ для любого n (в действительности на X допускаются особенно-сти некоторых ограниченных типов). Что касается канонических порогов, имеется теорема Прохорова [7; теорема 1.4], описывающая верхнюю часть множества $\mathcal{T}_3^{\text{can}}$ 3-мерных канонических порогов.

ТЕОРЕМА 1.6 (Прохоров). *Если $c = \text{ct}_P(X, S)$ для некоторого 3-мерного многообразия X и $c \neq 1$, то $c \leq 5/6$ и граничное значение достигается. Более того, если X особо, то $c \leq 4/5$ и граничное значение достигается.*

В этой работе мы также ограничиваемся частным случаем гипотезы 1.4. А именно, мы доказываем ее для гладких 3-мерных ростков $P \in X$. Пусть

$$\mathcal{T}_{3,\text{ns}}^{\text{can}} = \{\text{ct}_P(X, S) \mid \dim X = 3, X \text{ гладко}\}$$

– множество гладких 3-мерных канонических порогов. Наш главный результат заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 1.7. *Множество $\mathcal{T}_{3,ns}^{\text{can}}$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей.*

Как нетрудно убедиться, $\mathcal{T}_{n-1,ns}^{\text{can}} \subseteq \mathcal{T}_{n,ns}^{\text{can}}$, поэтому доказав у.о.в.ц. в некоторой размерности мы автоматически получаем его во всех меньших размерностях. Доказательство теоремы 1.7 содержится в разделе 2. Его основная идея – использование классификации 3-мерных стягиваний в гладкие точки Кавакиты [8]. В этой части мы предполагаем некоторое знакомство читателя с программой минимальных моделей [9]. В разделе 3 мы выводим формулу для канонического порога 3-мерной особенности Брискорна. Интересно, что она оказывается гораздо более громоздкой, чем соответствующая формула для лог канонического порога. В разделе 4 мы немного усиливаем теорему 1.6, показывая, что промежуток между числами $4/5$ и $5/6$ не содержит 3-мерных канонических порогов (см. теорему 4.1).

2. Условие обрыва возрастающих цепей для гладких 3-мерных канонических порогов

2.1. Сведение к экстремальному стягиванию. Пусть $P \in X$ – росток терминального $\mathbb{Q}$ -факториального комплексного 3-мерного алгебраического многообразия и S – эффeктивный целый дивизор на X . Пусть $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – вложенное разрешение особенностей пары (X, S) . Через E_i , $i \in I$, мы обозначаем простые исключительные дивизоры разрешения g и через $\tilde{S}$ – собственный прообраз дивизора S . Тогда выполняются соотношения

$$K_{\tilde{X}} = g^* K_X + \sum_{i \in I} a_i E_i, \quad g^* S = \tilde{S} + \sum_{i \in I} b_i E_i$$

для некоторых рациональных чисел a_i, b_i . Здесь $K_{\tilde{X}}$ и K_X обозначают канонические классы многообразий $\tilde{X}$ и X соответственно. Пусть теперь $c \in \mathbb{Q}$ – канонический порог пары (X, S) . Это значит, что пара (X, cS) канонична, т.е. если мы напишем

$$K_{\tilde{X}} + c\tilde{S} = g^*(K_X + cS) + \sum_{i \in I} (a_i - cb_i)E_i,$$

то $a_i - cb_i \geq 0$ для всех $i \in I$. Это влечет оценку $c \leq a_i/b_i$ для всех i , и, так как мы предполагаем, что c – порог, это также влечет равенство

$$c = \text{ct}_P(X, S) = \min_{i \in I} \frac{a_i}{b_i}.$$

(Всегда можно предполагать, что разрешение g имеет хотя бы один исключительный дивизор с дискрепантностью 0 относительно (X, cS) ; это следует из [1; следствие 3.13].) Это показывает, в частности, что число c действительно рационально. Если для дивизора E_i мы имеем $a_i - cb_i = 0$, мы будем говорить, что E_i (рассматриваемый как дискретное нормирование поля $\mathbb{C}(X)$ рациональных функций на X) реализует канонический порог пары (X, S) .

ЛЕММА 2.1 (ср. [10; часть 3]). Пусть c – канонический порог пары (X, S) с терминальным $\mathbb{Q}$ -факториальным 3-мерным ростком $P \in X$. Тогда существует такое экстремальное дивизориальное стягивание $g': X' \supset E' \rightarrow X \ni P$, что его исключительный дивизор E' реализует порог c .

(Мы также будем говорить, что в этом случае порог s достигается на стягивании g').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы пользуемся обозначениями, введенными перед леммой. Применим к $\tilde{X}$ ($K_{\tilde{X}} + c\tilde{S}$)-программу минимальных моделей (ПММ), относительную над X (см. [9; гл. 11]). Она останавливается на таком $\mathbb{Q}$ -факториальном многообразии $\hat{X}$, что пара $(\hat{X}, c\hat{S})$, где $\hat{S}$ – собственный прообраз дивизора $\tilde{S}$, терминальна. На самом деле, ПММ стягивает все исключительные дивизоры разрешения g , которые имеют положительные дискрепантности относительно (X, cS) . Затем применим $K_{\hat{X}}$ -ПММ над X к $\hat{X}$. Она стягивает все исключительные дивизоры морфизма g , не стянутые $(K_{\hat{X}} + c\hat{S})$ -ПММ, и останавливается на многообразии X . Поскольку X предполагается $\mathbb{Q}$ -факториальным, последний шаг $K_{\hat{X}}$ -ПММ – экстремальное дивизориальное стягивание $g': X' \rightarrow X$ из некоторого $\mathbb{Q}$ -факториального терминального многообразия X' . Пусть E' – исключительный дивизор стягивания g' . Все дивизоры, которые мы стягиваем на этой стадии, имеют дискрепантность 0 относительно (X, cS) , а значит, E' реализует канонический порог пары (X, S) .

С этого момента мы предполагаем, что X гладкое. Многообразие X' , полученное в лемме 2.1, $\mathbb{Q}$ -факториально, так что мы снова можем написать

$$K_{X'} = g'^* K_X + a' E', \quad g'^* S = S' + b' E', \quad (1)$$

и так как канонический порог s реализуется дивизором E' , мы имеем $s = a'/b'$. Это сводит вычисление канонического порога в гладком 3-мерном случае к экстремальному дивизориальному стягиванию, т.е. к морфизму со связными слоями $g': X' \rightarrow X$, удовлетворяющему следующим условиям:

- (i) X' $\mathbb{Q}$ -факториально и имеет только терминальные особенности;
- (ii) исключительное множество морфизма g' – простой дивизор;
- (iii) $-K_{X'}$ g' -обилен;
- (iv) относительное число Пикара морфизма g' равно 1.

В 3-мерной ситуации g' может стягивать дивизор E' либо на кривую $C \subset X$, либо в точку $P \in X$. В первом случае из классификации Мори гладких экстремальных стягиваний [11] следует, что в общей точке кривой C морфизм g' изоморфен обыкновенному раздутию X в кривой C . Тогда из (1) следует, что $\text{ct}_P(X, S) = 1/\text{mult}_C(f)$, где $\text{mult}_C(f)$ – кратность функции f , задающей S , в общей точке кривой C . Значит, вклад стягиваний на кривую в множество $\mathcal{S}_{3, \text{ns}}^{\text{can}}$ – подмножество $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющее у.о.в.ц.

Теперь предположим, что g' стягивает дивизор E' в гладкую точку $P \in X$. В этом случае имеется важный результат Кавакиты [8; теорема 1.2], классифицирующий экстремальные дивизориальные стягивания в гладкие точки.

ТЕОРЕМА 2.2 (Кавакита). Пусть Y – 3-мерное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие с терминальными особенностями, и пусть $g: (Y \supset E) \rightarrow X \ni P$ – алгебраический росток экстремального дивизориального стягивания, который стягивает свой исключительный дивизор E в гладкую точку P . Тогда можно выбрать такие локальные параметры x, y, z в точке P и такие взаимно простые натуральные числа a и b , что g есть взвешенное раздутие многообразия X с весами $(1, a, b)$.

Таким образом, далее мы можем предполагать, что канонический порог пары (X, S) реализуется некоторым взвешенным раздутием. Также, поскольку X гладкое и канонический порог можно определять и вычислять и с помощью аналитических ростков, мы предполагаем в дальнейшем, что $P \in X$ изоморфен ростку $0 \in \mathbb{C}^3$ и S задается степенным рядом f , сходящимся в некоторой окрестности нуля. Отметим, впрочем, что сходимостью ряда f мы пользоваться не будем и техника следующего пункта применима и к формальным рядам.

2.2. Канонический порог и взвешенные раздутия. Аффинное пространство $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ может быть наделено структурой торического многообразия $X(\tau, N)$, где $N = \mathbb{Z}^n$, а конус τ – неотрицательный октант действительного векторного пространства $\mathbb{R}^n \simeq N \otimes \mathbb{R}$. Пусть $w = (w_1, \dots, w_n) \in N \cap \tau$ – примитивный вектор. Взвешенное раздутие σ_w пространства $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{C}^n$ с весовым вектором w – это торический морфизм

$$\sigma_w: X(\Sigma_w, N) \rightarrow \mathbb{C}^n \simeq X(\tau, N),$$

заданный естественным разбиением Σ_w конуса τ с помощью вектора w . Конечно, взвешенное раздутие зависит не только от своего веса w , но также и от выбора торической структуры $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \simeq X(\tau, N)$. Многообразие $X(\Sigma_w, N)$ $\mathbb{Q}$ -факториально и может быть покрыто n аффинными картами. При этом i -я карта изоморфна $\mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_{w_i}$, где циклическая группа действует с весами $(-w_1, \dots, -w_{i-1}, 1, -w_{i+1}, \dots, -w_n)$, а морфизм σ_w определяется в этой карте формулами

$$x_i = y_i^{w_i}, \quad x_j = y_j y_i^{w_j}, \quad j \neq i,$$

где $x_1, \dots, x_n$ – координаты на исходном и $y_1, \dots, y_n$ – на раздутом многообразии (см., например, [10; п. 3.7]).

Если нам дана гиперповерхность $S = \{f = 0\}$ в $\mathbb{C}^n$, мы можем оценить канонический порог $\text{ct}_0(\mathbb{C}^n, S)$ посредством взвешенных раздутий. А именно, для любого весового вектора w (не равного 0 или вектору e_i стандартного базиса) имеем

$$\text{ct}_0(\mathbb{C}^n, S) \leq \frac{w_1 + \dots + w_n - 1}{w(f)},$$

где $w(f)$ – наименьший из весов мономов, присутствующих в f , по отношению к весам $w_1, \dots, w_n$ (см. [7; п. 2.5]). Более того, если мы знаем, что канонический порог пары $(\mathbb{C}^n, S)$ достигается на некотором взвешенном раздутии, мы можем вычислить его как

$$\text{ct}_0(\mathbb{C}^n, S) = \min_{w \neq 0, e_i, i=1, \dots, n} \frac{w_1 + \dots + w_n - 1}{w(f)}, \quad (2)$$

где минимум берется по всем целочисленным векторам из τ . Возможно, что знаменатель дроби в (2) обращается в 0 для некоторых весов w ; такие дроби нужно трактовать как $+\infty$.

Напомним, что *расширенная диаграмма Ньютона* $\Gamma^+(f)$ многочлена (или ряда) $f = \sum_m a_m x^m$ есть выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ множества $\{m + \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid a_m \neq 0\}$. Заметим, что знаменатель $w(f)$ в формуле выше зависит только от $\Gamma^+(f)$, но не от самого f . Введем новое множество $\mathcal{T}_{n, \text{ns}, w}^{\text{can}}$ – множество гладких n -мерных канонических порогов, реализуемых некоторым взвешенным раздутием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Множество $\mathcal{T}_{n,ns,w}^{\text{can}}$ может показаться несколько искусственным. Однако оно содержит, например, множество гладких 3-мерных канонических порогов (при $n = 3$; см. п. 2.1), или множество канонических порогов, достижимых на гиперповерхностях S , определенных рядами f , невырожденными по отношению к своим диаграммам Ньютона (определение невырожденности см., например, в [12]). Действительно, невырожденные особенности допускают вложенное торическое разрешение [12], а исключительные дивизоры вложенного торического разрешения (рассматриваемые как дискретные нормирования поля рациональных функций на $\mathbb{C}^n$) являются исключительными дивизорами взвешенных раздутий.

Теперь теорема 1.7 следует из такого результата.

ТЕОРЕМА 2.4. *Множество $\mathcal{T}_{n,ns,w}^{\text{can}}$ удовлетворяет у.о.в.ц.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.4 будет следовать из двух лемм, приведенных ниже.

Обозначим через $\mathcal{N}_n^+$ множество всех возможных расширенных диаграмм Ньютона в $\mathbb{R}^n$. Очевидным образом это множество упорядочено по включению $\subseteq$. Следующая лемма должна быть хорошо известна специалистам по теории особенностей или по базисам Гребнера. Но так как мы не знаем подходящей ссылки, мы приводим ее с доказательством.

ЛЕММА 2.5. *Из любой бесконечной последовательности элементов упорядоченного множества $\mathcal{N}_n^+$ можно выбрать монотонно невозрастающую подпоследовательность. В частности, множество $\mathcal{N}_n^+$ удовлетворяет у.о.в.ц.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо расширенных диаграмм Ньютона в доказательстве будет удобнее использовать идеалы полугруппы $(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n, +)$ (см. [13; § 1.1]). Каждой диаграмме Γ^+ соответствует идеал, порожденный ее вершинами. Наоборот, по каждому идеалу можно построить расширенную диаграмму Ньютона, взяв его выпуклую оболочку в $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Хотя это соответствие и не взаимно однозначно, ясно, что лемму достаточно доказать для идеалов.

Доказательство проведем индукцией по размерности n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \dots$ – последовательность идеалов полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Мы можем спроектировать каждый из Γ_i^+ на координатные оси пространства $\mathbb{R}^n$. Каждая такая проекция будет идеалом в полугруппе $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Предположим сначала, что для некоторой оси, например, последней, полученная таким образом последовательность проекций неограничена, т.е. для любого $M > 0$ найдется такой номер k , что проекция идеала Γ_k^+ на последнюю ось лежит выше числа M . Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что выше M лежит проекция любого идеала Γ_i^+ при $i \geq k$. Проекция каждого идеала Γ_i^+ на координатную гиперплоскость, содержащую первые $n - 1$ осей, будет идеалом в полугруппе $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$. По предположению индукции мы можем выбрать такую подпоследовательность, что соответствующая последовательность проекций на данную гиперплоскость будет монотонно невозрастающей. Для упрощения обозначений будем считать, что исходная последовательность уже такова. Рассмотрим идеал Γ_1^+ . Обозначим через M максимальную из последних координат его вершин. Здесь мы пользуемся тем фактом, что любой идеал в $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ является конечным объединением сдвинутых координатных октантов; это называется *первым свойством конечности* полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, см. [13; § 1.1, теорема 1]. Начиная с некоторого номера k , все идеалы Γ_i^+ лежат выше M по отношению

к последней координате, а поэтому все они содержатся в Γ_1^+ . Продолжая аналогично, мы построим требуемую невозрастающую подпоследовательность идеалов.

Допустим теперь, что проекции последовательности $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \dots$ на все координатные оси ограничены. Это значит, что все идеалы Γ_i^+ имеют вершину внутри некоторого фиксированного параллелепипеда. Но любой ограниченный параллелепипед содержит лишь конечное число целых точек, поэтому, снова переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем считать, что все Γ_i^+ имеют общую вершину m . Тогда все идеалы Γ_i^+ содержат и сдвинутый координатный октант $m + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Рассмотрим дополнение к этому октанту в $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Очевидно, оно является объединением конечного числа сдвинутых координатных подполугрупп полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ (это частный случай *второго свойства конечности* полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, см. [13; § 1.1, теорема 2]). Размерность каждой такой полугруппы не превосходит $n - 1$, и пересечение каждого идеала Γ_i^+ с такой подполугруппой есть идеал в ней. Применяя предположение индукции и многократно (но лишь конечное число раз!) переходя к подпоследовательностям, мы получаем, что вне октанта $m + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ нашу последовательность $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \dots$ можно считать невозрастающей. Но объединение с одним и тем же октантом, очевидно, не меняет этого свойства. Лемма доказана.

Формула (2) формально определяет канонический порог расширенной диаграммы Ньютона Γ^+ , который мы будем обозначать $\text{ct}(\Gamma^+)$. Мы можем рассматривать его как отображение

$$\text{ct}: \mathcal{N}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 2.6. *Отображение ct монотонно, т.е.*

$$\Gamma_1^+ \subseteq \Gamma_2^+ \quad \implies \quad \text{ct}(\Gamma_1^+) \leq \text{ct}(\Gamma_2^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w – вектор из $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $w \neq 0, e_1, \dots, e_n$. Он определяет рациональную функцию $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$w(x) = \frac{w_1 + \dots + w_n - 1}{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}.$$

Множество уровня $w(x) = c$ этой функции (w фиксирован, изменяется x) представляет собой гиперплоскость, вектор нормали w которой имеет неотрицательные координаты. Чем меньшее $c > 0$ взять, тем дальше от начала координат лежит множество уровня $w(x) = c$.

Допустим, что канонический порог $c = \text{ct}(\Gamma_2^+)$ диаграммы Γ_2^+ реализуется весовым вектором w и этот порог достигается на вершине m диаграммы Γ_2^+ , $c = w(m)$. Минимум c' функции w на диаграмме Γ_1^+ не больше, чем c , потому что Γ_1^+ находится “выше” диаграммы Γ_2^+ . Порог $\text{ct}(\Gamma_1^+)$ может быть только меньше или равен c' .

Чтобы закончить доказательство теоремы 2.4, допустим, что существует строго возрастающая последовательность $c_1 < c_2 < \dots$ канонических порогов из множества $\mathcal{J}_{n, \text{ns}, w}^{\text{can}}$. Пусть $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \dots$ – такая последовательность расширенных диаграмм Ньютона, что $\text{ct}(\Gamma_k^+) = c_k$. Мы не можем иметь включения $\Gamma_i^+ \supseteq \Gamma_j^+$ ни для одной пары $i < j$, благодаря лемме 2.6. Но это противоречит лемме 2.5.

3. Канонический порог особенностей Брискорна в $\mathbb{C}^3$

Особенностью Брискорна называется гиперповерхностная особенность S , определенная в $\mathbb{C}^n$ уравнением

$$x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} = 0.$$

При $n = 3$ мы будем предполагать, что S задана уравнением

$$x^a + y^b + z^c = 0, \quad (3)$$

где $2 \leq a \leq b \leq c$. Лог канонический порог пары $(\mathbb{C}^n, S)$ вычисляется по формуле [1; 8.15])

$$\text{lct}_0(\mathbb{C}^n, S) = \min \left\{ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}, 1 \right\}.$$

В этом разделе мы вычислим 3-мерный канонический порог $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S)$. Особенности Брискорна невырождены по отношению к своим диаграммам Ньютона и поэтому допускают вложенное торическое разрешение (построение вложенного торического разрешения можно найти в [12]). Отсюда следует, в частности, что их канонические пороги реализуются взвешенными раздутиями и можно применить формулу (2) из п. 2.2. В 3-мерном случае она принимает вид

$$\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = \min_{w \neq e_1, e_2, e_3, 0} \frac{w_1 + w_2 + w_3 - 1}{\min\{aw_1, bw_2, cw_3\}}, \quad (4)$$

где минимум берется по всем векторам w из $\mathbb{Z}_{\geq 0}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Формула (4) не является прямым следствием теоремы 2.2 и п. 2.1. Действительно, теорема утверждает, что существуют *некоторые* координаты, в которых экстремальное стягивание, реализующее канонический порог, совпадает с взвешенным раздутием. Но в этих координатах уравнение особенности уже не обязано иметь брискорновскую форму или хотя бы быть невырожденным.

ЛЕММА 3.2. Пусть $S \subset \mathbb{C}^3$ – особенность Брискорна, заданная уравнением (3). Допустим, что весовой вектор $w = (p, q, r)$ реализует минимум в (4). Тогда $p \geq q \geq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что вектор, реализующий канонический порог особенности Брискорна, удовлетворяет $p, q, r \neq 0$. Предположим, например, что $p < q$. Тогда

$$\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = \frac{p + q + r - 1}{\min\{ap, cr\}}$$

и $q \geq 2$. Но в этом случае мы могли бы взять вектор $w' = (p, q - 1, r)$ вместо w и w' дал бы меньший канонический порог, противоречие. Остальные неравенства рассматриваются аналогично.

ЛЕММА 3.3. Весовой вектор w , дающий канонический порог особенности Брискорна (3), всегда может быть выбран в форме $w = (p, q, 1)$, где p и q – взаимно простые натуральные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кусочную дробно-линейную функцию h , определенную на $\mathbb{R}_{>0}^3$ формулой

$$h(w) = \frac{w_1 + w_2 + w_3 - 1}{\min\{aw_1, bw_2, cw_3\}}.$$

Ее множество уровня $h(w) = s$, $s \geq 0$, совпадает с боковой поверхностью тетраэдра Δ_s с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (образующими основание тетраэдра) и с последней вершиной

$$\frac{1}{1/a + 1/b + 1/c - s} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

на прямой $aw_1 = bw_2 = cw_3$. Если $s < s'$, то $\Delta_s \subset \Delta_{s'}$. Отсюда видно, что канонический порог особенности Брискорна (3) можно найти с помощью следующего процесса. Для каждого $s \geq 0$ построим тетраэдр Δ_s и найдем минимальное s_0 , для которого Δ_{s_0} содержит целую точку (p, q, r) с $p, q, r > 0$ на своей боковой поверхности. Тогда $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = s_0$ и порог реализуется весовым вектором (p, q, r) .

Теперь допустим, что $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = s_0 = h(p, q, r)$ и $r \geq 2$. Из леммы 3.2 мы знаем, что $p \geq q \geq r$. Рассмотрим еще один тетраэдр Δ_w с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и (p, q, r) . Очевидно, что $\Delta_w \subset \Delta_{s_0}$ и наша лемма будет доказана, если мы покажем, что пересечение тетраэдра Δ_w с плоскостью $w_3 = 1$ содержит положительную целую точку. Действительно, если $(p', q', 1)$ – такая точка и d – наибольший общий делитель чисел p' и q' , точка $(p'/d, q'/d, 1)$ также лежит в Δ_w и дает меньшее значение функции h . Пересечение $\Delta_w \cap \{w_3 = 1\}$ – треугольник с вершинами $(0, 0)$, $1/r(p + r - 1, q)$, $1/r(p, q + r - 1)$ (третья координата $w_3 = 1$ опущена). Будет немного удобнее умножить все на r и показать, что треугольник OPQ , $O = (0, 0)$, $P = (p, q + r - 1)$, $Q = (p + r - 1, q)$, содержит положительную целую точку с координатами $0 \bmod r$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Целые точки в треугольнике

Другие точки на рис. 1 имеют следующее значение. Точка E – это точка пересечения прямых OP и $w_2 = q$. Ее координаты $(pq/(q + r - 1), q)$. Отрезок BC – средняя линия треугольника EPQ , а отрезок AD лежит на прямой $w_2 = q - r/2$.

Заметим, что точка Q лежит под диагональю $w_1 = w_2$. Значит, если точка P лежит над диагональю, то треугольник OPQ содержит уже точку (r, r) . Так что предположим, что $p > q + r - 1$. Выберем такое целое число $k \geq 2$, что $(k - 1) \times (q + r - 1) < p \leq k(q + r - 1)$. Далее рассмотрим 2 случая: $q \leq 2r - 1$ и $q \geq 2r$. Пусть сначала $q \leq 2r - 1$. Рассмотрим преобразованный треугольник $OP'Q'$, который получается из OPQ применением унимодулярного преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & -(k-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Точка $P'(p - (k - 1)(q + r - 1), q + r - 1)$ лежит над диагональю. В самом деле, $p - (k - 1)(q + r - 1) \leq q + r - 1$. С другой стороны, точка $Q'(p - (k - 1)q + r - 1, q)$ находится под диагональю:

$$\begin{aligned} p - (k - 1)q + r - 1 &> (k - 1)(q + r - 1) - (k - 1)q + r - 1 \\ &= 2r - 1 + (k - 2)r - (k - 1) \geq q + (k - 2)r - (k - 1) \geq q - 1 \end{aligned}$$

ибо $r, k \geq 2$. Следовательно, треугольник $OP'Q'$ содержит точку (r, r) . Но тогда и треугольник OPQ также имеет положительную целую точку $0 \pmod r$.

Теперь допустим, что $q \geq 2r$. Заметим, что длина отрезка EQ равна

$$p + r - 1 - \frac{pq}{q + r - 1} = (r - 1) \frac{p + q + r - 1}{q + r - 1} > 2(r - 1)$$

и поэтому $BC > r - 1$. Далее, $AD \geq (3/4)EQ > (3/2)(r - 1)$. Последнее число больше, чем r при $r \geq 3$. Если мы имеем отрезок $[x, y]$ с целым x или y на действительной прямой $\mathbb{R}$ и если этот отрезок имеет длину $\geq r - 1$, то он обязательно содержит точку $0 \pmod r$ (возможно, как один из своих концов). Если длина отрезка $\geq r$, он всегда содержит точку $0 \pmod r$ вне зависимости от того, целые ли x и y . Из этих наблюдений легко следует, что для $r \geq 3$ уже пятиугольник $ABCQD$ имеет точку $0 \pmod r$. Детали мы оставляем читателю.

Таким образом, нам остается рассмотреть случай, когда $r = 2$ и $q \geq 4$. Более того, мы можем предполагать, что p и q нечетные, потому что иначе уже одна из точек P, Q , или (p, q) будет иметь координаты 0 по модулю r . Проверим, лежит ли точка $(p - 1, q - 1)$ в треугольнике OPQ . Это выполнено, если

$$\frac{q - 1}{p - 1} \geq \frac{q}{p + 1}$$

или $p \leq 2q - 1$. С другой стороны,

$$AD = \frac{q - 1}{q} \cdot \frac{p + q + 1}{q + 1} \geq 2$$

выполнено, если

$$p \geq \frac{(q + 1)^2}{q - 1} > q + 1.$$

Два неравенства $p \leq 2q - 1$ и $p > q + 1$ покрывают все возможности для p и q . Поэтому треугольник OPQ всегда содержит нужную точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Снова лемма 3.3 не является прямым следствием теоремы Кавакиты 2.2, см. замечание 3.1.

Теперь мы готовы вывести формулу для канонического порога особенности Брискорна. Для этого введем некоторые новые обозначения. Через L обозначим точку $(c/a, c/b, 1)$ пересечения прямой $aw_1 = bw_2 = cw_3$ с плоскостью $w_3 = 1$. Зафиксируем действительное число s и рассмотрим пересечение тетраэдра Δ_s с плоскостью $w_3 = 1$ (см. доказательство леммы 3.3). При $s < 1/a + 1/b$ это пересечение пусто; при $s = 1/a + 1/b$ оно равно отрезку OL ; при $s > 1/a + 1/b$ оно совпадает с треугольником OMN , где $M = (c/a, sc - c/a, 1)$, $N = (sc - c/b, c/b, 1)$ (см. рис. 2).

Рис. 2. Минимизация функции h

Отсюда почти сразу следует

ЛЕММА 3.5. Пусть S – особенность Брискорна вида (3). Тогда канонический порог $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) \geq 1/a + 1/b$. Более того, если $c \geq \text{НОК}(a, b)$, где НОК – наименьшее общее кратное, то $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 1/a + 1/b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Только вторая часть леммы нуждается в доказательстве. Если $c \geq m = \text{НОК}(a, b)$, то отрезок OL содержит точку $(m/a, m/b, 1)$. Имеем $h(m/a, m/b, 1) = 1/a + 1/b$, но из первой части леммы мы знаем, что $1/a + 1/b$ – наименьшее возможное значение канонического порога. Это заканчивает доказательство.

Когда $c < \text{НОК}(a, b)$, мы получаем задачу в духе целочисленного линейного программирования: минимизировать кусочную дробно-линейную функцию h на положительных целых точках плоскости $w_3 = 1$. Эквивалентно, мы должны найти такое минимальное s , что треугольник OMN содержит точку с натуральными координатами. Точка w , на которой h достигает своего минимума, содержится в следующем списке:

- (i) w – ближайшая к OL целая точка, лежащая на горизонтальной прямой $w_2 = k$, $1 \leq k \leq \lfloor c/b \rfloor$, справа от отрезка OL (см. рис. 2); в этом случае $w = (\lceil kb/a \rceil, k, 1)$; здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает нижнее и $\lceil \cdot \rceil$ – верхнее целое;
- (ii) w – ближайшая к OL целая точка, лежащая на вертикальной прямой $w_1 = k$, $1 \leq k \leq \lfloor c/a \rfloor$, над отрезком OL ; в этом случае $w = (k, \lceil ka/b \rceil, 1)$;

- (iii) w – “первая” целая точка в треугольнике LMN ; в этом случае $w = (\lceil c/a \rceil, \lceil c/b \rceil, 1)$.

Пусть

$$\begin{aligned} s_1 &= \min_{1 \leq k \leq \lfloor c/b \rfloor} \left\{ h\left(\left\lceil \frac{kb}{a} \right\rceil, k, 1\right) \right\} = \min_{1 \leq k \leq \lfloor c/b \rfloor} \left\{ \frac{1}{b} + \frac{1}{kb} \left\lceil \frac{kb}{a} \right\rceil \right\}, \\ s_2 &= \min_{1 \leq k \leq \lfloor c/a \rfloor} \left\{ h\left(k, \left\lceil \frac{ka}{b} \right\rceil, 1\right) \right\} = \min_{1 \leq k \leq \lfloor c/a \rfloor} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{ka} \left\lceil \frac{ka}{b} \right\rceil \right\}, \\ s_3 &= h\left(\left\lceil \frac{c}{a} \right\rceil, \left\lceil \frac{c}{b} \right\rceil, 1\right) = \frac{\lceil c/a \rceil + \lceil c/b \rceil}{c}. \end{aligned}$$

Подведем итог сделанному в этой части в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть S – 3-мерная особенность Брискорна (3). Если выполнено $\text{НОК}(a, b) \leq c$, то $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 1/a + 1/b$; иначе $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = \min\{s_1, s_2, s_3, 1\}$ (обозначения см. выше).

ПРИМЕР 3.7. Рассмотрим особенность Брискорна

$$x^3 + y^7 + z^{11} = 0.$$

По нашим формулам получаем

$$\begin{aligned} s_1 &= \min_{1 \leq k \leq 1} \left\{ \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{7}\right) \cdot 3 \right\} = \frac{4}{7}, \\ s_2 &= \min_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3k}\right) \left\lceil \frac{(3k)}{7} \right\rceil \right\} = \min \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \right\} = \frac{1}{2}, \\ s_3 &= \frac{4+2}{11} = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 1/2 = s_2$ и порог достигается на взвешенном раздутии с весами $(2, 1, 1)$.

ПРИМЕР 3.8. Пусть S – особенность Брискорна

$$x^5 + y^6 + z^{29} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} s_1 &= \min_{1 \leq k \leq 4} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{6k} \left\lceil \frac{6k}{5} \right\rceil \right\} = \min \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}, \frac{1}{6} + \frac{1}{4}, \frac{1}{6} + \frac{2}{9}, \frac{1}{6} + \frac{5}{24} \right\} = \frac{3}{8}, \\ s_2 &= \min_{1 \leq k \leq 5} \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{5k} \left\lceil \frac{5k}{6} \right\rceil \right\} = \frac{2}{5}, \\ s_3 &= \frac{6+5}{29} = \frac{11}{29}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 3/8 = s_1$ и порог достигается на взвешенном раздутии $(5, 4, 1)$.

ПРИМЕР 3.9. Теперь пусть S – особенность Брискорна

$$x^{12} + y^{18} + z^{35} = 0.$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} s_1 &= \min_{1 \leq k \leq 1} \left\{ \frac{1}{18} + \frac{1}{9} \right\} = \frac{1}{6}, \\ s_2 &= \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ \frac{1}{12} + \frac{1}{12k} \left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil \right\} = \frac{1}{6}, \\ s_3 &= \frac{3+2}{35} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 1/7 = s_3$ и порог достигается на взвешенном раздутии $(3, 2, 1)$.

4. Верхняя часть канонического множества

В этой части мы усиливаем теорему 1.6 Прохорова, описывающую верхнюю часть множества $\mathcal{T}_3^{\text{can}}$ 3-мерных канонических порогов.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пересечение $\mathcal{T}_3^{\text{can}} \cap [4/5, 1]$ равно $\{4/5, 5/6, 1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что если X особа, то $\text{ct}_P(X, S) \leq 4/5$ (теорема 1.6), и если S имеет неизолированные особенности в окрестности точки P , то $\text{ct}_P(X, S) \leq 1/2$ (п. 2.1). Поэтому мы можем предполагать, что S – поверхность в $\mathbb{C}^3$ с изолированной особенностью в начале координат. Тогда по теореме 2.2 Кавакиты и п. 2.1 канонический порог $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S)$ достигается на некотором взвешенном раздутии.

Пусть S задана в $\mathbb{C}^3$ уравнением $f = 0$. Мы проанализируем диаграмму Ньютона $\Gamma(f)$ функции f и покажем, что каноническим порогом поверхности S может быть 1, $5/6$, $3/4$ или меньшее число. Во-первых заметим, что если диаграмма Ньютона функции f лежит выше плоскости $\alpha + \beta + \gamma = 3$, то $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) \leq 2/3$. Действительно, в этом случае $\Gamma^+(f)$ содержится в расширенной диаграмме Ньютона особенности

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0,$$

которая имеет канонический порог $2/3$. По лемме 2.6 $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) \leq 2/3$.

Мы видим, что разложение функции f в ряд обязательно должно содержать мономы степени 2. Мы рассматриваем случай, когда f задает изолированную особенность. Поэтому если второй дифференциал функции f имеет ранг 2 или 3, f изоморфна особенности Дю Валя типа A_n . В этом случае канонический порог равен 1. Но то же самое выполняется, даже если второй дифференциал f имеет ранг 1, но f имеет по крайней мере 2 монома степени 2. В самом деле, напомним, что канонический порог поверхности S зависит только от диаграммы Ньютона $\Gamma(f)$. Но тогда мы можем немного изменить коэффициенты функции f таким образом, чтобы второй дифференциал имел ранг ≥ 2 . Следовательно, мы можем предполагать, что f имеет вид

$$f = x^2 + \text{члены степени} \geq 3.$$

Более того, посредством замены $x' = x\sqrt{1 + \dots}$ (она не изменяет свойства, что канонический порог функции f достигается на взвешенном раздутии) мы приводим f к такому виду, что x^2 – ее единственный моном, содержащий x в степени ≥ 2 .

Далее, сравним f с особенностью Брискорна

$$x^2 + y^4 + z^4 = 0.$$

Ее канонический порог $3/4$ (см. раздел 3). Значит, если $\Gamma(f)$ лежит над плоскостью $2\alpha + \beta + \gamma = 4$, то $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) \leq 3/4$. Таким образом, мы можем считать, что f имеет мономы степени 3. Если среди этих мономов есть y^2z , мы опять заключаем, что f – особенность Дю Валя (на этот раз типа D_n) и $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 1$. Далее мы предполагаем, что

$$f = x^2 + y^3 + \text{другие члены степени} \geq 3.$$

Теперь сравним f с особенностью Брискорна

$$x^2 + y^3 + z^6 = 0.$$

Ее канонический порог $5/6$. Допустим, что f содержит мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, лежащие под плоскостью $3\alpha + 2\beta + \gamma = 6$. Возможными мономами являются z^3 , z^4 , z^5 , yz^2 , yz^3 , xz^2 . В этом случае f – двувалевская особенность типа D_n или E_n и ее канонический порог 1. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $\Gamma(f)$ лежит над плоскостью $3\alpha + 2\beta + \gamma = 6$ и $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) \leq 5/6$. Покажем, что на самом деле $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S) = 5/6$.

Так как мы предполагаем, что функция f определяет изолированную особенность, она имеет мономы вида z^n , xz^n или yz^n . Поэтому мы можем оценить ее канонический порог снизу, сравнивая ее с невырожденными особенностями

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 + z^n &= 0, & n &\geq 6, \\ x^2 + y^3 + xz^n &= 0, & n &\geq 3, \\ x^2 + y^3 + yz^n &= 0, & n &\geq 4. \end{aligned}$$

Первая и вторая, как легко видеть, изоморфны брискорновским особенностям с каноническим порогом $5/6$. Прямым вычислением мы докажем, что третья особенность $S' \subset \mathbb{C}^3$ также имеет канонический порог $5/6$.

Рассмотрим взвешенное раздутие σ пространства $\mathbb{C}^3$ с весами $(3, 2, 1)$. Раздутое многообразие $\tilde{\mathbb{C}}^3$ покрывается тремя аффинными картами (см. п. 2.2). В первой, изоморфной $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3(1, 1, 2)$, собственный прообраз $S'_{\tilde{\mathbb{C}}^3}$ поверхности S' изоморфен

$$1 + y^3 + x^{n-4}yz^n = 0$$

и неособ. Во второй карте $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_2(1, 1, 1)$ собственный прообраз

$$x^2 + 1 + y^{n-4}z^n = 0$$

снова неособ. Заметим, что факторособенности первых двух карт терминальны и $S'_{\tilde{\mathbb{C}}^3}$ не проходит через них. Третья карта изоморфна $\mathbb{C}^3$, а собственный прообраз

$$x^2 + y^3 + yz^{n-4} = 0,$$

т.е. особенности того же вида но с меньшим n . Вычисляя дискрепантность, получаем

$$K_{\tilde{\mathbb{C}}^3} + \frac{5}{6} S'_{\tilde{\mathbb{C}}^3} = \sigma^* \left(K_{\mathbb{C}^3} + \frac{5}{6} S' \right).$$

Таким образом по индукции мы показываем, что $\text{ct}_0(\mathbb{C}^3, S') = 5/6$, чем заканчивается доказательство теоремы.

Автор благодарен Ю. Г. Прохорову за то, что он привлек наше внимание к каноническим порогам и за полезные предложения по ходу работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic Geometry* (Santa Cruz, CA, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [2] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.
- [3] C. Birkar, V. V. Shokurov, “Mld’s vs thresholds and flips”, *J. Reine Angew. Math.*, **638** (2010), 210–234, arXiv:math.AG/0609539.
- [4] J. Kollár, *Which Powers of Holomorphic Functions are Integrable?*, 2008, arXiv:math.AG/0805.0756.
- [5] T. de Fernex, M. Mustață, “Limits of log canonical thresholds”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), **42**:3 (2009), 491–515.
- [6] T. de Fernex, L. Ein, M. Mustață, “Shokurov’s ACC conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties”, *Duke Math. J.*, **152**:1 (2010), 93–114, arXiv:math.AG/0905.3775.
- [7] Yu. Prokhorov, “Gap conjecture for 3-dimensional canonical thresholds”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **15**:4 (2008), 449–459.
- [8] M. Kawakita, “Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points”, *Invent. Math.*, **145**:1 (2001), 105–119.
- [9] K. Matsuki, *Introduction to Mori’s Program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [10] Yu. G. Prochorov, *Lectures on Complements on Log Surfaces*, MSJ Mem., **10**, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 2001.
- [11] S. Mori, “Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective”, *Ann. of Math.* (2), **116**:1 (1982), 133–176.
- [12] A. N. Varchenko, “Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram”, *Invent. Math.*, **37**:3 (1976), 253–262.
- [13] А. Г. Хованский, С. П. Чулков, *Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям*, МЦНМО, М., 2009.

Д. А. Степанов

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: dstepanov@bmstu.ru

Поступило

18.01.2010

Исправленный вариант

08.07.2010