Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 669–683

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:49:13

О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович

Найдены точные значения наилучших L_1 -приближений классов $W^r F$, $r \in \mathbb{N}$, периодических функций, r -я производная которых принадлежит заданному перестановочно-инвариантному множеству F , а также классов $W^r H^\omega$ периодических функций, r -я производная которых имеет заданную выпуклую вверх мажоранту $\omega(t)$ модуля непрерывности, подпространствами полиномиальных сплайнов порядка $m \geq r + 1$ дефекта 1 с узлами в точках $2k\pi/n$ и $2k\pi/n + h$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $h \in (0, 2\pi/n)$. Показано, что эти подпространства являются экстремальными для перечисленных по Колмогорову соответствующих функциональных классов.

Библиография: 26 названий.

1. Необходимые обозначения и определения. Пусть C и L_p , $1 \leq p \leq \infty$, – пространства 2π -периодических функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$, $p' = p/(p-1)$. Через L_p^r , $r = 1, 2, \dots$, обозначим множество 2π -периодических функций f таких, что $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} := f$) локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p$, а через C^r , $r = 1, 2, \dots$, – пространство r раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $r = 0$) 2π -периодических функций.

Пусть X есть C или L_p , $1 \leq p < \infty$. Модулем непрерывности функции $f \in X$ в пространстве X (см. [1; § 6.1]) называется функция

$$\omega(f, \delta)_X := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_X, \quad \delta \geq 0.$$

Если $X = L_p$, $1 \leq p < \infty$, то вместо $\omega(f, \delta)_{L_p}$ будем писать $\omega(f, \delta)_p$, а вместо $\omega(f, \delta)_C$ будем писать $\omega(f, \delta)_\infty$.

Пусть H – подпространство пространства L_p и $g \in L_{p'}$. Если для всех $h \in H$

$$\int_0^{2\pi} g(x)h(x) dx = 0,$$

то будем писать $g \perp H$. Если H – подпространство констант, то вместо $g \perp H$ будем использовать обозначение $g \perp 1$.

Пусть множество $F \subset L_1$ таково, что $\{f \in F : f \perp 1\} \neq \emptyset$. Для $r = 1, 2, \dots$ обозначим через $W^r F$ класс функций $f \in L_1$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}$

$(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in F$. Отметим, что если F – единичный шар пространства L_p , то множество $W^r F = W_p^r$ – это стандартный соболевский класс функций, у которых $(r-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$.

Для неотрицательной функции $f \in L_1$ обозначим через $r(f, t)$ неубывающую перестановку (см. [2; с. 130]) сужения функции f на промежуток $[0, 2\pi]$. Если g – произвольная функция из L_1 , то положим (см. [3; с. 99])

$$\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t),$$

где $g_{\pm} := \max\{\pm g(t), 0\}$.

Множество $F \in L_1$ назовем Π -инвариантным, если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, следует, что $g \in F$.

Отметим, что Π -инвариантным является, например, единичный шар в любом вложенном в L_1 симметричном пространстве 2π -периодических функций, в частности, в пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$, Орлича [4], Лоренца [5], [6] и Марцинкевича [5], [6]. Другие примеры Π -инвариантных множеств можно найти, например, в [7] и [8].

Пусть $\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности, т.е. непрерывная на $[0, +\infty)$, неубывающая, полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Класс функций $f \in C^r$ таких, что $\omega(f, t)_{\infty} \leq \omega(t)$, $t \geq 0$, будем обозначать через $W^r H^{\omega}$.

Наилучшим приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p называется величина

$$E(f, H)_p = \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Наилучшее приближение класса $M \subset L_p$ множеством H из L_p в метрике L_p – это величина

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} E(f, H)_p.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ величина

$$d_n(M, L_p) = \inf_{H_n} E(M, H_n)_p, \quad (1.1)$$

где $\inf_{H_n}$ берется по всем подпространствам H_n пространства L_p , размерность которых не превосходит n , называется n -поперечником Колмогорова класса M в пространстве L_p . Подпространства H_n , которые реализуют точную нижнюю грань в правой части (1.1), называются экстремальными.

Для каждого натурального n и $m = 0, 1, \dots$ через T_{2n-1} обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, через $S_{2n,m}^1$ – пространство 2π -периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами в точках $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, а через $S_{2n,m}^2$, $n, m \in \mathbb{N}$, – пространство 2π -периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 2 с узлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi_{\lambda,m}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, – m -й $2\pi/\lambda$ -периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{\lambda,0}(t) = \text{sign} \sin \lambda t$.

При фиксированных $\omega(\cdot)$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_{n,0}(\omega, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n} - 2t\right), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\omega\left(2t - \frac{\pi}{n}\right), & \frac{\pi}{2n} \leq t \leq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Через $f_{n,r}(\omega, t)$, $r = 1, 2, \dots$, обозначим r -й $2\pi/n$ -периодический интеграл от $f_{n,0}(\omega, t)$ с нулевым средним значением на периоде.

2. Некоторые известные результаты. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p \leq \infty$, H есть T_{2n-1} , $S_{2n,m}^1$, $m \geq r-1$, или $S_{2n,m}^2$, $m \geq r$. Тогда

$$E(W_p^r, H)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \quad (2.1)$$

$$d_{2n-1}(W_p^r, L_1) = d_{2n}(W_p^r, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'} \quad (2.2)$$

и, следовательно, подпространства T_{2n-1} являются экстремальными для поперечников $d_{2n-1}(W_p^r, L_1)$ и $d_{2n}(W_p^r, L_1)$, а пространства $S_{2n,m}^1$, $m \geq r-1$, и $S_{2n,m}^2$, $m \geq r$, — для поперечников $d_{2n}(W_p^r, L_1)$.

Равенство (2.1) при $p = 1$ и $H = T_{2n-1}$ получено Никольским [9]; для $p > 1$ его установил Тайков [10]; при $p = \infty$ независимо и другим методом этот результат получила Туровец [11]. Для $H = S_{2n,m}^1$, $m \geq r-1$, равенство (2.2) установлено Лигуном [12], а для $H = S_{2n,m}^2$, $m \geq r$, — Бабенко и Парфинович [8]. Оценку снизу для нечетных поперечников при $p = 1$ получили независимо Маковоз [13] и Субботин [14], [15], а при $p = \infty$ Маковоз [16]. Оценка снизу для четных поперечников при $p = 1, \infty$ принадлежит Рубану (см., например, [2; гл. 10]). Для $1 < p < \infty$ соотношение (2.2) независимо и разными методами получили Лигун [17], Маковоз [18], Пинкус [19].

Для произвольного Π -инвариантного множества F и любых $n, r = 1, 2, \dots$ имеют место следующие равенства:

$$E(W^r F, H)_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt, \quad (2.3)$$

где, как и выше, H есть T_{2n-1} , $S_{2n,m}^1$ или $S_{2n,m}^2$, $m \geq r$. Кроме того,

$$d_{2n-1}(W^r F, L_1) = d_{2n}(W^r F, L_1) = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt, \quad (2.4)$$

откуда следует, что подпространства T_{2n-1} являются экстремальными для поперечников $d_{2n-1}(W^r F, L_1)$ и $d_{2n}(W^r F, L_1)$, а подпространства $S_{2n,m}^1$ и $S_{2n,m}^2$ при всех $m \geq r$ — для поперечников $d_{2n}(W^r F, L_1)$.

Для $H = T_{2n-1}$ и $H = S_{2n,m}^1$ соотношение (2.3) доказано в [7], а для $H = S_{2n,m}^2$ — в [8]. Соотношение (2.4) получено в [7].

Корнейчук [20]–[22] (см. также [1; теоремы 7.2.2, 7.2.5]) доказал, что для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$, при всех $n = 1, 2, \dots$, $r = 0, 1, \dots$, $m \geq r$ имеет место соотношение

$$E(W^r H^\omega, T_{2n-1})_1 = E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1)_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1. \quad (2.5)$$

Известно также, что

$$d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1) = d_{2n}(W^r H^\omega, L_1) = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1, \quad (2.6)$$

причем поперечники $d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1)$ и $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ реализуют подпространство T_{2n-1} , а поперечник $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ – подпространство $S_{2n,m}^1$, $m \geq r$. Оценки снизу для нечетных поперечников получены Моторным и Рубаном [23], а для четных Рубаном [24].

В работе [8] найдены точные значения наилучших L_1 -приближений классов $W^r H^\omega$ сплайнами из $S_{2n,m}^2$ при $m \geq r+1$, а именно, доказано, что для любых $n, r = 1, 2, \dots$ и любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ при всех $m \geq r+1$ имеет место равенство

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^2)_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1, \quad (2.7)$$

так что и подпространства $S_{2n,m}^2$, $m \geq r+1$, являются экстремальными подпространствами для поперечников $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$.

Пусть $r = 0, 1, 2, \dots$, $1 \leq p, q \leq \infty$, H – подпространство пространства L_p , $\delta > 0$. Неравенствами типа Джексона называются неравенства вида

$$E(f, H)_p \leq K \omega(f^{(r)}, \delta)_q, \quad (2.8)$$

справедливые для любой достаточно гладкой функции f с константой K , не зависящей от f .

Много работ было посвящено отысканию неравенств типа Джексона с неулучшаемыми константами. Обзор известных результатов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [1] и [25]. Нам понадобится следующая теорема, доказанная Лигуном (см. [25; теорема 14]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $r = 1, 2, \dots$, H – произвольное подпространство пространства L_1 , содержащее константы, и

$$A_{r,1} = (\|\varphi_{1,r}\|_\infty^{-1} E(W_1^r, H)_1)^{1/r}. \quad (2.9)$$

Тогда для любой функции $f \in L_1^r$ при $r = 1, 3, 5, \dots$ и $\delta \geq \pi A_{r+1,1}$

$$E(f, H)_1 \leq \frac{1}{2} A_{r+1,1}^r \|\varphi_{1,r}\|_\infty \cdot \omega(f^{(r)}, \delta)_1.$$

Для любой функции $f \in C^r$, $r = 1, 2, 3, \dots$, при $\delta \geq 2\pi A_{r+2,1}$

$$E(f, H)_1 \leq 2A_{r+2,1}^r \|\varphi_{1,r+1}\|_\infty \cdot \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty.$$

Из теоремы А и приведенных выше результатов о наилучших приближениях классов W_p^r , $p = 1, \infty$, тригонометрическими полиномами и сплайнами следует ряд точных неравенств типа Джексона (см. [25; следствия 1, 2 из теоремы 14]). Некоторые из этих точных неравенств были доказаны ранее и другими методами (см., например, [1; гл. 6]).

Приведем точные неравенства типа Джексона для наилучших L_1 -приближений сплайнами. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, H есть $S_{2n,m}^1$, $m \geq r$, или $S_{2n,m}^2$, $m \geq r+1$. Тогда для любой функции $f \in L_1^r$, $r = 1, 3, 5, \dots$, при любом $\delta \geq \pi n^{-1}$ выполняется точное неравенство

$$E(f, H)_1 \leq \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_1. \quad (2.10)$$

Если H есть $S_{2n,m}^1$, $m \geq r+1$, или $S_{2n,m}^2$, $m \geq r+2$, то для любой функции $f \in C^r$, $r = 1, 2, \dots$, при любом $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ выполняется точное неравенство

$$E(f, H)_1 \leq \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty. \quad (2.11)$$

До сих пор речь шла о вычислении точных констант в неравенствах типа Джексона при приближении фиксированными подпространствами. Рассмотрим задачу минимизации этих констант по всем подпространствам фиксированной размерности. Пусть X_q^r есть L_q^r , если $q < \infty$, и X_q^r есть C^r , если $q = \infty$. Положим для $H \subset L_p$

$$\kappa_r(H, \delta)_{p,q} = \sup \left\{ \frac{E(f, H)_p}{\omega(f^{(r)}, \delta)_q} : f \in X_q^r, f \neq \text{const} \right\},$$

т.е. $\kappa_r(H, \delta)_{p,q}$ — наименьшая константа κ в неравенстве

$$E(f, H)_p \leq \kappa \omega(f^{(r)}, \delta)_q.$$

Рассмотрим задачу вычисления величин

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} = \inf \{ \kappa_r(H, \delta)_{p,q} : H \subset L_q, \dim H \leq n \}. \quad (2.12)$$

Подпространства, реализующие $\inf$ в правой части (2.12), называются *экстремальными подпространствами* в задаче минимизации констант Джексона.

Отметим, что при всех $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} \geq \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p) = \frac{1}{2} d_n(W_q^r, L_p), \quad (2.13)$$

где $\widetilde{W}_q^r = W_p^r$, если $q < \infty$, и $\widetilde{W}_\infty^r = \{f \in W_\infty^r : f^{(r)} \in C\}$. Неравенство

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} \geq \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p)$$

при $q < \infty$ отмечено Лигуном (см. [25; неравенство (101)]), неравенство

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,\infty} \geq \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_\infty^r, L_p)$$

устанавливается аналогично. Равенство

$$d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p) = d_n(W_q^r, L_p), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

очевидно.

Из сопоставления неравенств (2.10) и (2.11) с (2.13) вытекает, что при $r = 1, 3, 5, \dots$ и $\delta \geq \pi n^{-1}$

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1} = \kappa_r(S_{2n,m}^1, \delta)_{1,1} = \kappa_r(S_{2n,m}^2, \delta)_{1,1} = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r}, \quad (2.14)$$

а при $r = 1, 2, \dots$ и $\delta \geq 2\pi n^{-1}$

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S_{2n,m}^1, \delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S_{2n,m}^2, \delta)_{1,\infty} = \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r}. \quad (2.15)$$

Следовательно, экстремальными в задаче вычисления величин $\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1}$ при $r = 1, 3, 5, \dots$, $\delta \geq \pi n^{-1}$ и $\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty}$ при $r = 1, 2, \dots$, $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ являются подпространства $S_{2n,m}^1$ и $S_{2n,m}^2$, $m \geq r$.

В данной статье мы найдем наилучшее приближение классов $W^r F$ и $W^r H^\omega$ в пространстве L_1 сплайнами порядка m минимального дефекта с узлами в точках $2\pi i/n$ и $2\pi i/n + h$, $0 < h < 2\pi/n$, $h \neq \pi/n$, $i \in \mathbb{Z}$, и для наилучших приближений функции $f \in L_p^r$, $p = 1, \infty$, такими сплайнами получим точные неравенства типа Джексона. Из этих результатов будет следовать, что подпространства таких сплайнов являются экстремальными подпространствами в задачах о n -поперечниках и экстремальными подпространствами в задаче (2.12).

3. Аппроксимация сплайнами $S_{2n,m}^1(h)$ и неравенства типа Джексона. Формулировка результатов. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$. Через $S_{2n,m}^1(h)$ будем обозначать пространство сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами в точках

$$t_j = \frac{2\pi[j/2]}{n} + (1 - (-1)^j) \frac{h}{2}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа. Отметим, что размерность этого пространства при любом m равна $2n$ (см., например, [1; следствие 2.3.7]) и $S_{2n,m}^1(\pi/n) = S_{2n,m}^1$.

Нами доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq r + 1$, $0 < h < 2\pi/n$, $1 \leq p \leq \infty$, F – произвольное Π -инвариантное множество 2π -периодических функций. Тогда

$$E(W^r F, S_{2n,m}^1(h))_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt. \quad (3.1)$$

В частности,

$$E(W_p^r, S_{2n,m}^1(h))_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \quad (3.2)$$

При $p = 1$ соотношение (3.2) верно и при $m = r$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq r + 1$, $0 < h < 2\pi/n$, $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1(h))_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1. \quad (3.3)$$

Результаты теорем 1 и 2 вместе с соотношениями (2.4) и (2.6) показывают, что $S_{2n,m}^1(h)$ наряду с T_{2n-1} , $S_{2n,m}^1$ и $S_{2n,m}^2$ являются экстремальными подпространствами для поперечников $d_{2n}(W^r F, L_1)$ и $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ (при $m \geq r + 1$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$. Для любой функции $f \in L_1^r$ при $r = 1, 3, 5, \dots$, $m \geq r + 1$ и $\delta \geq \pi n^{-1}$ выполняется точное неравенство

$$E(f, S_{2n,m}^1(h))_1 \leq \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_1. \quad (3.4)$$

Для любой функции $f \in C^r$ при $r = 1, 2, \dots$, $m \geq r + 2$ и $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ выполняется точное неравенство

$$E(f, S_{2n,m}^1(h))_1 \leq \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty. \quad (3.5)$$

При доказательстве теорем 1 и 2 нами существенно будет использована следующая теорема, которая представляет и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n, l \in \mathbb{N}$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,l}(t + \mu) + \nu$, где μ и ν выбраны так, чтобы $\tilde{\varphi}(t_j) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой функции $g \in W_\infty^l$ такой, что

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots = g(t_{2n}) = 0,$$

имеют место следующие утверждения:

- а) для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $|g(t)| \leq |\tilde{\varphi}(t)|$, причем, если $g(t)$ отлична от $\pm \tilde{\varphi}(t)$, то знак равенства имеет место только в точках t_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$;
- б) $\|g^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty$, $k = 1, 2, \dots, l - 1$.

4. Доказательства. Сначала мы докажем теорему 4, а затем теоремы 1 и 2. Теорема 3 будет получена сопоставлением теоремы А и соотношения (3.2) при $p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Функции $\tilde{\varphi}(t)$ и $g(t)$ имеют нули в точках t_j , $j = 1, \dots, 2n$. Для доказательства утверждения а) предположим, что найдется t_* такое, что $|g(t_*)| > |\tilde{\varphi}(t_*)|$. Считая для определенности, что $\tilde{\varphi}(t_*) > 0$, при подходящем λ , $0 < |\lambda| < 1$, получим $\lambda g(t_*) = \tilde{\varphi}(t_*)$. Пусть $\delta(t) = \tilde{\varphi}(t) - \lambda g(t)$. Так как $\|\lambda g^{(l)}\|_\infty < \|\tilde{\varphi}^{(l)}\|_\infty$, то δ имеет только изолированные нули. Количество этих нулей не менее $2n + 1$ и, следовательно, с учетом периодичности δ имеет на периоде не менее $2n + 2$ нулей с учетом кратности, причем не менее $2n + 1$ из них различны; следовательно, $\delta', \delta'', \dots, \delta^{(l)}$ имеют на периоде не менее $2n + 2$ перемен знака. Однако, $\delta^{(l)}(t) = \varphi_{n,0}(t) - \lambda g^{(l)}(t)$ имеет на периоде ровно $2n$ перемен знака, и мы получили противоречие, которое доказывает утверждение а).

Докажем утверждение б). Для определенности будем считать, что $\tilde{\varphi}(t) < 0$ для $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$. Пусть $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таково, что $|g'(t_{\max})| = \|g'\|_\infty$, и $i \in \mathbb{Z}$ выбрано из условия $t_{\max} \in (t_{2i}, t_{2i+2})$. Предположив, что $|g'(t_{\max})| > \|\tilde{\varphi}'\|_\infty$, мы сможем указать такое $0 < |\lambda| < 1$, что

$$\lambda g'(t_{\max}) = \|\tilde{\varphi}'\|_\infty = \tilde{\varphi}'(t_{\max}^1) = |\tilde{\varphi}'(t_{\min}^1)|, \quad (4.1)$$

где $t_{\max}^1 < t_{\min}^1$ — точки из промежутка $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, в которых функция $\tilde{\varphi}'(t)$ принимает соответственно максимальное и минимальное значения. Ясно, что точки $t_{\max}^1$, $t_{\min}^1$ принадлежат промежутку (t_{2i+1}, t_{2i+2}) .

Покажем, что $t_{\max} \in (t_{\max}^1, t_{\min}^1)$. Предположим, что $t_{\max} \leq t_{\max}^1$. Случай $t_{\max} \geq t_{\min}^1$ рассматривается аналогично.

Отметим, что для функций $\lambda g'(t)$ и $\tilde{\varphi}'(t)$ выполнены условия теоремы сравнения производных [1; теорема 3.3.2], причем $\lambda g'(t) \neq \tilde{\varphi}'(t)$ почти всюду. Обозначим через t^1 ближайший слева, а через t^2 ближайший справа к точке $t_{\max}$ нуль функции $\lambda g'(t)$; тогда с помощью предложения 3.3.3 из [1; теорема 3.3.2] нетрудно убедиться в том, что

$$t_{\max} - t^1 > \frac{\pi}{2n} = t_{\max}^1 - \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2},$$

так что

$$t^1 < t_{\max} - t_{\max}^1 + \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2} \leq \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2},$$

и, кроме того, для любого $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$ будет $\lambda g'(t) > \tilde{\varphi}'(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda g'(t) dt &> \int_{(t_{2i}+t_{2i+1})/2}^{t_{2i+1}} \tilde{\varphi}'(t) dt, \\ \left| \int_{t_{2i}}^{t^1} \lambda g'(t) dt \right| &< \left| \int_{t_{2i}}^{(t_{2i}+t_{2i+1})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt \right| = \int_{(t_{2i}+t_{2i+1})/2}^{t_{2i+1}} \tilde{\varphi}'(t) dt, \end{aligned}$$

что противоречит тому факту, что $\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} \lambda g'(t) dt = 0$.

Покажем, что функция $\lambda g'(t)$ имеет нуль на промежутке $(t_{2i+1}, t_{\max})$. Аналогично предыдущему устанавливаем, что

$$t_{\max} - t_{2i+1} > t_{\max}^1 - t_{2i+1}, \quad t^2 - t_{\max} > \frac{t_{2i+1} + t_{2i+2}}{2} - t_{\max}^1,$$

и что

$$\int_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda g'(t) dt > \int_{t_{2i+1}}^{t_{\max}^1} \tilde{\varphi}'(t) dt, \quad \int_{t_{\max}}^{t^2} \lambda g'(t) dt > \int_{t_{\max}^1}^{(t_{2i+1}+t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt.$$

Учитывая еще тот факт, что $g(t_{2i+1}) = \tilde{\varphi}'(t_{2i+1}) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda g(t^2) &= \int_{t_{2i+1}}^{t^2} \lambda g'(t) dt = \int_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda g'(t) dt + \int_{t_{\max}}^{t^2} \lambda g'(t) dt \\ &> \int_{t_{2i+1}}^{t_{\max}^1} \tilde{\varphi}'(t) dt + \int_{t_{\max}^1}^{(t_{2i+1}+t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt \\ &= \int_{t_{2i+1}}^{(t_{2i+1}+t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt = \tilde{\varphi}'\left(\frac{t_{2i+1} + t_{2i+2}}{2}\right) = \|\tilde{\varphi}\|_{\infty}; \end{aligned}$$

следовательно, $\lambda g(t^2) > \|\tilde{\varphi}\|_{\infty}$, и мы получили противоречие. Таким образом, $t^1 \in (t_{2i+1}, t_{\max})$, $t_{\max} - t^1 > \pi/2n$ и $t^2 - t_{\max} > \pi/2n$, так что

$$t^2 - t^1 > \frac{\pi}{n}, \quad (4.2)$$

$$\int_{t^1}^{t^2} \lambda g'(t) dt > \int_{(t_{2i}+t_{2i+1})/2}^{(t_{2i+1}+t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt$$

(здесь снова нужно воспользоваться предложением 3.3.3 из [1]). Но тогда с учетом условий $\int_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \lambda g'(t) dt = 0$ и $\int_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \tilde{\varphi}'(t) dt = 0$, должно также выполняться неравенство

$$\left| \int_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \lambda g'(t) dt \right| > \int_{(t_{2i}+t_{2i+1})/2}^{(t_{2i+1}+t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt. \quad (4.3)$$

Пусть (a_k, b_k) – составляющие интервалы множества

$$\{t \in (t_{2i+1}, t_{2i+3}) : g'(t) < 0\}.$$

Тогда в силу (4.2)

$$\sum_k (a_k, b_k) \leq t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t^2 - t^1) < \frac{\pi}{n} = \text{mes supp } \tilde{\varphi}'|_{(2i+1, 2i+3)}(t).$$

Пусть также для каждого k число $\gamma_k \geq 0$ таково, что

$$(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k) \subset \text{supp } \tilde{\varphi}'_{-}|_{(2i+1, 2i+3)}(t).$$

Используя предложение 3.3.3 из [1] убеждаемся в том, что

$$\left| \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} g'(x - \gamma_k) dx \right| \leq \left| \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} \tilde{\varphi}'(t) dt \right|.$$

Очевидно, что числа γ_k можно выбрать так, чтобы интервалы $(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k)$ попарно не пересекались. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \lambda g'(t) dt \right| &= \left| \sum_k \int_{a_k}^{b_k} \lambda g'(t) dt \right| = \left| \sum_k \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} \lambda g'(t - \gamma_k) dt \right| \\ &= \sum_k \left| \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} \lambda g'(t - \gamma_k) dt \right| \leq \sum_k \left| \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} \tilde{\varphi}'_{-}(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_k \int_{a_k + \gamma_k}^{b_k + \gamma_k} \tilde{\varphi}'_{-}(t) dt \right| \leq - \int_{(t_{2i+1} + t_{2i+2})/2}^{(t_{2i+2} + t_{2i+3})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt \\ &= \int_{(t_{2i} + t_{2i+1})/2}^{(t_{2i+1} + t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \int_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \lambda g'(t) dt \right| \leq \int_{(t_{2i} + t_{2i+1})/2}^{(t_{2i+1} + t_{2i+2})/2} \tilde{\varphi}'(t) dt, \quad (4.4)$$

что противоречит (4.3).

Таким образом, нами доказана справедливость неравенства

$$\|g'\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n, l-1}\|_{\infty},$$

откуда, используя теорему сравнения [1; теорема 3.3.2], получим неравенства

$$\|g^{(k)}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n, l-k}\|_{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, l-1.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используя теорему двойственности Никольского [9] для наилучшего L_1 -приближения подпространством (см. также [1; теорема 1.4.1]), получим

$$E := E(W^r F, S_{2n, m}^1(h))_1 = \sup_{f \in W^r F} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty} \leq 1 \\ g \perp S_{2n, m}^1(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

После r -кратного интегрирования по частям с учетом смысла ортогональности функций подпространству $S_{2n, m}^1(h)$ (см. [1; § 5.4]) можем написать

$$E = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1 \\ f^{(r)} \perp S_{2n, m}^1(h)}} \sup_{g \in W_{\infty}^r} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1) = \dots = g(t_{2n}) = 0}} \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t) dt. \quad (4.5)$$

Учитывая предложение 1.3.4 из [26], окончательно получаем

$$\begin{aligned} E &= \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^r, \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^1(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt \\ &= \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_{2n})=0}} \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(g^{(m-r+1)}, t) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В случае, когда F есть единичный шар пространства L_1 , из (4.6) получаем

$$E(W_1^r, S_{2n,m}^1(h))_1 = \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_{2n})=0}} E(g^{(m-r+1)})_{\infty} \leq \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_{2n})=0}} \|g^{(m-r+1)}\|_{\infty}.$$

Применяя теорему 4 при $m = r$, получим

$$E(W_1^r, S_{2n,r}^1(h))_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{\infty},$$

что в сравнении с соотношением (2.2) при $p = 1$ дает равенство (3.2) при $p = 1$ и $m = r$.

Для любой функции $g \in W_{\infty}^{m+1}$, $m \geq r + 1$, такой, что $g(t_1) = \dots = g(t_{2n}) = 0$, имеет место неравенство

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)})_{\pm}, u) du \leq \int_0^t r((\varphi_{n,r})_{\pm}, u) du, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.7)$$

Действительно, используя утверждение b) теоремы 4 при $l = m + 1$, получим

$$\|g^{(m-r)}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_{\infty}.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 3.3.4 из [1], в силу которой (4.7) имеет место.

Из (4.7) следует, что функции $g^{(m-r+1)}$, $m \geq r + 1$, и $\varphi_{n,r}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.13 из [26], из которой следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $t \in [0, 2\pi]$ выполняются неравенства

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)} - \lambda)_{\pm}, u) du \leq \int_0^t r((\varphi_{n,r} - \lambda)_{\pm}, u) du. \quad (4.8)$$

Теперь, используя предложение 1.3.14 из [26], можем написать

$$\int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(g^{(m-r+1)}, t) dt \leq \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt.$$

Из (4.6) и последнего неравенства сразу получаем

$$E \leq \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt.$$

Совпадающая с полученной оценкой сверху для E оценка снизу очевидно следует из неравенства

$$d_{2n}(W^r F, L_1) \leq E(W^r F, S_{2n,m}(\Delta_h))_1$$

и соотношения (2.4).

Таким образом, соотношение (3.1) доказано. Что касается соотношения (3.2), то оно следует из равенства

$$\sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя теорему двойственности для наилучшего L_1 -приближения подпространством [1; теорема 1.4.1], получим

$$E := E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1(h))_1 = \sup_{f \in W^r H^\omega} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1 \\ g \perp S_{2n,m}^1(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

Аналогично (4.5) можем написать

$$E = \sup_{\substack{f \in H^\omega \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_\infty^r \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^1(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sup_{\substack{f \in H^\omega \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_{2n})}} \int_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t) dt. \quad (4.9)$$

Через $R(f, t)$ будем обозначать Σ -перестановку сужения 2π -периодической функции f на промежуток длины 2π [1; с. 294].

Из (4.9), применяя теорему 7.5.1 из [2], получим

$$E \leq \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_{2n})=0}} \int_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t) \omega'(t) dt. \quad (4.10)$$

Оценим правую часть (4.10). Пусть сначала $m \geq r + 2$, $g \in W_\infty^{m+1}$ и

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots = g(t_{2n}) = 0. \quad (4.11)$$

Тогда функция g удовлетворяет условиям теоремы 3, в силу которой

$$\begin{aligned} \|g^{(m-r)}\|_\infty &\leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty, \\ \max_{a,b \in [0, 2\pi]} \left| \int_a^b g^{(m-r)}(t) dt \right| &\leq 2\|g^{(m-r-1)}\|_\infty \leq 2\|\varphi_{n,r+2}\|_\infty. \end{aligned}$$

Значит, для такой функции g выполняются условия теоремы 6.8.5 из [2] (см. также теорему 7.1.11 из [1]), в силу которой

$$\int_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t) \omega'(t) dt \leq \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t) \omega'(t) dt. \quad (4.12)$$

Пусть теперь $m = r + 1$. В этом случае неравенство (4.12) мы установим непосредственно.

Так как $g \in W_{\infty}^{r+2}$ и удовлетворяет условию (4.11), то по теореме 4

$$\|g'\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_{\infty}.$$

Теперь в силу теоремы 6.8.4 из [2] заключаем, что для любого $x \in (0, \pi/n)$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств

$$|R'(g', x)| \leq |R'(\varphi_{n,r+1}, x)| \quad (4.13)$$

или

$$R(g', x) \leq R(\varphi_{n,r+1}, x). \quad (4.14)$$

Это означает, что разность $\delta(x) = R(\varphi_{n,r+1}, x) - R(g', x)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ либо неотрицательна, либо меняет знак с “+” на “-” в единственной точке $t_0 \in (0, 2\pi)$. Отметим, что в случае, когда $\delta(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, 2\pi]$, выполнение неравенства (4.12) очевидно. Рассмотрим случай, когда $\delta(x)$ меняет знак на $[0, 2\pi]$.

Обозначим через g'_j и $\tilde{\varphi}'_j$ сужения на $[t_j, t_{j+2}]$, $j = 0, 2, \dots, 2n - 2$, функций g' и $\tilde{\varphi}'$ соответственно.

В первую очередь отметим, что для всех $j = 0, 2, \dots, 2n - 2$ имеет место соотношение

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_{\pm}(t) dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tilde{\varphi}'_j)_{\pm}(t) dt. \quad (4.15)$$

Действительно, в силу условия $\int_{t_j}^{t_{j+1}} g'_j(t) dt = 0$ видим, что $\text{supp}((g'_j)_{\pm}) \neq \emptyset$, если g'_j не тождественный нуль на $[t_j, t_{j+2}]$. Пусть, для определенности,

$$\text{mes supp}((g'_j)_{+}) \geq \text{mes supp}((\tilde{\varphi}'_j)_{\pm}), \quad \text{mes supp}((g'_j)_{-}) \leq \text{mes supp}((\tilde{\varphi}'_j)_{\pm}).$$

Используя предложение 3.3.3 из [1] и рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве неравенства (4.4), нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_{-}(t) dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+2}} (\tilde{\varphi}'_j)_{\pm}(t) dt. \quad (4.16)$$

Учитывая (4.16) и тот факт, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_{+}(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_{-}(t) dt,$$

получим (4.15) и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |g'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}'(t)| dt. \quad (4.17)$$

Учитывая тот факт [2; с. 131, 141], что для $\psi \in L_1$

$$\|\psi\|_1 = \int_0^{2\pi} r(\psi, u) du = \int_0^{2\pi} R(\psi, u) du,$$

на основании (4.17) можем утверждать, что $\int_0^{2\pi} \delta(t) dt \geq 0$. Пусть $t_0 \in (0, 2\pi)$ – единственная точка, в которой разность $\delta(x)$ меняет знак с “+” на “–”. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 6.7.6 из [2], имеем (ниже через $\omega'_+(t)$ обозначена правая производная функции $\omega(t)$, которая в силу выпуклости вверх функции $\omega(t)$ существует в каждой точке)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(\varphi_{n,r+1}, t) dt - \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(g', t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \omega'(t) \delta(t) dt = \int_0^{t_0} \omega'(t) \delta(t) dt + \int_{t_0}^{2\pi} \omega'(t) \delta(t) dt \\ &\geq \omega'_+(t_0) \int_0^{t_0} \delta(t) dt + \omega'_+(t_0) \int_{t_0}^{2\pi} \delta(t) dt = \omega'_+(t_0) \int_0^{2\pi} \delta(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Справедливость (4.12) установлена и при $m = r + 1$. Учитывая (4.10), (4.12), а также равенство [1; с. 299]

$$\|f_{n,m}(\omega, \cdot)\|_1 = \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,m+1}, t) \omega'(t) dt,$$

получаем оценку сверху для величин $E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1(h))_1$:

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1(h))_1 = E \leq \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t) \omega'(t) dt = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1.$$

Оценка снизу следует из неравенства

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,r}^1(h))_1 \geq d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$$

и (2.2).

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Сопоставляя (3.2) при $p = 1$ и теорему А, мы получаем неравенства (3.4) и (3.5). Из (3.4), (3.5) и (2.14), (2.15) при $r = 1, 3, \dots$ и $\delta \geq \pi n^{-1}$ получаем соотношения

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1} = \kappa_r(S_{2n,m}^1(h), \delta)_{1,1} = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r},$$

а при $r = 1, 2, \dots$ и $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ соотношения

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S_{2n,m}^1(h), \delta)_{1,\infty} = \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r}.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что результаты работы [8] по приближению классов $W^r F$ и классов $W^r H^\omega$ сплайнами из $S_{2n,m}^2$ в метрике пространства L_1 можно получить как следствия из теорем 1 и 2 данной статьи с помощью предельного перехода при $h \rightarrow 0$ в соотношениях (3.1) и (3.3). Дело в том, что если для $h \in (0, \pi/n)$ через s_h обозначен сплайн из $S_{2n,m}^1(h)$ наилучшего L_1 -приближения функции $f \in L_1$, то из семейства $\{s_h\}_{h \in (0, \pi/n)}$ можно выделить последовательность $\{s_{h_k}\}_{k=1}^\infty$, $h_k \rightarrow 0$ при

$k \rightarrow \infty$, которая будет равномерно сходиться к сплайну $s_0 \in S_{2n,m}^2$. Для этого предельного сплайна будет иметь место соотношение

$$\|f - s_0\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} E(f, S_{2n,m}^1(h_k))_1,$$

а отсюда уже будет следовать вышесказанное. Однако, реализация этой идеи требует некоторых дополнительных рассмотрений, на которых мы не будем останавливаться в данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [2] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.
- [3] Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Наукова думка, Киев, 1982.
- [4] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, М., 1958.
- [5] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [6] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [7] V. F. Babenko, "Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives", *Anal. Math.*, **13**:4 (1987), 281–306.
- [8] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, "Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2", *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 538–551.
- [9] С. М. Никольский, "Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [10] Л. В. Тайков, "О приближении в среднем некоторых классов аналитических функций", *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, Наука, М., 1967, 61–70.
- [11] С. П. Туровец, "О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций", *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1968, № 5, 417–421.
- [12] А. А. Лигун, "Inequalities for upper bounds of functions", *Anal. Math.*, **2**:1 (1976), 11–40.
- [13] Ю. И. Маковоз, "Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L ", *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1969, № 4, 19–28.
- [14] Ю. Н. Субботин, "Поперечник класса $W^r L$ в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями", *Матем. заметки*, **7**:1 (1970), 43–52.
- [15] Ю. Н. Субботин, "Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников", *Приближение периодических функций*, Сборник работ, Тр. МИАН, **109**, Наука, М., 1971, 35–60.
- [16] Ю. И. Маковоз, "Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах", *Матем. сб.*, **87**:1 (1972), 136–142.
- [17] А. А. Лигун, "О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций", *Матем. заметки*, **27**:1 (1980), 61–75.
- [18] Ю. И. Маковоз, "Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля", *Матем. заметки*, **26**:5 (1979), 805–812.
- [19] A. Pinkus, "On n -widths of periodic functions", *J. Analyse Math.*, **35** (1979), 209–235.
- [20] Н. П. Корнейчук, "Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L ", *Докл. АН СССР*, **190**:2 (1970), 269–271.

- [21] Н. П. Корнейчук, “Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:1 (1971), 93–124.
- [22] Н. П. Корнейчук, “Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L ”, *Матем. заметки*, **20**:5 (1976), 655–664.
- [23] В. П. Моторный, В. И. Рубан, “Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L ”, *Матем. заметки*, **17**:4 (1975), 531–543.
- [24] В. И. Рубан, “Поперечники множеств в пространствах периодических функций”, *Докл. АН СССР*, **225**:1 (1980), 34–35.
- [25] А. А. Лигун, В. Е. Капустян, Ю. И. Волков, *Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами*, Выща школа, Киев, 1990.
- [26] Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наукова думка, Киев, 1992.

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет,

г. Днепропетровск,

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,

г. Донецк

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Поступило

15.09.2009

Н. В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет,

г. Днепропетровск

E-mail: nparfinovich@mail.ru