Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Аносов, О некоторых гиперболических множествах, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 650–668

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 07:52:40

О некоторых гиперболических множествах

Д. В. Аносов

Статья посвящена двум инвариантным множествам F некоторых диффеоморфизмов S , указанным А. Фати, С. Кровизье и Т. Фишером в качестве примеров гиперболических множеств с тем (неожиданным в то время) свойством, что в некоторой окрестности такого F нет локально максимального множества, содержащего F . Доказывается, что данное свойство, хотя оно и относится к поведению траекторий S возле F , но в этих примерах оно в конечном счете обусловлено сочетанием некоторого явно указанного “внутреннего” свойства действия S на F и гиперболичности F . (Значит, если гиперболическое множество F' диффеоморфизма S' эквигомеоморфно множеству Фати–Кровизье или Фишера, то в некоторой окрестности F' у S' тоже нет локально максимального множества, содержащего F' .)

Библиография: 6 названий.

1. Интересующие нас свойства некоторого гиперболического множества (описываемого ниже) сами по себе естественно формулируются в более общей ситуации. В этом пункте $S: M \rightarrow M$ – гомеоморфизм метрического пространства (M, ρ) на себя. (Однако в следующих пунктах мы перейдем к менее общей гладкой ситуации – именно в ней определено понятие гиперболического множества.) Инвариантное множество F гомеоморфизма S в настоящей работе всегда подразумевается компактным, если не оговорено противное, а его инвариантность – двусторонней ($F = SF = S^{-1}F$).

Пусть U – открытое подмножество в M . Множество всех точек x , траектории которых целиком лежат в U , обозначим через $I(U)$, так что $I(U) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} S^j U$. Очевидно, $I(U)$ – это инвариантное множество, не обязательно компактное, которое является максимальным среди всех (тоже не обязательно компактных) инвариантных множеств, содержащихся в U . Инвариантное множество F (теперь по общему соглашению оно уже подразумевается компактным) называется *локально максимальным*, если у него имеется такая открытая окрестность U , что в ней F максимально среди всех содержащихся в U инвариантных множеств, даже не обязательно компактных. Иными словами, $F = I(U)$, так что множество $I(U)$ в данном случае компактно. Обратно, если множество $I(U)$ компактно, то оно является локально максимальным инвариантным множеством (а U – это та самая окрестность этого множества, где оно максимально).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00342) и Программы президиума РАН “Математическая теория управления”.

Нас будет интересовать следующее свойство, которое может быть (а может и не быть) присуще инвариантному множеству F : в любой окрестности F имеется локально максимальное инвариантное множество, содержащее F . Инвариантное множество F , которое обладает указанным свойством, но не является локально максимальным, я буду ради краткости называть *локально предмаксимальным*. Такие множества можно определить еще и следующим образом: они представляются в виде пересечений убывающих последовательностей локально максимальных инвариантных множеств. На самом деле нам понадобится только первое определение, но ради полноты я докажу равносильность обоих определений.

В одну сторону рассуждение совсем просто: если F представимо в виде пересечения $\bigcap F_n$ убывающей последовательности локально максимальных инвариантных множеств F_n , то очевидно, что F инвариантно (включая сюда и компактность), а в любой окрестности U множества F имеется локально максимальное инвариантное множество, содержащее F , – ведь $F_n \subset U$ при достаточно больших n . (Ведь если бы все $F_n \setminus U \neq \emptyset$, то множества $F_n \setminus U$ образовывали бы центрированную систему компактных множеств, которая должна иметь непустое пересечение, а оно есть $F \setminus U$). При этом само F не является локально максимальным, так как в любой его окрестности имеется большее инвариантное множество F_n с достаточно большим номером n .

Рассуждение в другую сторону (показывающее, что когда F удовлетворяет первому определению, то оно удовлетворяет и второму) несколько сложнее. Предполагая, что F удовлетворяет первому определению, легко построить такую последовательность открытых множеств W_n , что при всех n множества $F_n = I(W_n)$ компактны, $F \subset W_n$ и $W_n \subset U_{1/n}(F)$. В окрестности $U_1(F)$ множества F^1 имеется локально максимальное множество, содержащее F . Это локально максимальное множество мы примем за F_1 . Оно является максимальным среди всех инвариантных множеств (не обязательно компактных) из некоторой своей окрестности V_1 . Положим $W_1 = U_1(F) \cap V_1$. Раз $I(V_1) = F_1$, то для меньшего множества W_1 тем более $I(W_1) \subset F_1$, а в то же время ясно, что $F_1 \subset W_1$; получается, что $F_1 = I(W_1)$. Пусть уже построены $F_1, \dots, F_n$ и $W_1, \dots, W_n$. В $U_{1/(n+1)}(F) \cap W_n$ имеется локально максимальное инвариантное множество, содержащее F . Это локально максимальное множество мы примем за F_{n+1} . Оно содержится в F_n , потому что

$$F_{n+1} \subset I(U_{1/(n+1)}(F) \cap W_n) \subset I(W_n) = F_n,$$

и является максимальным среди всех (не обязательно компактных) инвариантных множеств из некоторой своей окрестности V_{n+1} . Положим

$$W_{n+1} = U_{1/(n+1)}(F) \cap W_n \cap V_{n+1}.$$

Аналогично предыдущему получается, что $F_{n+1} = I(W_{n+1})$. Построенные F_n образуют убывающую последовательность локально максимальных инвариантных множеств, и ясно, что $F \subset I(W_n)$, так что $F \subset \bigcap F_n$, а в то же время $\bigcap W_n = F$ и, тем более, $\bigcap F_n \subset \bigcap W_n = F$.

¹Ниже окрестности подразумеваются открытыми, если не оговорено иное; $U_r(F)$ – это r -окрестность множества F .

2. В середине 1960-х гг. возник (у меня и, возможно, также и у других лиц) вопрос, не является ли каждое гиперболическое множество² локально предмаксимальным. В то время казалось (на основании нескольких примеров), что ответ окажется положительным. Однако в 1980-е гг. А. Фати указал простой противоречащий пример. (Он не стал его публиковать, но позднее тот же (как я понимаю) пример опубликовал Кровизье [1]). Еще позднее другой пример гиперболического множества, не являющегося локально предмаксимальным (точнее, несколько связанных друг с другом примеров), опубликовал Фишер [2]. При этом Фати и Фишер установили не только тот (так сказать, локальный) факт, что в их примерах гиперболическое множество не является локально предмаксимальным, но и глобальный факт, что оно не содержится ни в каком локально максимальном множестве, кроме всего фазового многообразия.³ Однако мы будем иметь дело только с локальным фактом, на который посмотрим с новой точки зрения.

Отвлечемся временно от примеров Фати и Фишера и остановимся на некоторых обстоятельствах общего характера.

Нетрудно проверить, что для гиперболических множеств F диффеоморфизмов S локальная максимальность равносильна следующему свойству *внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий*: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая δ -траектория в F ε -отслеживается некоторой траекторией, тоже целиком лежащей в F . Последнее свойство касается только действия S на F .⁴ Следовательно, если гиперболические множества F_1 и F_2 диффеоморфизмов S_1, S_2 многообразий M_1, M_2 на себя гомеоморфны посредством гомеоморфизма $f: F_1 \rightarrow F_2$, эквивариантного в том смысле, что $S_2 \circ f = f \circ (S_1|_{F_1})$ (в этом случае я буду называть f *эквивгомеоморфизмом* и говорить, что F_1 и F_2 эквивгомеоморфны), и если одно из них локально максимально, то и другое тоже. Возникает вопрос, справедливо ли аналогичное утверждение относительно локальной предмаксимальности (а значит, также и относительно ее отсутствия).

Ответ оказывается положительным (он публикуется в другом месте). Однако в общем случае мне не удалось указать свойство “внутреннего” характера – свойство $S|_F$ – наличие которого было бы равносильно локальной предмаксимальности множества F , если последнее гиперболично. (Вопрос о таком свойстве удалось обойти.) В настоящей же статье рассмотрены два частных случая (теоремы 1, 2), когда вывод об отсутствии локальной предмаксимальности удается сделать на основании некоторого явно описанного (к сожалению, очень специального) свойства “внутреннего” характера динамики на F . Само это свойство указывается в лемме 2 из п. 4, а эти два примера суть примеры Фати–Кровизье и Фишера (только в последнем примере опущены несущественные для нас детали). (Сказанное и составляет своего рода новый взгляд на названные примеры.) Проверке выполнения условий леммы в рассматриваемых примерах посвящены пп. 5–8. Идеи в пп. 4–8 во многом близки к тем, которые были использованы Фати и Фишером для других (хотя и родственных) целей⁵. Новым в данной статье в основном является, повторяю, привлечение подобных соображений для обсуждения нового вопроса о “внутреннем”

²Как и все инвариантные множества, гиперболические множества подразумеваются компактными.

³Несколько примеров Фишера позволили ему продемонстрировать и некоторые другие обстоятельства.

⁴Конечно, определение предполагаемой при этом гиперболичности F связано, так сказать, с выходом за пределы F (хотя только в линейном приближении).

характере свойства локальной предмаксимальности в классе гиперболических множеств. Имеется также некоторая техническая новизна – использование (в пп. 5 и 8) теоремы об отслеживании псевдотраекторий вместо теоремы о локальной структуре произведения (последняя приведена ниже как теорема 3; имеется все-таки и пример ее использования, см. п. 7⁶). Непосредственно используемая нами формулировка теоремы об отслеживании имеется в [3] и [4], а также в [5] (где, правда, немного завышены требования гладкости).⁷

Собираясь обсуждать свойства примеров Фати–Кровизье и Фишера, я, конечно, должен описать эти примеры, что и будет сделано в п. 3. При этом мы зафиксируем обозначения, которые будут использоваться, и отметим некоторые нужные нам факты. (Тех и других применительно к примеру Фати нам потребуется заметно больше, нежели было бы нужно для одной только формулировки теоремы 1, да, пожалуй, и для доказательства теоремы самого Фати. А применительно к примеру Фишера мы, наоборот, опустим некоторые детали, существенные для целей [2] – варьируя эти детали, Фишер установил существование примеров с различными дополнительными свойствами,⁸ – но не для нас.)

3. Привожу описание примера Фати с нужными нам деталями. В нем фазовым многообразием служит четырехмерный тор $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$, представленный как прямое произведение $\mathbb{T}^4 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ двух двумерных торов $\mathbb{T}^2$, диффеоморфизм $S: \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ – это прямое произведение $A \times B$ двух гиперболических автоморфизмов $A, B: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ (т.е. $S(x, y) = (Ax, By)$), а множество $F = (\mathbb{T}^2 \times \{O_2\}) \cup (\{O_2\} \times \mathbb{T}^2)$, где O_2 – нуль двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Нуль всего $\mathbb{T}^4$ обозначим через O_4 . Естественные проекции $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ обозначим через P и p , а нуль пространства $\mathbb{R}^2$ – через $\hat{O}_2$. Торы $\mathbb{T}^2 \times \{O_2\}$ и $\{O_2\} \times \mathbb{T}^2$ короче обозначим через T_1 и T_2 , так что $F = T_1 \cup T_2$ и $T_1 \cap T_2 = O_4$. Через $\hat{S}$ и $\hat{A}, \hat{B}$ обозначим гиперболические линейные отображения $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, накрывающие соответственно S и A, B . Собственное значение оператора $\hat{A}$, меньшее 1 по модулю (абсолютной величине), обозначим через λ , а собственное значение $\hat{B}$, большее 1 по модулю – через μ . Соответствующие собственные векторы этих операторов, имеющие единичную длину (в смысле стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^2$), обозначим через e_A^s, e_B^u . (Сказанным каждый из векторов e_A^s, e_B^u определяется с точностью до замены на противоположный; конкретный выбор одного вектора из соответствующей пары для нас безразличен.) Векторы $(e_A^s, \hat{O}_2)$ и $(\hat{O}_2, e_B^u)$ служат собственными векторами линейного преобразования $\hat{S}$, отвечающими собственным значениям λ и μ .

⁵Первоначальных соображений Фати я не знаю – я знаю о его примере только со слов Ч. Пью и М. Шуба. Они и сами уже не помнили в точности соображений Фати, но предложили свои и считали, что последние более или менее близки к аргументации Фати.

⁶При этом нужный нам вариант немного отличается от наиболее распространенного, почему и дана его формулировка.

⁷В [3]–[5] говорится об отслеживании псевдотраекторий и семейств таковых траекториями и семействами траекторий не только исходного диффеоморфизма, но и любого близкого к нему. В рамках настоящей работы подобного утверждения не требуется.

В литературе встречаются и другие формулировки теоремы об отслеживании (например, одна из них является целью красивого доказательства в [6]), но различия несущественны: добавив небольшое дополнительное рассуждение или немного изменив доказательство, можно получить теорему в нужном нам виде.

⁸В том числе и со свойством, аналогичным упомянутому выше для примера Фати: F не содержится ни в каком локально максимальном множестве, кроме M , а также и с противоположным свойством: F содержится в некотором локально максимальном множестве F' , меньшем M (хотя в малой окрестности F такого F' не может быть).

Считая риманову метрику на торе $\mathbb{T}^2$ индуцированной римановой метрикой в $\mathbb{R}^2$, имеем

$$\rho(p(te_A^s), O_2) \leq |t|, \quad \rho(O_2, p(te_B^u)) \leq |t|, \quad (1)$$

потому что для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ $\rho(p(x), p(y)) \leq |x - y|$. (На самом деле при достаточно малых $|t|$ в (1) имеет место равенство, но этого нам не нужно.)

Хотя данная статья относится к гиперболической теории динамических систем (теории динамических систем с гиперболическим поведением траекторий), при обсуждении примера Фати у нас формально не будет нужды явно упоминать о таких объектах, занимающих в этой теории центральное положение, как устойчивые и неустойчивые многообразия. Но это только формально. Мы будем рассматривать точки вида $p(\nu e_A^s)$ и $p(\nu e_B^u)$ и применять к ним отображения A^j и B^j . А ведь $p(\mathbb{R}e_A^s)$ и $p(\mathbb{R}e_B^u)$ – это устойчивые и неустойчивые многообразия точки O_2 на торе $\mathbb{T}^2$ для динамических систем, получающихся при итерировании A и B соответственно. При переходе от $\mathbb{T}^2$ к $\mathbb{T}^4$ мы говорим о $P(\mathbb{R}e_A^s \times \hat{O}_2)$ и $P(\hat{O}_2 \times \mathbb{R}e_B^u)$ – это некоторые линии, расположенные на двумерных устойчивом и неустойчивом многообразиях точки O_4 на торе $\mathbb{T}^4$ для динамической системы $\{\hat{S}^j\}$ и являющиеся пересечениями последних многообразий с T_1 и T_2 .

В п. 5 мы еще раз упомянем о некоторых устойчивых и неустойчивых многообразиях, но тоже более в порядке пояснений для лучшего понимания картины.

Заметим, далее, что хотя множество F не локально максимально, но его части T_1 и T_2 (которые, очевидно, инвариантны и гиперболичны) локально максимальны. Докажем это для T_1 (для T_2 все обстоит совершенно аналогичным образом). Если $(x, y) \in U_\varepsilon(T_1)$, то это равносильно тому, что $y \in U_\varepsilon(O_2)$, поэтому достаточно убедиться, что при некотором $r > 0$

$$(\forall j \in \mathbb{Z} \quad B^j y \in U_r(O_2)) \implies y = O_2 \quad (2)$$

(и, значит, $(x, y) \in T_1$). Хотя (2) общеизвестно, ради полноты я все же приведу доказательство.

Возьмем какое-нибудь $R \in (0, 1/2)$. Тогда круги $U_R(m, n)$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ с центрами в точках $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ не пересекаются друг с другом, поэтому проекция $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ взаимно однозначно отображает круг $U_R(\hat{O}_2)$ на $U_R(O_2)$. Положим

$$b = \max(|\hat{B}|, |\hat{B}^{-1}|), \quad r = \frac{R}{\bar{b}}$$

($|\hat{B}|, |\hat{B}^{-1}|$ – нормы матриц $\hat{B}, \hat{B}^{-1}$, $b > 1$ ввиду гиперболичности $\hat{B}$). Пусть $y \in U_r(O_2)$, $y \neq O_2$. Тогда y представимо как $p(\hat{y})$ с некоторым $\hat{y} \in U_r(\hat{O}_2)$, $\hat{y} \neq \hat{O}_2$. Ясно, что $|\hat{B}^j \hat{y}| \rightarrow \infty$, по крайней мере, при $j \rightarrow +\infty$ или при $j \rightarrow -\infty$. В первом случае при некотором $j > 0$ будет $|\hat{B}^j \hat{y}| < r$, $|\hat{B}^{j+1} \hat{y}| \geq r$. Во втором случае при некотором $j < 0$ будет $|\hat{B}^j \hat{y}| < r$, $|\hat{B}^{j-1} \hat{y}| \geq r$. Соответственно, при $k = j + 1$ или $k = j - 1$ будет

$$|\hat{B}^k \hat{y}| \leq |\hat{B}^{\pm 1}| |\hat{B}^j \hat{y}| \leq br < R.$$

Итак, $\hat{B}^k \hat{y} \in U_R(\hat{O}_2) \setminus U_r(\hat{O}_2)$, и, поскольку $U_R(\hat{O}_2)$ проектируется на $U_R(O_2)$ однозначно, $B^k y = p(\hat{B}^k \hat{y}) \in U_R(O_2) \setminus U_r(O_2)$, т.е. $B^k y \notin U_r(O_2)$.

Наконец, проектируя на тор $\mathbb{T}^2$ “полосу” в $\mathbb{R}^2$, которая в терминах стандартных координат (x, y) определяется неравенством $1/3 \leq x \leq 2/3$, получаем на торе кольцеобразную область $R = p(\{(x, y) : 1/3 \leq x \leq 2/3\})$ (R – от ring-shaped domain).

Несколько небрежно можно сказать, что R определяется тем же неравенством для угловых координат $x, y \bmod 1$. Области R соответствуют кольцеобразные области $R_1 = R \times \{O_2\}$, $R_2 = \{O_2\} \times R$ на торах T_1, T_2 в $\mathbb{T}^4$. Отметим, что

$$R_1 \cap T_2 = R_2 \cap T_1 = \emptyset. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. *Если гиперболическое множество F' диффеоморфизма S' гладкого многообразия M' эквигомеоморфно F из примера Фати, то F' не является локально предмаксимальным.*

Отметим несколько простых фактов, связанных с F' , и зафиксируем обозначения для нескольких объектов, тоже связанных с F' и получающихся из примера Фати под действием фигурирующего в теореме эквигомеоморфизма $F \rightarrow F'$, который обозначим через f . Множество F' состоит из двух частей $T'_1 = fT_1$, $T'_2 = fT_2$, пересекающихся только в точке $O' = fO_4$. Кольцеобразные замкнутые области R_1, R_2 переходят в области $R'_1 = fR_1$, $R'_2 = fR_2$ на T'_1, T'_2 . Из (3) следует, что компакты R'_1 и T'_2 не пересекаются, равно как и R'_2 и T'_1 , поэтому существует такое $d > 0$, что

$$\rho(R'_1, T'_2) > d, \quad \rho(R'_2, T'_1) > d. \quad (4)$$

(Под расстоянием между множествами понимается, как обычно, точная нижняя грань – в данном случае минимум – расстояний между их точками.)

Далее, ввиду непрерывности f и компактности F существует такая непрерывная неубывающая функция $\omega(r) \geq 0$ (“модуль непрерывности”), которая определена при всех достаточно малых $r \geq 0$,⁹ обращается в 0 при $r = 0$ и такова, что

$$x, y \in F, \quad \rho(x, y) \leq r \implies \rho(f(x), f(y)) \leq \omega(r). \quad (5)$$

Наконец, заметим, что поскольку гиперболические множества T'_1, T'_2 эквигомеоморфны T_1, T_2 , то T'_1 и T'_2 тоже являются локально максимальными инвариантными множествами для динамической системы $\{S'^j\}$. Поэтому имеются такие их окрестности $U_{r_1}(T'_1)$ и $U_{r_2}(T'_2)$, что

$$T'_1 = I(U_{r_1}(T'_1)), \quad T'_2 = I(U_{r_2}(T'_2)). \quad (6)$$

Опишем теперь пример Фишера. В нем M является произвольной замкнутой поверхностью, а гиперболическое множество F ее диффеоморфизма S состоит из седловой неподвижной точки P , аттрактора Плыкина Λ_a ¹⁰ и “соединяющей” их траектории $\{S^n z : n \in \mathbb{Z}\}$ (т.е. траектории, для которой $S^n z \rightarrow P$ при $n \rightarrow -\infty$ и $\rho(S^n z, \Lambda_a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Существование таких S и F ¹¹ нуждается в доказательстве, которое тоже приводится в [2].

Вот, собственно, и все, что надо было сказать о примере Фишера. Это намного меньше, чем было сказано о примере Фати, потому что о последнем говорилось почти что ав ово, а в связи с примером Фишера мы ссылаемся на [2] и будем подразумевать некоторое знакомство с аттрактором Плыкина, а также с устойчивыми

⁹Собственно, ее естественно считать определенной при $r \leq \max\{\rho(x, y) : x, y \in F\} = \sqrt{2}$. Но нам понадобится только $\omega(r)$ с малыми r .

¹⁰Индекс a , видимо, должен напоминать об аттракторе. Сам Плыкин начинал с гиперболического аттрактора на сфере, но таковой можно “перенести” на другую поверхность M .

¹¹Особенно с нужными Фишеру дополнительными свойствами, варьируя которые он получает еще несколько утверждений, что мы оставляем в стороне.

и неустойчивыми многообразиями. В обоих примерах F состоит из двух частей – T_1, T_2 в примере Фати, Λ_a и P в примере Фишера – и связывающей их траектории (в примере Фати это неподвижная точка O_4 , которая содержится в обоих T_i , а в примере Фишера это $(S^n z)$), причем “основные” две части (названные первыми), рассматриваемые как отдельные (“самостоятельные”) подмножества M локально максимальны (об этом для примера Фати см. выше, локальная максимальность аттрактора очевидна, локальная максимальность гиперболической неподвижной точки общеизвестна и фактически еще раз доказана выше, когда говорилось о локальной максимальной T_i) и которые “связаны” посредством некоторой траектории (неподвижной точкой O_4 в одном случае и $(S^n z)$ в другом). Аналогично тому, что говорилось по поводу примера Фати, если гиперболическое множество F' диффеоморфизма S' гладкого многообразия M' эквивогоморфно F из примера Фишера посредством эквивогоморфизма $f: F \rightarrow F'$, то оно состоит из двух “основных” частей – неподвижной точки $P' = fP$ и гиперболического множества $\Lambda' = f\Lambda_a$, а также “соединяющей” их траектории $((S')^n z')$, где $z' = fz$. Множество Λ' , конечно, не обязано быть аттрактором, но оно локально максимально как эквивогоморфный образ локально максимального множества Λ_a .

ТЕОРЕМА 2. *Если гиперболическое множество F' диффеоморфизма S' гладкого многообразия M' эквивогоморфно F из примера Фишера, то F' не является локально предмаксимальным.*

(Соответствующий эквивогоморфизм в обоих случаях – Фати и Фишера – обозначим через f .)

Таким образом, по крайней мере в примерах Фати и Фишера свойство F не быть локально предмаксимальным обусловлено “внутренними” свойствами действия S на F , пока мы ограничиваемся гиперболическими множествами. Как уже говорилось, некоторое “внутреннее” свойство такого рода указано в лемме 2. Но оно, похоже, имеет довольно специальный характер и ограниченную применимость. (Пока?) неясно, нельзя ли сформулировать такие свойства “внутренней динамики” в гиперболическом множестве, которые могли бы играть аналогичную роль в более общей ситуации.

4. Нам понадобится

ЛЕММА 1. *Пусть H – локально максимальное инвариантное множество гомеоморфизма $\Phi: M \rightarrow M$ метрического пространства M на себя, и пусть имеется такое семейство траекторий¹² $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \xi)$, что $\varphi(n, t) = (n + 1, t)$ и*

1) $\xi(0, 0) \in H$ (так что и вся траектория $\xi(\mathbb{Z} \times 0) \subset H$);

2) когда $|n| \rightarrow \infty$, то $\rho(\xi(n, t), H) \rightarrow 0$ равномерно по t .

Тогда $H \supset \xi(\mathbb{Z} \times [0, a])$ (иными словами, любая траектория $(\xi(n, t) : n \in \mathbb{Z})$ лежит в H).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$T = \{t \in [0, a] : \xi(0, t) \in H'\} = \{t \in [0, a] : \xi(\mathbb{Z} \times t) \subset H\}.$$

¹²Общее определение семейства траекторий каскада (динамической системы $\{\Phi^n\}$ с дискретным временем) с фазовым пространством M гласит: это есть тройка (X, φ, ξ) , где X – топологическое пространство, φ – его гомеоморфизм на себя, а $\xi: X \rightarrow M$ – непрерывное отображение, эквивариантное относительно действий φ и S в X и M , т.е. $\xi\varphi = S\xi$.

Оно непусто, ведь из 2) явствует, что $0 \in T$, замкнуто (ибо H замкнуто) и, как будет доказано, является открытым в $[0, a]$. Когда последнее будет доказано, то отсюда будет следовать, что $T = [0, a]$, т.е. $\xi(\mathbb{Z} \times [0, a]) \subset H$.

Пусть $t \in T$. Мы увидим, что T содержит все $\tau \in [0, a]$, достаточно близкие к t . Поскольку H максимально в некоторой своей замкнутой окрестности $\overline{U_\eta(H)}$, то отсюда следует, что если траектория некоторой точки x лежит в $\overline{U_\eta(H')}$, то $x \in H$ (равно как и вся траектория точки x лежит в $\overline{U_\eta(H)}$). Ввиду 2) существует некоторое число N с тем свойством, что при всех τ

$$n \leq -N \implies \xi(n, \tau) \in U_\eta(H'), \quad n \geq N \implies \xi(n, \tau) \in U_\eta(H').$$

Значит, при всех τ

$$|n| \geq N \implies \xi(n, \tau) \in U_\eta(H) \subset U_\eta(H). \quad (7)$$

Если $\tau \in [0, a]$, $|t - \tau| < \varepsilon$ и ε достаточно мало, то

$$|n| \leq N \implies \rho(\xi(n, \tau), \xi(n, t)) < \eta,$$

и поскольку $\xi(\mathbb{Z} \times t) \subset H$,

$$\xi([-N, N] \times \tau) \subset U_\eta(H). \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что $\xi(\mathbb{Z} \times \tau) \subset U_\eta(H)$, а тогда получается, что $\xi(0, \tau) \in H$, $\tau \in T$.

ЛЕММА 2. Пусть выполняются условия леммы 1, кроме локальной максимальности H . При дополнительном предположении

3) $\exists t_1 \quad \xi(0, t_1) \notin H$ (так что и для всей траектории $\xi(\mathbb{Z} \times t_1) \cap H = \emptyset$) множество H не является локально предмаксимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, положим $2\alpha = \rho(\xi(0, t_1), H)$. Тогда H не может быть подмножеством локально максимального множества $\tilde{H} \subset U_\alpha(F)$: согласно лемме 1, примененной к $\tilde{H}$, такое $\tilde{H}$ должно содержать все $\xi(\mathbb{Z} \times [0, a])$, но ввиду 3) в последнем множестве имеется точка, лежащая вне $U_\alpha(H)$, тогда как $\tilde{H}$ содержится в этой окрестности.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы применим лемму 2 с такими “данными”: Φ и H – это S' и F' из теоремы 1, $X = \mathbb{Z} \times [0, v_0]$ (число v_0 пока не фиксировано – ради определенности можно взять $v_0 = 1$, – но потом оно будет уменьшено до некоторого $\bar{v}_0$), $\varphi(j, v) = (j + 1, v)$, а семейство траекторий (X, φ, ξ) будет ε -отслеживать семейство псевдотраекторий (X, φ, g) , где

$$g(j, v) = \begin{cases} fP(\lambda^{j+1}ve_A^s, \widehat{O}_2) & \text{при } j < 0, \\ O' & \text{при } j = 0, \\ fP(\widehat{O}_2, \mu^{j-1}ve_B^u) & \text{при } j > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим сразу же непрерывность g . Она равносильна непрерывности отображений $v \mapsto g(j, v)$ со всевозможными j . Каждая такая функция определяется одной из строк (9), а в каждой строке непрерывность по v очевидна. Заметим тут же, что $g(j, v) \in F'$ при всех $j > 0, v$.

Ниже мы установим, что для любого $\delta > 0$ имеется такое $\bar{v}_0 > 0$, что $(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0], \varphi, g)$ является семейством δ -траекторий. Стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\bar{v}_0 > 0$, что семейство псевдотраекторий $(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0], \varphi, g)$ ε -отслеживается каким-то семейством траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0], \varphi, \xi)$. Мы убедимся, что при достаточно малых ε (и $\bar{v}_0$) полученное семейство траекторий удовлетворяет требованиям леммы 2.

При $j < 0$ точки $g(j, v)$ лежат на кривой $fP(\mathbb{R}e_A^s \times \hat{O}_2)$, т.е. на находящейся в T'_1 части устойчивого многообразия точки O' . При этом

$$g(-1, v) = fP(ve_A^s, \hat{O}_2),$$

$$g(j, v) = fP\hat{S}^{j+1}(ve_A^s, \hat{O}_2) = fS^{j+1}P(ve_A^s, \hat{O}_2) = S'^{j+1}fP(ve_A^s, \hat{O}_2) = S'^{j+1}g(-1, v).$$

Аналогично, при $j > 0$ точки $g(j, v)$ лежат на кривой $fP(\hat{O}_2 \times \mathbb{R}e_B^u)$, т.е. на находящейся в T'_2 части неустойчивого многообразия O' . При этом

$$g(1, v) = fP(\hat{O}_2, ve_B^u),$$

$$g(j, v) = fP\hat{S}^{j-1}(\hat{O}_2, ve_B^u) = fS^{j-1}P(\hat{O}_2, ve_B^u) = (S')^{j-1}fP(\hat{O}_2, ve_B^u) = (S')^{j-1}g(1, v).$$

Таким образом, при $j < 0$ движение (с изменением j) точки $g(j, v)$ совпадает с движением по некоторой траектории динамической системы $\{(S')^j\}$. Эта траектория лежит на устойчивом многообразии точки O' (и притом на той его части, которая содержится в T'_1 , – ведь $T'_1 = f(T_1)$ содержит все точки вида $fP(\hat{x}, \hat{O}_2)$). С увеличением j движущаяся точка приближается к O' во внутренней метрике устойчивого многообразия (индуцированной на нем как на иммерсированном подмногообразии какой-нибудь – сейчас безразлично какой – метрикой на M'). При $j > 0$ движение (с изменением j) точки $g(j, v)$ совпадает с движением по некоторой траектории той же системы $\{(S')^j\}$, причем эта траектория лежит на неустойчивом многообразии точки O' (и притом на той его части, которая содержится в T'_2). С уменьшением j движущаяся точка приближается к O' во внутренней метрике неустойчивого многообразия. Части псевдотраектории $g(j, v)$, отвечающие $j < 0$ и $j > 0$, являются настоящими полутраекториями, но эти последние суть части различных траекторий. Движущаяся точка “перескакивает” с отрицательной полутраектории на положительную в два “скачка”, которые происходят при $j = -1, 0$ (т.е. $S'g(-1, v) \neq g(0, v)$, $S'g(0, v) \neq g(1, v)$). (Можно было бы построить подходящий пример с одним “скачком”, но излагаемый вариант кажется несколько более удобным.)

Мы проверим, что при $v \approx 0$ “скачки” получаются малыми, но сначала уточним требуемую степень малости. Зафиксируем какое-нибудь $\varepsilon \in (0, \min(d, r_1, r_2))$, где d – то же, что в (4), а r_i – те же, что в (6). При достаточно малом $\delta > 0$ теорема о δ -траекториях гарантирует, что семейство δ -траекторий в $U_\delta(F')$ ε -отслеживается семейством настоящих траекторий. Как мы увидим,

$$\rho(S'g(-1, v), g(0, v)) \leq \omega(|\lambda|v), \quad \rho(S'g(0, v), g(1, v)) \leq \omega(v), \quad (10)$$

где ω – та же функция, что в (5). Отсюда вытекает существование такого $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(\delta)$, что ограничение $g|_{\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0]}$ является семейством δ -траекторий.

Имеем

$$S'g(-1, v) = S'fP(ve_A^s, \hat{O}_2) = fSP(ve_A^s, \hat{O}_2) = fP\hat{S}(ve_A^s, \hat{O}_2) = fP(\lambda ve_A^s, \hat{O}_2),$$

$$g(0, v) = O' = f(O_4).$$

Поэтому

$$\rho(S'g(-1, v), g(0, v)) = \rho(fP(\lambda ve_A^s, \widehat{O}_2), f(O_4)) \leq \omega(\rho(P(\lambda ve_A^s, \widehat{O}_2), O_4))$$

(здесь использовано (5)), а

$$\rho(P(\lambda ve_A^s, \widehat{O}_2), O_4) = \rho(p(\lambda ve_A^s), O_2) \leq |\lambda ve_A^s - \widehat{O}_2| = |\lambda|v.$$

(Первое равенство использует тот факт, что расстояния между точками тора T_1 в $\mathbb{T}^4$, взятые в метрике тора T_1 и объемлющего тора $\mathbb{T}^4$, совпадают, а неравенство явствует из (1)). Сопоставляя полученные неравенства, приходим к первому из неравенств (10). Второе доказывается аналогично и даже чуть короче:

$$\begin{aligned} S'g(v, 0) &= S'O' = S'fO_4 = fSO_4 = fO_4, & g(v, 1) &= fP(\widehat{O}_2, ve_B^s), \\ \rho(S'g(v, 0), g(v, 1)) &= \rho(fO_4, fP(\widehat{O}_2, ve_B^s)) \\ &\leq \omega(\rho(P(\widehat{O}_2, ve_B^s), O_4)) \leq \omega(\rho(p(ve_B^s), O_2)) \leq \omega(v). \end{aligned}$$

Зафиксируем какое-нибудь $\varepsilon < \min(d, r_1, r_2)$ с d из (4) и r_1, r_2 из (6), для которого область $U_\varepsilon(F')$ относительно компактна. Уменьшив, если потребуется, ε , можно считать, что $U_\varepsilon(F')$ содержится в окрестности U множества F' , о которой говорится в теореме о семействе δ -траекторий, примененной к гиперболическому множеству F динамической системы $\{(S')^j\}$. Теорема сопоставляет каждому числу $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ с соответствующими свойствами. Возьмем δ , отвечающее указанному выше ε . Существует такое $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(\delta) > 0$, что $\omega(\bar{v}_0) < \delta$. Ограничив g на $\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0]$, получим семейство δ -траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0], \varphi, g)$, которое ε -отслеживается семейством траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0], \varphi, \xi)$ с некоторым $h: \mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0] \rightarrow M'$. (Выше уже отмечалось, что $g(\mathbb{Z} \times [0, \bar{v}_0]) \subset F$ и, тем самым, $\subset U$.) Покажем, что ξ удовлетворяет условию леммы.

Прежде всего, отрицательная полутраектория

$$((S')^j \xi(v, 0) : j \leq 0) = (h(j, v) : j \leq 0)$$

целиком содержится в $U_\varepsilon(T'_1)$, а положительная полутраектория

$$((S')^j \xi(v) : j \geq 0) = (h(j, v) : j \geq 0)$$

целиком содержится в $U_\varepsilon(T'_2)$. Это видно из того, что $g(j, v)$ лежит в T'_1 при $j \leq 0$ и в T'_2 при $j \geq 0$, а $\rho(g(j, v), h(j, v)) < \varepsilon$.

Докажем, что

$$(S')^j \xi(v) \rightarrow T'_2 \quad \text{равномерно по } v, \text{ когда } j \rightarrow \infty, \quad (11a)$$

$$(S')^j \xi(v) \rightarrow T'_1 \quad \text{равномерно по } v, \text{ когда } j \rightarrow -\infty, \quad (11b)$$

чем будет установлено выполнение первого из условий леммы (условия (5) с теперешним M' в роли M , S' в роли Φ и F' в роли H). Допустим, что (11a) неверно. Тогда должно существовать такое $r > 0$, что для любого $n > 0$ при некоторых $j_n > n$ и $v_n \in [0, \bar{v}_0]$ будет

$$\rho((S')^{j_n} \xi(v_n), T'_2) > \alpha. \quad (12)$$

Имеется такая последовательность $n_i \rightarrow \infty$, что подпоследовательность v_{n_i} сходится к некоторому w . В силу (12)

$$\rho(w, T'_2) \geq \alpha. \quad (13)$$

В то же время $(S')^j \xi(v) \in U_\varepsilon(T'_2)$ при всех $j \geq 0$ и всех $v \in [0, \bar{v}_0]$; значит, при любом $j \in \mathbb{Z}$

$$(S')^j w = \lim_{i \rightarrow \infty} (S')^{j+j_{n_i}} \xi(v_{n_i}) \in \text{clos } U_\varepsilon(T'_2)$$

(clos означает замыкание). (Надо учесть, что при достаточно больших i выполнено $j + j_{n_i} > 0$, поэтому $(S')^{j+j_{n_i}} \xi(v_{n_i}) \in U_\varepsilon(T'_2)$.) Итак, вся траектория $((S')^j w)$ лежит в $\text{clos } U_\varepsilon(T'_2)$, а раз $\varepsilon < r_2$, то эта траектория лежит в $U_{r_2}(T'_2)$. В силу (6), тогда она содержится в T'_2 , а это противоречит (13).

Тем самым опровергнуто допущение об ошибочности (11a). Совершенно аналогично обстоят дела с (11b).

Остается убедиться, что $\xi([0, \bar{v}_0]) \not\subset F'$ (второе условие леммы). В противном случае при каждом v вся траектория $(S')^j \xi(v)$ целиком содержалась бы в F' и, значит, была бы образом (при отображении f) какой-то лежащей в F траектории динамической системы $\{S^j\}$. Но последняя траектория должна целиком лежать в T_1 или целиком лежать в T_2 . Значит, траектория $((S')^j \xi(v))$ должна была бы целиком лежать в T'_1 или в T'_2 . Но мы докажем, что, по крайней мере, при некоторых v она не содержится целиком ни в T'_1 , ни в T'_2 . Доказательство опирается на следующее простое утверждение, которое само по себе относится скорее к теории чисел, чем к теории динамических систем (поэтому я и вынес его доказательство в отдельный п. 6).¹³

Существуют такие $v_n > 0$ и такие целые $k_n, l_n > 0$, что $v_n \rightarrow 0$ и

$$p(\lambda^{-k_n} v_n e_A^s) \in R, \quad p(\mu^{l_n} v_n e_B^u) \in R \quad (14)$$

(R – кольцообразная замкнутая область, описанная в п. 3).

Стало быть,

$$P(\lambda^{-k_n} v_n e_A^s, \hat{O}_2) \in R_1, \quad P(\hat{O}_2, \mu^{l_n} v_n e_B^u) \in R_2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} g(-k_n - 1, v_n) &= fP(\lambda^{-k_n} v_n e_A^s, \hat{O}_2) \in f(R_1) = R'_1, \\ g(l_n + 1, v_n) &= fP(\hat{O}_2, \mu^{l_n} v_n e_B^u) \in f(R_2) = R'_2, \end{aligned}$$

и в силу (4)

$$\rho(g(-k_n - 1, v_n), T'_2) > d, \quad \rho(g(l_n + 1, v_n), T'_1) > d.$$

Когда n достаточно велико, $v_n \in [0, \bar{v}_0]$, так что определена интересующая нас траектория $((S')^j \xi(v_n))$. Поскольку эта траектория ε -отслеживает псевдотраекторию $(g(j, v_n))$, то

$$\rho((S')^{-k_n-1} \xi(v_n), T'_2) > d - \varepsilon > 0, \quad \rho((S')^{l_n+1} \xi(v_n), T'_1) > d - \varepsilon > 0,$$

так что траектория $((S')^j \xi(v_n))$, действительно, не содержится целиком ни в T'_1 , ни в T'_2 .

¹³Привлекая сведения, относящиеся к пограничной области между теорией чисел и эргодической теорией, можно доказать намного больше, но нам это не нужно.

6. Хотя в том утверждении, которое сформулировано (выделено курсивом) в конце п. 5 и которое нам осталось доказать, говорится о торе, ясно, что на самом деле оно “одномерно” и относится к одной только первой угловой координате x точек $p(\lambda^{-k} v e_A^s)$ и $p(\mu^l v e_B^u)$. Если $e_A^s = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $e_B^u = (\cos \beta, \sin \beta)$, то эта координата по модулю 1 равна

$$\lambda^{-k} v \cos \alpha, \mu^l v \cos \beta;$$

заметим, что $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$,¹⁴ а второе из условий леммы – условие (14) – сводится к тому, что

$$\{\lambda^{-k} v \cos \alpha\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad (15a)$$

$$\{\mu^l v \cos \beta\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad (15b)$$

(фигурные скобки означают дробную долю), когда v содержится в некоторой последовательности v_n , стремящейся к нулю, а k_n и l_n суть некие целые $k_n, l_n > 0$.

В основном все сводится к такому факту: для любых θ с $|\theta| > 1$, $\gamma \neq 0$ и любого отрезка $[a, b]$ имеются такое целое $m > 0$ и такой подотрезок $[c, d] \subset [a, b]$, что для всех $x \in [c, d]$ дробная доля $\{\gamma \theta^m x\}$ лежит в отрезке $[1/3, 2/3]$. Для его доказательства рассмотрим отображение

$$\Theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \theta x,$$

и его итерации. Под действием Θ^m отрезок $[\gamma a, \gamma b]$ переходит в отрезок длины $|\theta|^m |\gamma| (b - a)$. Если последняя превосходит 2, то в отрезке $\Theta^m([\gamma a, \gamma b])$ содержится некоторый отрезок вида $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{Z}$, и, тем более, некоторый отрезок вида $[i+1/3, i+2/3]$. Отрезок же $\Theta^m([a, b])$ содержит в этом случае подотрезок $[(i+1/3)/\gamma, (i+2/3)/\gamma]$. Прообраз последнего при отображении Θ^m годится в качестве искомого отрезка $[c, d]$.

Положив $\theta = 1/\lambda$, $\gamma = \cos \alpha$, $[a, b] = I$, заключаем, что в любом отрезке I содержится такой подотрезок I' , что при некотором $k > 0$ для всех $v \in I'$ выполнено условие (15a). Принимая теперь $[a, b] = I'$, $\theta = \mu$, $\gamma = \cos \beta$, приходим к выводу, что в I' имеется такая точка v , что для нее помимо условия (15a) выполнено и условие (15b) с некоторым $l > 0$.

Полагая в последнем рассуждении отрезок I равным $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$, получаем: существуют такая точка $v_n \in I_n$ и такие целые $k_n, l_n > 0$, что при $v = v_n$, $k = k_n$, $l = l_n$ выполнены оба условия (15). (При этом очевидно, что $v_n \rightarrow 0$.) Это и надо было доказать.

7. Последние два пункта посвящены двум доказательствам теоремы 2. Оба основаны на лемме 2. В настоящем пункте содержится доказательство, использующее локальные устойчивые и неустойчивые многообразия, а также теорему о структуре прямого произведения (это близко к рассуждениям Фишера, а также к прежним доказательствам теоремы Фати). В следующем пункте я очень кратко намечу

¹⁴Собственный вектор целочисленной гиперболической матрицы с определителем ± 1 не может быть вертикальным. В противном случае матрица имела бы вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, где a, b, c целые и $ac = \pm 1$, так что $|a| = |c| = 1$. А ведь a и c – собственные значения такой матрицы, так что она не гиперболическая.

доказательство, в котором аналогично п. 5 используется теорема об отслеживании семейств псевдотраекторий.

Прежде чем заниматься собственно доказательством теоремы 2, надо сделать несколько замечаний общего характера.

Локальные устойчивое и неустойчивое многообразия $W_\varepsilon^s(x)$, $W_\varepsilon^u(x)$ могут определяться по-разному; при различных определениях могут получаться несколько различающиеся множества. Эти различия не являются существенными – в этом отношении ситуация напоминает ситуацию в анализе на $\mathbb{R}^2$, где с равным успехом часто используется одна из норм

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|), \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(и может использоваться также ряд других норм). Ради определенности я опишу тот вариант, который будет использоваться ниже. Идея состоит, конечно, в том, что $W_\varepsilon^s(x)$ или $W_\varepsilon^u(x)$ состоят из тех точек многообразий $W^s(x)$ или $W^u(x)$, которые “близки” x на этом инъективно иммерсированном многообразии; “близость” означает “внутреннюю близость” на последнем; эта близость характеризуется каким-то образом числом ε . Если у нас имеется подходящая метрика на $W^s(x)$ или $W^u(x)$, то мы определяем $W_\varepsilon^s(x)$ и $W_\varepsilon^u(x)$ просто как замкнутые¹⁵ ε -шары с центрами в x .¹⁶ Например, можно использовать расстояние в смысле римановой метрики на $W^{s,u}(x)$, индуцированной той римановой метрикой, которая используется во всем фазовом многообразии M .¹⁷ Однако удобно использовать другую метрику, а именно:

- если $x, y \in W^s(b)$, где b – точка рассматриваемого гиперболического множества H , то полагаем

$$\rho_s(x, y) = \sup_{n \geq 0} \rho(h^n x, h^n y);$$

- если $x, y \in W^u(b)$, где $b \in H$, то полагаем

$$\rho_u(x, y) = \sup_{n \geq 0} \rho(h^{-n} x, h^{-n} y).$$

ЛЕММА 3. Пусть H – гиперболическое множество диффеоморфизма Φ . Существуют такие $\beta > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, что для всех $b \in H$

$$\forall x, y \in W_\beta^s(b) \quad \forall n \geq 0 \quad \rho(\Phi^n x, \Phi^n y) \leq \gamma^n \rho(x, y), \quad (16)$$

$$\forall x, y \in W_\beta^u(b) \quad \forall n \geq 0 \quad \rho(\Phi^{-n} x, \Phi^{-n} y) \leq \gamma^n \rho(x, y). \quad (17)$$

Отсюда следует, что для всех $b \in H$

$$\forall x, y \in W_\beta^s(b) \quad \rho_s(x, y) = \rho(x, y), \quad \forall x, y \in W_\beta^u(b) \quad \rho_u(x, y) = \rho(x, y).$$

Это лемма из локальной теории. Явно или неявно ее доказывают, когда строят локальные устойчивое и неустойчивое многообразия, а также обсуждают поведение траекторий на них.

¹⁵В данном случае замкнутые шары удобнее открытых.

¹⁶Но имеется также вариант определения $W_\varepsilon^{s,u}(x)$, в котором никакой метрики на $W^{s,u}(x)$ не используется. Он непосредственно связан с построением или описанием такого многообразия как графика некоторой функции. Тогда ε характеризует “размер” той области, где эта функция определена.

¹⁷Я всегда буду использовать в M ляпуновскую метрику (метрику Мезера, adopted metric).

ЛЕММА 4. Пусть H – гиперболическое множество диффеоморфизма Φ . Существуют такие $\beta > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, что для всех $b \in H$ для дифференциала (касательного отображения, производной) Φ'

$$\begin{aligned} \forall x \in W_\beta^s(b) \quad \forall X \in T_x W_\beta^s(b) \quad \forall n \geq 0 \quad & |(\Phi^n)'X| \leq \gamma^n |X|, \\ \forall y \in W_\beta^u(b) \quad \forall Y \in T_y W_\beta^u(b) \quad \forall n \geq 0 \quad & |(\Phi^{-n})'Y| \leq \gamma^n |Y|. \end{aligned}$$

Лемму 4 можно рассматривать как инфинитезимальный вариант леммы 3 и также как ее следствие. (Из леммы 3 следует, что, обозначая через $l(C)$ длину гладкой кривой C , лежащей в $W_\beta^s(b)$ (соответственно в $W_\beta^u(b)$), имеем $l(\Phi C) < \gamma l(C)$ (соответственно $l(\Phi^{-1}C) < \gamma l(C)$).)

ЛЕММА 5. В тех же обозначениях, если $x, y, b \in H$, то

$$x \in W^s(b) \implies T_x W^s(b) = E_x^s, \quad y \in W^u(b) \implies T_y W^u(b) = E_y^u.$$

(Здесь E_x^s, E_y^u – стандартные обозначения для устойчивого и неустойчивого подпространств касательных пространств $T_x M, T_y M$ при $x, y \in H$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала это доказывается, когда $x \in W_\beta^s(b), y \in W_\beta^u(b)$ с достаточно малым β . В этом случае данное утверждение относится к локальной теории; его можно также рассматривать как простое следствие леммы 4. Пусть теперь $x \in W^s(b)$ и $X \in T_x W^s(b)$. Тогда при некотором n будет $(\Phi^n)'X \in T_{\Phi^n x} W_\beta^s(\Phi^n b)$, так что $(\Phi^n)'X \in E_{\Phi^n x}^s$ и $X \in E_x^s$. Отсюда следует наше утверждение для точек из $W^s(b)$. Для точек из $W^u(b)$ проходит аналогичное рассуждение с заменой Φ на Φ^{-1} .

Нам понадобится следующий вариант известной “теоремы о локальной структуре (прямого) произведения” (вопреки названию, такой структуры в этом варианте нет).

ТЕОРЕМА 3. Пусть H – гиперболическое множество диффеоморфизма Φ . Тогда существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что

- 1) для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ найдется $\alpha(\varepsilon) > 0$, имеющее свойство

$$x, y \in H, \quad \rho(x, y) < \alpha(\varepsilon) \implies W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \text{ состоит ровно из одной точки};$$

- 2) эта точка, которую обычно обозначают через $[x, y]$, непрерывно зависит от x, y , т.е. отображение

$$\{(x, y) : x, y \in H, \rho(x, y) < \alpha\} \rightarrow S, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

непрерывно.

Эту теорему часто формулируют только для локально максимальных H . Тогда в ее заключение добавляется еще одно утверждение, которое оправдывает упоминание о “локальной структуре произведения”:

- 3) если H локально максимально, то для достаточно малых ε (и для соответствующих $\alpha(\varepsilon)$) “произведение” $[x, y] \in H$; кроме того, у каждой точки $x \in H$ имеется замкнутая окрестность в H , состоящая из точек y вида $[u, v]$ с $u \in W_\varepsilon^u(x) \cap H, v \in W_\varepsilon^s(x) \cap H$, и представление y в таком виде однозначно.

Но, как было сказано, 3) нам не понадобится.

Теперь мы можем заняться собственно доказательством теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В начале доказательства говорится о множестве Фишера F (а еще не о его эквигомеоморфном образе F'). Пока для нас существенно только то, что $\dim W^u(b) = 1$ для всех $b \in F$. Из локальной теории явствуют следующие два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует такое $t_1 > 0$, что при всех $t \in (0, t_1)$ и всех $b \in F$ локальное неустойчивое многообразие $W_t^u(b)$ является дугой, концы которой находятся на расстоянии t от b , а внутренние точки – на расстоянии $< t$ от b .*¹⁸

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В силу локальной максимальнойности Λ_a*

$$\rho(S^n z, \Lambda_a) \rightarrow 0 \implies \exists v \in \Lambda_a \quad \rho(S^n z, S^n v) \rightarrow 0, \quad \text{т.е.} \quad z \in W^u(v). \quad (18)$$

Выберем на $W^u(b)$ положительное направление и обозначим через $V(t)$, где $t \in (0, t_1)$, конец дуги $W_t^u(v)$, расположенный в положительном направлении от v .

Теперь, наконец, мы займемся гиперболическим множеством F' диффеоморфизма S' , являющимся образом F при эквигомеоморфизме $f: F \rightarrow F'$. Обозначим $P' = fP$, $v' = fv$, $v'(t) = fv(t)$; ранее уже появились обозначения $z' = fz$, $\Lambda' = f\Lambda_a$. Из (18) следует, что $\rho((S')^n z', (S')^n v') \rightarrow 0$ и, значит, $z' \in W^s(v')$. Аналогичным (и более элементарным образом) получается, что $z' \in W^u(P')$. Стало быть,

$$z' \in W^u(P') \cap W^s(v'). \quad (19)$$

Мы построим семейство траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \xi)$ (с таким же φ , что и раньше – $\varphi(n, t) = (n + 1, t)$), обладающее свойствами 1)–3) из лемм 1, 2. Это построение зависит, по существу, от одного параметра – большого натурального числа N . На основном шаге построения мы используем операцию, определенную только возле Λ' . Большая величина N обеспечивает, что на этом шаге построение действительно производится возле Λ' . Конечно, когда мы говорим об отрезке $[0, a]$, то фигурирующее при этом число a ¹⁹ тоже является параметром конструкции. Но его роль тривиальна – a будет маленьким и это обеспечит то, что все рассматриваемые t , которые будут браться из $[0, a]$, будут достаточно малы. Не только существование, но и желаемые свойства $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \xi)$ будут обеспечиваться благодаря большой величине N и малости a . При построении этого семейства траекторий и проверке того, что оно обладает свойствами 1)–3), будут использоваться некоторые свойства Λ' , связанные с несколькими числами β , γ , ε_1 , а на упомянутом основном шаге будет привлекаться вспомогательный параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$.

Ниже β , γ будут числами из леммы 3 для $H = F'$, $\Phi = S'$, ε_1 будет числом из теоремы 3 для тех же H , Φ . Зафиксируем какое-нибудь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что $\varepsilon < \beta$, и пусть $\alpha > 0$ столь мало, что $\alpha < \alpha(\varepsilon)$, $\alpha < \beta$. Возьмем такое $N > 0$, что $(S')^N z' \in W_{\alpha/2}^s((S')^N v')$. Если $t_2 \in (0, t_1)$ достаточно мало, то $(S')^N v'(t) \in W_{\alpha/2}^u((S')^N v')$ при всех $t \in (0, t_2)$. Значит,

$$\rho((S')^n v'(t), (S')^n z') \leq \rho((S')^N v'(t), (S')^N v') + \rho((S')^N v', (S')^N z') \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

¹⁸Если бы речь шла о расстоянии в смысле индуцированной римановой метрики в $W^u(b)$, то это было бы справедливо при всех t .

¹⁹Которое, разумеется, не имеет отношения к обозначению Λ_a .

и, следовательно, $[(S')^N v'(t), (S')^N z']$ корректно определено как единственная точка пересечения $W_\varepsilon^s((S')^N v'(t)) \cap W_\varepsilon^u((S')^N z')$. Определим $\xi(n, t)$ как

$$\xi(0, t) = (S')^{-N}[(S')^N v'(t), (S')^N z'], \quad \xi(n, t) = (S')^n \xi(0, t).$$

Очевидно, $(\mathbb{Z} \times [0, t_2], \varphi, \xi)$ с $\varphi(n, t) = (n + 1, t)$ является семейством траекторий. Мы докажем, что оно имеет свойства 1)–3) из лемм 1, 2 (и потому в некоторой окрестности множества F' не может быть локально максимального множества, содержащего F).

1) Точка $(S')^N z'$ является единственной в пересечении $W_\varepsilon^s((S')^N v') \cap W_\varepsilon^u((S')^N z')$, так что $(S')^N z' = [(S')^N v'(0), (S')^N z']$, $z' = \xi(0, 0)$.

2) Так как $z' \in W^u(P')$, существует такое R , что $z' \in W_R^u(P')$. Теперь используем то, что $\xi(0, t)$ непрерывно зависит от t , $\xi(0, 0) = z'$ и $\xi(0, t) \in W^u(z') = W^u(P')$. Отсюда следует существование такого $a \in (0, t_2)$, что

$$\forall t \in [0, a] \quad \xi(0, t) \in W_{2R}^u(P').$$

Если $n \rightarrow -\infty$ и $y \in W_{2R}^u(P')$, то $(S')^n y \rightarrow P'$ равномерно по y . Поведение точек $\xi(n, t)$ при больших $n > 0$ явствует из включения $\xi(N, t) \in W_\varepsilon^s((S')^N v'(t))$ – из него (в сочетании с леммой 3 и с неравенством $\alpha < \beta$) вытекает, что

$$\rho(\xi(n + N, t), F_1) \leq \rho(\xi(n + N, t), (S')^{n+N} v'(t)) \leq \gamma^n \varepsilon.$$

Мы видим, что когда $n \rightarrow \infty$, то $\xi(n, t)$ приближается к F' равномерно по t .

3) Рассуждаем от противного. Допустим, что $\xi(0, t) \in F'$ при всех достаточно малых t . Так как z' является изолированной точкой F' , то у нее имеется такая окрестность $U(z')$, что

$$F' \cap U(z') = \{z'\}, \quad (20)$$

поэтому $\xi(0, t) = z'$ при всех достаточно малых t . Это значит, что

$$\begin{aligned} (S')^{-N}[(S')^N v'(t), (S')^N z'] &= z', \\ (S')^N z' &= [(S')^N v'(t), (S')^N z'] \in W_\varepsilon^s((S')^N v'(t)) \cap W_\varepsilon^u((S')^N z') \\ &\subset W^s((S')^N v'(t)) = (S')^N W^s(v'(t)), \\ z' &\in W^s(v'(t)), \quad v'(t) \in W^s(z'), \end{aligned}$$

и раз $v'(t) \in W^u(v)$, то

$$v'(t) \in W^s(z') \cap W^u(v').$$

Но $z', v', v'(t) \in F'$, стало быть,

$$T_{v'(t)} W^s(z') = E_{v'(t)}^s, \quad T_{v'(t)} W^u(v') = E_{v'(t)}^u.$$

Мы видим, что $v'(t)$ является точкой, в которой трансверсально пересекаются два инъективно иммерсированных подмногообразия дополнительной размерности. Множество таких точек счетно, тогда как $\{v'(t)\}$ несчетно.

8. В заключение я очень кратко намечу другое построение семейства траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \xi)$ с нужными свойствами. Вместо локальной структуры произведения в нем, как и в п. 5, используется теорема об отслеживании псевдотраекторий.

Приступая ко второй конструкции, мы прежде всего определим некоторое семейство псевдотраекторий $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \eta)$ (здесь φ то же, что и раньше: $\varphi(n, t) = (n + 1, t)$). Аналогично построению в п. 7 новое построение тоже зависит от двух параметров – N и a :

$$\eta(n, t) = \begin{cases} (S')^n z' & \text{при } n \leq N, \\ (S')^n v'(t) & \text{при } n > N, \quad t \in [0, a]. \end{cases}$$

Таким образом, каждая псевдотраектория получается путем склеивания двух полутраекторий – отрицательной полутраектории $((S')^n z' : n \leq N)$ и положительной полутраектории $((S')^n v'(t) : n > N)$. “Склеивание” происходит, когда от “момента времени” $n = N$ мы переходим к $n = N + 1$. Ясно, что за исключением этого момента, $(S')\eta(n, t) = \eta(n + 1, t)$. Число $\rho((S')^{N+1} z', (S')^{N+1} v'(t))$ некоторым образом характеризует, в какой степени в этот “момент времени” псевдотраектория отличается от настоящей траектории. Семейство $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \eta)$ – это семейство δ -траекторий, где $\delta = \max_t \rho((S')^{N+1} z', (S')^{N+1} v'(t))$.²⁰ Если N велико и a мало, то δ оказывается столь малым, что это семейство псевдотраекторий r -отслеживается каким-то семейством траекторий $(\mathbb{Z} \times [0, a], \varphi, \xi)$. Число $r > 0$ здесь можно задать наперед.

Мы должны проверить, что это семейство траекторий обладает свойствами 1)–3). (При этом мы можем увеличить N и уменьшить a .)

Свойство 1) следует из того, что

$$\rho(\xi(n, 0), (S')^n z') \quad \text{мало при всех } n. \quad (21)$$

(При $n \leq N$ даже $\eta(n, 0) = (S')^n z'$, а когда $n > N$, то $\eta(n, 0) = (S')^n v' \approx (S')^n z'$. Согласно лемме 3 последнее приближенное равенство следует из того, что $(S')^N z' \in W_\varepsilon^s((S')^N v')$ с достаточно малым ε , а это обеспечено при достаточно большом N .) В силу известной теоремы о разделении движений около гиперболического множества²¹ (21) влечет за собой, что $\xi(n, 0) = (S')^n z'$.

Свойство 2) в нашем случае состоит из двух частей:

2а) $\rho(\xi(n, t), P') \rightarrow 0$ равномерно по (малым) t , когда $n \rightarrow -\infty$;

2б) $\rho(\xi(n, t), \Lambda') \rightarrow 0$ равномерно по (малым) t , когда $n \rightarrow \infty$.

Дабы доказать 2а), заметим, что

$$\exists L > 0 \quad \forall n \geq L \quad \eta(n, 0) = g^{-n} Z \in U_{r/2}(P),$$

где r – любое наперед заданное малое число. Так как $\xi(n, t) \approx \eta(n, t)$ (равномерно по t) при всех n , то $\xi(-n, t) \in U_r(P')$ при всех $n \geq L$ (и всех малых t).²² Из локальной

²⁰ Я принял здесь определение δ -траектории как такой последовательности $(x_n : n \in \mathbb{Z})$, для которой $\rho((S')x_n, x_{n+1}) \leq \delta$ (не $<$).

²¹ Западные авторы часто пользуются родственным свойством, называемым “expansiveness” [4]; его в данном случае тоже достаточно.

²² Ранее было сказано, что $\rho(\xi(n, t), \eta(n, t)) < r$, но теперь нам надо, чтобы выполнялось $\rho(\xi(n, t), \eta(n, t)) < r/2$. Это, в сущности, вопрос об обозначениях (ибо r в последнем неравенстве можно сделать сколь угодно малым).

теории гиперболических неподвижных точек тогда следует, что $\xi(n, t) \in W_r^u(P')$, и $\xi(n, t) \rightarrow P'$ равномерно по t , когда $n \rightarrow -\infty$.

Часть 2b) доказывается аналогично, только вместо локальной теории гиперболических неподвижных точек делается ссылка на более сложную локальную теорию гиперболических множеств и используется локальная максимальность Λ' .

Доказывая 3), мы установим сначала, что для любых малых t

$$\xi(0, t) \in F \implies \xi(0, t) = z', \quad \text{т.е.} \quad \xi(n, t) = (S')^n z'.$$

Это делается так же, как и в первом доказательстве (см. п. 5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеем*

$$\exists s > 0 \quad \exists \tau > 0 \quad \forall t \in (0, \tau] \quad \exists n > 0 \\ \rho(\eta(n + N, t), \eta(n + N, 0)) = \rho((S')^{n+N} v'(t), (S')^{n+N} v') \geq s. \quad (22)$$

Если бы мы опустили “ $n > 0$ ”, то утверждение

$$\exists s > 0 \quad \exists \tau > 0 \quad \forall t \in (0, \tau] \quad \exists n > 0 \quad \rho((S')^{n+N} v'(t), (S')^{n+N} v') \geq s$$

было бы частным случаем разделения движений внутри гиперболического множества Λ' – за s тогда можно принять соответствующую константу разделения. Остается показать, что

$$\exists \tau > 0 \quad \forall t \in (0, \tau] \quad \forall n < 0 \quad \rho((S')^{n+N} v'(t), (S')^{n+N} z') < s. \quad (23)$$

Но из леммы 3 следует, что если $\rho_u((S')^N v'(t), (S')^N v')$ достаточно мало (а это при любом N обеспечено, когда $t \in (0, \tau]$ с подходящим $\tau = \tau(N)$), то при всех $n < 0$ выполняется неравенство во второй строке (23).

Мы можем предполагать в дальнейшем, что

$$\forall t \in [0, a] \quad \forall n \quad \rho(\xi(n, t), \eta(n, t)) \leq \frac{s}{3}.$$

Если бы оказалось, что $\forall t \in [0, a] \quad \forall n \quad \xi(n, t) \in F'$, то, как мы знаем, было бы $\xi(n, t) = (S')^n z'$ и

$$\rho(\eta(n + N, t), \eta(n + N, 0)) \leq \rho(\eta(n + N, t), \xi(n + N, t)) + \rho(\xi(n + N, 0), \eta(n + N, 0)) \leq \frac{2s}{3}.$$

Это противоречило бы предложению 3.

Благодарю Ч. Пью, М. Шуба и Т. Фишера за обсуждение вопросов, связанных с локальной максимальностью гиперболических множеств. При подготовке рукописи к печати мне очень помог А. В. Клименко.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Crovisier, “Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**:5 (2002), 401–404.
- [2] T. Fisher, “Hyperbolic sets that are not locally maximal”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1491–1509.

- [3] Д. В. Аносов, “Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем”, *Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям*, т. 2, Качественные методы, Изд-во Ин-та матем. АН УССР, Киев, 1970, 39–45.
- [4] M. Shub, “Stabilité globale des systèmes dynamiques”, *Astérisque*, **56**, Soc. Math. France, Paris, 1978.
- [5] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [6] Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Математика. Новое в зарубежной науке, **13**, Мир, М., 1979.

Д. В. Аносов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

11.12.2009