Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Деундяк, Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 704–720

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 02:54:54

Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами

В. М. Деундяк

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, рассмотрен новый класс интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами, включающий в себя класс операторов с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами; изучается банахова алгебра, порожденная такими операторами с мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами. Для операторов из этой алгебры определяется символ, в терминах которого формулируется критерий фредгольмовости и устанавливается формула для вычисления индекса. Важным этапом получения этих результатов является установление связи между исследуемым классом операторов и операторами одномерной свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами.

Библиография: 20 названий.

Введение

Изучение интегральных операторов с однородными ядрами в $L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < +\infty$ и $n \geq 2$, начато Михайловым [1] и продолжалось в работах Карапетянца, Самко, Авсянкина и других авторов (см. [2]–[10] и цитированные там источники). В этих работах рассматривались вопросы ограниченности, фредгольмовости, применимости проекционных методов решения операторных уравнений. Отметим однако, что если условия ограниченности были получены для достаточно произвольных операторов с однородными ядрами [2], [3], то при исследовании разрешимости на ядра, как правило, кроме условий однородности накладывались и существенно использовались условия инвариантности относительно диагонального действия $SO(n)$ – группы вращений n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В частности, в [6] изучена банахова алгебра, порожденная парными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы $SO(n)$, а в [10] эта алгебра расширена операторами умножения на элементы из C^* -алгебры радиально слабо осциллирующих функций $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$. При исследовании разрешимости операторов с однородными ядрами представляется актуальным вопрос об ослаблении жесткого геометрического требования $SO(n)$ -инвариантности ядер и расширении алгебры коэффициентов.

В настоящей заметке введен новый класс однородных ядер компактного типа, включающий в себя класс однородных $SO(n)$ -инвариантных ядер, и построена банахова алгебра $\mathfrak{W}_{n,p}$, состоящая из действующих в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ интегральных операторов с такими ядрами. На группе $\mathbb{R}^n$ введена C^* -алгебра мультипликативно слабо осциллирующих функций $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, более широкая, чем $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, и при $n = 2$ изоморфная C^* -алгебре всех слабо осциллирующих функций на группе $\mathbb{R}_+ \times S_1$ [11], [12]. Для операторов из банаховой алгебры $\mathfrak{W}_{n,p}$, полученной расширением $\mathfrak{W}_{n,p}$ операторами умножения на функции из $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, определяется символ, в терминах которого формулируется критерий фредгольмовости и устанавливается формула для вычисления индекса. Важным этапом при получении этих результатов является установление изоморфизма подобия между $\mathfrak{W}_{n,p}$ и банаховой алгеброй операторов свертки на прямой со слабо осциллирующими компактными коэффициентами.

1. Операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами

1.1. Обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества целых, действительных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{R}_{\pm} = \{t \in \mathbb{R} \mid \pm t > 0\}$, $\mathbb{R}_{\pm,0} = \mathbb{R}_{\pm} \cup \{0\}$. Если $\mathfrak{X}$ – банахово пространство, то через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$, а через $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ – идеал компактных операторов. Пусть $\text{Fr}(\mathcal{V})$ – пространство фредгольмовых операторов из алгебры $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Для любого изоморфизма банаховых пространств $g: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ с помощью равенства

$$\widehat{g}(A) = gAg^{-1}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_1), \quad (1.1)$$

определяется пространственный изоморфизм подобия банаховых алгебр $\widehat{g}: \mathcal{L}(\mathfrak{X}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$, для которого $\widehat{g}(\mathcal{K}(\mathfrak{X}_1)) = \mathcal{K}(\mathfrak{X}_2)$.

Пусть w и u – весовые функции на снабженных мерами пространствах X и Y соответственно, а $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$ – алгебраическое тензорное произведение весовых пространств $L_p(X; w)$ и $L_p(Y; u)$, состоящее из функций вида $\sum_{i=1}^l \varphi_i \psi_i$, где $1 \leq p < +\infty$, $\varphi_i \in L_p(X; w)$, $\psi_i \in L_p(Y; u)$. В силу плотности $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$ в $L_p(X \times Y; w \otimes u)$ топологическое тензорное произведение $L_p(X; w) \otimes L_p(Y; u)$, являющееся замыканием $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$, совпадает с $L_p(X \times Y; w \otimes u)$. Аналогично, для алгебр $\mathfrak{A} (\subset \mathcal{L}(L_p(X; w)))$ и $\mathfrak{B} (\subset \mathcal{L}(L_p(Y; u)))$ топологическое тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ определяется как замыкание в $\mathcal{L}(L_p(X \times Y; w \otimes u))$ алгебраического тензорного произведения $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$. Если $\mathcal{U}$ – банахова алгебра, то $L(n; \mathcal{U}) = L(n; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{U}$ – банахова алгебра $(n \times n)$ -матриц над $\mathcal{U}$, $G\mathcal{U}$ – группа обратимых элементов из $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^+$ – унитализация $\mathcal{U}$. Подалгебру $\mathcal{V}$ банаховой алгебры $\mathcal{U}$ называют *наполненной* в $\mathcal{U}$, если $G\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap G\mathcal{U}$. Для компакта X и метризуемого пространства Y через $C(X; Y)$ будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией; пусть $C(X) = C(X; \mathbb{C})$. Если Y – топологическая группа или банахова алгебра, то и $C(X; Y)$ – топологическая группа или банахова алгебра с обычными операциями. Для локально компактного не компактного X через $\text{comp}(X)$ будем обозначать множество всех компактных

подмножеств X , а через $\dot{X}$ – компактификацию X точкой ∞ . Пусть

$$C_0(X; Y) = \{\varphi : \varphi \in C(\dot{X}; Y), \varphi(\infty) = 0\}$$

для произвольной алгебры Y . Тождественное преобразование произвольного множества Ω будем обозначать id_Ω .

1.2. Операторы с однородными ядрами. Пусть для $1 < p, p' < +\infty$ выполнено $1/p + 1/p' = 1$. Определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция k называется *однородной степени $-n$* , если

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_{+,0} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y). \quad (1.2)$$

В n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выделим единичную сферу S_{n-1} . Будем полагать, что однородная степени $-n$ измеримая функция k принадлежит классу $\mathcal{M}_{n,p}$, если

$$k_{[1]}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |k(s, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty, \quad k_{[2]}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, s)| |y|^{-n/p'} dy < \infty$$

почти для всех s из S_{n-1} и $k_{[1]}, k_{[2]} \in L_\infty(S_{n-1})$. Известно, что $\mathcal{M}_{n,p}$ – банахово пространство с нормой $\|k\|_{\mathcal{M}_{n,p}} = \max\{\|k_{[1]}\|_{L_\infty}; \|k_{[2]}\|_{L_\infty}\}$, а интегральный оператор

$$(K_{(k)}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) dy, \quad k \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad (1.3)$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [2; раздел 4.4], [3]). Замкнутую алгебру, порожденную операторами вида (1.3), обозначим $\text{Op}(\mathcal{M}_{n,p})$. При исследовании операторов из $\text{Op}(\mathcal{M}_{n,p})$ удобен переход от декартовой системы координат в $\mathbb{R}^n$ к сферической системе, индуцирующий изоморфизм банаховых пространств

$$q: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}; r^{n-1} \otimes 1). \quad (1.4)$$

Измеримую функцию l , определенную на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times S_{n-1} \times S_{n-1}$ и удовлетворяющую условию

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_{+,0} \quad \forall r, \rho \in \mathbb{R}_+ \quad \forall s, \theta \in S_{n-1} \quad l(\alpha r, \alpha \rho, s, \theta) = \alpha^{-1} l(r, \rho, s, \theta), \quad (1.2')$$

отнесем к классу $\mathcal{M}'_{n,p}$, если почти для всех $s \in S_{n-1}$

$$l_{[1]}(s) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} |l(1, \rho, s, \theta)| \rho^{-n/p} d\rho d\theta < \infty, \\ l_{[2]}(s) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} |l(\rho, 1, \theta, s)| \rho^{-n/p'} d\rho d\theta < \infty$$

и $l_{[1]}, l_{[2]} \in L_\infty(S_{n-1})$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{M}'_{n,p}$ – банахово пространство с нормой $\|l\|_{\mathcal{M}'_{n,p}} = \max\{\|l_{[1]}\|_{L_\infty}; \|l_{[2]}\|_{L_\infty}\}$. Определим изоморфизм $\tilde{q}: \mathcal{M}_{n,p} \rightarrow \mathcal{M}'_{n,p}$ равенством

$$(\tilde{q}(k))(r, \rho, s, \theta) = k(rs, \rho\theta) \rho^{n-1}, \quad k \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad \{r; \rho\} \subset \mathbb{R}_+, \quad \{s; \theta\} \subset S_{n-1}. \quad (1.5)$$

Введем для $l \in \mathcal{M}'_{n,p}$ оператор

$$(L_{(l)}f)(r, s) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} l(r, \rho, s, \theta) f(\rho, \theta) d\rho d\theta. \quad (1.3')$$

Для изоморфизма $\tilde{q}$ (см. (1.5)), изоморфизма подобия

$$\hat{q}: \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}; r^{n-1} \otimes 1)),$$

определяемого с помощью изоморфизма (1.4) и конструкции (1.1), имеют место соотношения

$$\hat{q}(K_{(k)}) = L_{(\tilde{q}(k))}, \quad \text{Op}(\mathcal{M}'_{n,p}) = \hat{q}(\text{Op}(\mathcal{M}_{n,p})), \quad (1.6)$$

где $\text{Op}(\mathcal{M}'_{n,p})$ – замкнутая подалгебра $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}; r^{n-1} \otimes 1))$, порожденная операторами (1.3').

1.3. Операторы с однородными ядрами компактного типа. Будем полагать, что измеримая функция a , определенная на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и удовлетворяющая условию

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_{+,0} \quad \forall r, \rho \in \mathbb{R}_+ \quad a(\alpha r, \alpha \rho) = \alpha^{-1} a(r, \rho),$$

принадлежит классу $\mathcal{M}_{(n,p)}$, если

$$a_{[0]} = \int_0^{+\infty} |a(1, \rho)| \rho^{-n/p} d\rho = \int_0^{+\infty} |a(\rho, 1)| \rho^{-n/p'+n-1} d\rho < \infty.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{M}_{(n,p)}$ – банахово пространство с нормой $\|a\|_{\mathcal{M}_{(n,p)}} = a_{[0]}$. Пусть

$$\mathcal{M}_{(n,p)} \odot L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1}) = \left\{ \sum f_i g_i \mid f_i \in \mathcal{M}_{(n,p)}, g_i \in L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1}) \right\} \quad (1.7)$$

– алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{M}_{(n,p)}$ и $L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$, естественно вложенное в $\mathcal{M}'_{n,p}$, $\mathcal{E}'_{n,p}$ – замыкание $\mathcal{M}_{(n,p)} \odot L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$ в $\mathcal{M}'_{n,p}$, а $\mathcal{C}_{n,p} = (\tilde{q})^{-1}(\mathcal{E}'_{n,p})$ (см. (1.5)). В пространстве $L_p(S_{n-1})$ интегральные операторы с ядрами из $L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$ компактны, поэтому ядра из $\mathcal{C}_{n,p}$ и $\mathcal{E}'_{n,p}$ будем далее называть *ядрами компактного типа*. Замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\text{Op}(\mathcal{M}_{n,p})$, порожденную интегральными операторами (1.3) с ядрами из $\mathcal{C}_{n,p}$, обозначим $\mathfrak{V}_{n,p}$. В силу (1.5), (1.6) алгебра $\mathfrak{V}'_{n,p} = \hat{q}(\mathfrak{V}_{n,p})$ совпадает с замкнутой подалгеброй банаховой алгебры $\text{Op}(\mathcal{M}'_{n,p})$, порожденной операторами (1.3') с ядрами из $\mathcal{E}'_{n,p}$.

Выясним, как связаны операторы из $\mathfrak{V}_{n,p}$ с операторами мультипликативной свертки

$$(A_a f)(r) = \int_0^{+\infty} a(r, \rho) f(\rho) d\rho, \quad a \in \mathcal{M}_{(n,p)}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) (\subset \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1})))$, порожденную операторами вида (1.8), идеал $\mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$ и тензорное произведение

$$\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes \mathcal{K}(L_p(S_{n-1})) (\subset \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}, r^{n-1} \otimes 1))).$$

ЛЕММА 1.1. *Имеем $\mathfrak{V}'_{n,p} = \mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество действующих в $L_p(S_{n-1})$ интегральных операторов с ядрами из $L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$ плотно в идеале $\mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$ [13; с. 179], поэтому совокупность операторов с ядрами из множества (1.7) плотно вложена в алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \odot \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$, а следовательно, и в топологическое тензорное произведение $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$.

С другой стороны, банахова алгебра $\mathfrak{V}'_{n,p}$ порождена интегральными операторами вида (1.3') с ядрами из пространства $\mathcal{C}'_{n,p}$, в котором линейал $\mathcal{M}_{(n,p)} \odot L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$ плотен. Поэтому множество операторов с ядрами из $\mathcal{M}_{(n,p)} \odot L_\infty(S_{n-1} \times S_{n-1})$ плотно вложено в банахову алгебру $\mathfrak{V}'_{n,p}$. Отсюда вытекает совпадение алгебр $\mathfrak{V}'_{n,p}$ и $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$.

Установим связь между интегральными операторами с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и операторами из $\mathfrak{V}'_{n,p}$. Пусть $\mathcal{M}_{SO(n),p}$ – класс определенных на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функций k , удовлетворяющих условию инвариантности относительно диагонального действия группы $SO(n)$:

$$\forall \omega \in SO(n) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y),$$

условию однородности (1.2) и условию суммируемости:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < +\infty.$$

В силу теоремы 4.4 из [2] $\mathcal{M}_{SO(n),p} \subset \mathcal{M}_{n,p}$. Замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\text{Op}(\mathcal{M}_{n,p})$, порожденную операторами вида (1.3) с ядрами из $\mathcal{M}_{SO(n),p}$, обозначим $\mathfrak{V}_{SO(n),p}$. Пусть $\mathcal{M}'_{SO(n),p} = \tilde{q}(\mathcal{M}_{SO(n),p})$. В силу (1.5) и (1.6) алгебра $\mathfrak{V}'_{SO(n),p} = \hat{q}(\mathfrak{V}_{SO(n),p})$ является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры $\text{Op}(\mathcal{M}'_{n,p})$, порожденной операторами вида (1.8) с ядрами из $\mathcal{M}'_{SO(n),p}$.

В пространстве $L_p(S_{n-1})$ рассмотрим банахову алгебру $V_p(S_{n-1})$, порожденную операторами вида

$$(B_{(b)}f)(x) = \int_{S_{n-1}} b(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где b – это $SO(n)$ -инвариантная функция, для которой

$$\int_{S_{n-1}} |b(e_1, \theta)| d\theta < +\infty.$$

В разделе 4.5 монографии [2] показано, что оператор $B_{(b)}$ в образах преобразования Фурье–Лапласа является диагональным компактным оператором, а $V_p(S_{n-1})$ – коммутативная замкнутая подалгебра банаховой алгебры $\mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$.

ЛЕММА 1.2. Имеем $\mathfrak{V}'_{SO(n),p} = \mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes V_p(S_{n-1}) \subset \mathfrak{V}'_{n,p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\mathfrak{V}'_{SO(n),p} = \mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \otimes V_p(S_{n-1})$ проверяется аналогично лемме 1.1, причем в случае $p = 2$ эта проверка фактически содержится в доказательстве теоремы 2.1 работы [8]. Вложение $\mathfrak{V}'_{SO(n),p} \subset \mathfrak{V}'_{n,p}$ является следствием этого равенства, вложения $V_p(S_{n-1}) \subset \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$ и леммы 1.1.

1.4. Мультипликативно слабо осциллирующие функции на $\mathbb{R}^n$. Пусть H – произвольная абелева локально компактная не компактная группа. Определенная на H непрерывная ограниченная функция φ называется *слабо осциллирующей*, если

$$\forall D \in \text{comp}(H) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{h \in D} \{|f(t) - f(t+h)|\} = 0. \quad (1.9)$$

Класс $\Omega(H)$ всех слабо осциллирующих функций для более общих (не обязательно абелевых) групп введен и исследован в работе [12], а случай $H = \mathbb{R}^n$ рассматривался ранее в [11]. Известно, что $\Omega(H)$ – замкнутая подалгебра $L_\infty(H)$. Пространство максимальных идеалов C^* -алгебры $\Omega(H)$, которое обозначим $\mathfrak{M}(H)$, является компактификацией H , причем H гомеоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}(H)$; наост $\mathfrak{M}(H) \setminus H$ обозначим через $\mathfrak{N}(H)$. Непрерывное продолжение функций из алгебры $\Omega(H)$ с H на $\mathfrak{M}(H)$ реализует изометрический изоморфизм C^* -алгебр $\Omega(H)$ и $C(\mathfrak{M}(H))$; далее эти алгебры мы будем отождествлять [12]. В случае $H = \mathbb{R}$ наост $\mathfrak{N}(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$ состоит из двух компонент связности $\mathfrak{N}_\pm(\mathbb{R})$, которые соответствуют лучам $\mathbb{R}_\pm$; эти компоненты представляют собой бесконечные связные множества с одноточечными компонентами линейной связности. Отметим, что множество $\text{comp}(H)$ в (1.9) можно без потери общности сузить; например, при $H = \mathbb{R}^n$ вместо $\text{comp}(H)$ достаточно ограничиться множеством замкнутых шаров с центром в нуле. C^* -Алгебра $\Omega(\mathbb{R}_+)$ эквивалентным образом определяется как замкнутая подалгебра $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, состоящая из всех непрерывных ограниченных функций f на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию

$$\forall r > 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty, 0} \sup_{\tau \in D_{r,t}} \{|f(t) - f(\tau)|\} = 0,$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, $D_{r,t} = \{t' \in \mathbb{R}_+ : te^{-r} \leq t' \leq te^r\}$. Отметим, что на S_{n-1} при $n > 2$ групповая структура не рассматривается. Класс слабо осциллирующих функций на произведении $\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}$ определим таким образом, чтобы в случае группы $\mathbb{R}_+ \times S_1$ это определение было равносильно (1.9). Именно, будем полагать, что определенная на $\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}$ непрерывная ограниченная функция f принадлежит $\Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$, если

$$\forall r > 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty, 0} \sup_{\tau \in D_{r,t}} \sup_{s, \theta \in S_{n-1}} \{|f(t, s) - f(\tau, \theta)|\} = 0.$$

Как и при $n = 2$ множество $\Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ – замкнутая подалгебра C^* -алгебры $L_\infty(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ и

$$\Omega(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{C} \subset \Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) \subset \Omega(\mathbb{R}_+) \otimes L_\infty(S_{n-1}) \subset L_\infty(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) \quad (1.10)$$

(см. [12]). По схеме доказательства предложения 1 работы [14], полностью приведенного в [15], проверяется

ЛЕММА 1.3. *Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ C^* -алгебры $\Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ является компактификацией пространства $\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}$, причем проекция $\pi: \mathbb{R}_+ \times S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ продолжается до непрерывного отображения $\pi: \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+)$, а ограничение π на корону*

$$\mathfrak{N}(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) = \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) \setminus (\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$$

гомеоморфно отображает $\mathfrak{N}(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ на $\mathfrak{N}(\mathbb{R}_+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Рассмотрим изоморфизм $\zeta_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на аддитивную группу $\mathbb{R}$, определяемый равенством $\zeta_0(t) = \exp(-t)$. С помощью замены в определении $\Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ группы $\mathbb{R}_+$ группой $\mathbb{R}$ естественным образом определяется C^* -алгебра $\Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1})$, причем гомеоморфизм

$$\zeta = \zeta_0 \times \text{id}_{S_{n-1}}: \mathbb{R}_+ \times S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \times S_{n-1}$$

индуцирует изоморфизм C^* -алгебр

$$\tilde{\zeta}: \Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}) \rightarrow \Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1}), \quad (1.11)$$

а лемма 1.3 переформулируется для $\Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1})$ путем замены группы $\mathbb{R}_+$ группой $\mathbb{R}$.

Введем на группе $\mathbb{R}^n$ класс мультипликативно слабо осциллирующих функций $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, состоящий из всех непрерывных ограниченных функций f на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условию

$$\forall r > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty, 0} \sup_{y \in \Delta_{r,x}} \{|f(x) - f(y)|\} = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Delta_{r,x} = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid |x|e^{-r} \leq |x'| \leq |x|e^r\}$. Связь между $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$ и $\Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1})$ устанавливает вытекающая из определений

ЛЕММА 1.4. *Алгебра $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$ – C^* -алгебра, а гомеоморфизм $\xi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S_{n-1}$, определяемый переходом в пространстве $\mathbb{R}^n$ от декартовой системы координат к сферической системе, индуцирует изоморфизм C^* -алгебр*

$$\tilde{\xi}: \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}_+ \times S_{n-1}). \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Уточним связь между C^* -алгебрами $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\mathbb{R}^n)$ и некоторыми их естественными подалгебрами. В [10] рассматривалась C^* -алгебра $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ радиально слабо осциллирующих функций вида $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$, где $\varphi_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ и $\Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$ можно выделить замкнутые подалгебры $\Omega_{\text{rad}}^0(\mathbb{R}^n)$ и $\Omega_{\text{mult}}^0(\mathbb{R}^n)$ соответственно, состоящие из тех элементов рассматриваемых C^* -алгебр, которые продолжаются до непрерывных функций в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что

$$\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n) \subset \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n), \quad \Omega_{\text{rad}}^0(\mathbb{R}^n) \subset \Omega_{\text{mult}}^0(\mathbb{R}^n) = \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n) \cap \Omega(\mathbb{R}^n) \subset \Omega(\mathbb{R}^n). \quad (1.13)$$

Основной целью статьи является исследование разрешимости операторов из банаховой алгебры $\mathfrak{W}_{n,p}$ ($\subset \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$), порожденной следующими интегральными операторами с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами:

$$B = \lambda I + \sum_{i=1}^l \varphi_i B_i + T, \quad (1.14)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_i \in \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, $B_i \in \mathfrak{W}_{n,p}$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Пусть $\mathfrak{W}_{SO(n),p}$ – замкнутая подалгебра банаховой алгебры $\mathfrak{W}_{n,p}$, порожденная не всеми операторами вида (1.14), как $\mathfrak{W}_{n,p}$, а только такими, у которых $\varphi_i \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$,

$B_i \in \mathfrak{W}_{SO(n),p}$. Разрешимость операторов из $\mathfrak{W}_{SO(n),p}$ изучалась в работе [10]. Из леммы 1.2 и соотношений (1.13) вытекает, что $\mathfrak{W}_{SO(n),p} \subset \mathfrak{W}_{n,p}$. Расширение алгебры от $\mathfrak{W}_{SO(n),p}$ к $\mathfrak{W}_{n,p}$ произошло как за счет рассмотрения более общих коэффициентов, так и за счет существенного увеличения класса ядер интегральных операторов.

2. Разрешимость операторов свертки на прямой со слабо осциллирующими компактными коэффициентами

Результаты о символах, условиях фредгольмовости и индексе операторов свертки со слабо осциллирующими матричными коэффициентами в L_p -пространстве на группе $\mathbb{R}$ содержатся в контексте более общих групп в работах [11], [12], [14], [15]. В этом вспомогательном разделе в удобном для наших целей виде приведем соответствующие результаты, распространив их на случай операторов свертки на прямой со слабо осциллирующими компактными коэффициентами. Отметим, что в случае $p = 2$ это распространение реализуется очень просто на основе использования техники C^* -алгебр, но случай произвольного p потребовал некоторых небольших дополнительных рассуждений.

2.1. Операторы свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами. Через $V_p = V_p(\mathbb{R})$ обозначим замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}))$, порожденную операторами свертки

$$(C_a f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x-y)f(y) dy, \quad a \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

Важным для дальнейшего является следующее утверждение о коммутаторах [11]:

$$\forall A \in V_p \quad \forall f \in \Omega(\mathbb{R}) \quad fA - AfI \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R})). \quad (2.2)$$

Пусть $V_p^m = L(m; V_p)$, а W_p^m – замкнутая подалгебра $\mathcal{L}(L_p^m(\mathbb{R}))$, порожденная операторами свертки со слабо осциллирующими коэффициентами вида

$$B = \lambda I_m + \sum_{i=1}^l f_i A_i Q_i + T, \quad (2.3)$$

где I_m – единичный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_i \in \Omega(\mathbb{R})$, $A_i \in V_p$, $Q_i \in L(m; \mathbb{C})$, $T \in \mathcal{K}(L_p^m(\mathbb{R}))$. В силу (2.2) множество операторов вида (2.3) плотно в W_p^m . Замкнутую подалгебру, порожденную операторами вида (2.3) с $\lambda = 0$, обозначим $\widetilde{W}_p^m$. Пусть $\mathcal{K}_{p,n} = \mathcal{K}(L_p(S_{n-1}))$. Банахова алгебра $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}} = (\widetilde{W}_p^1 \otimes \mathcal{K}_{p,n})^+$, являющаяся главным объектом исследования в настоящем разделе, порождена операторами свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами вида

$$D = \lambda I + \sum_{i=1}^l (f_i A_i) \otimes T_i + T, \quad (2.4)$$

где I – единичный оператор из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_i \in \Omega(\mathbb{R})$, $A_i \in V_p$, $T_i \in \mathcal{K}_{p,n}$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}))$. В силу (2.2) множество операторов вида (2.4) плотно в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$.

В пространстве $L_p(S_{n-1})$ зафиксируем базис $\{\varepsilon_j\}_{j=1,2,\dots}$ из сферических гармоник (см. [2; раздел 4.5]). Для произвольного m введем подпространства $l_{m,0}$ и $l_{m,\infty}$, порожденные системами $\{\varepsilon_j\}_{j=1,\dots,m}$ и $\{\varepsilon_{j+m}\}_{j=1,2,\dots}$ соответственно, и рассмотрим пару естественных изометрических вложений и соответствующих им проекторов:

$$i_{m,x}: l_{m,x} \rightarrow L_p(S_{n-1}), \quad r_{m,x}: L_p(S_{n-1}) \rightarrow l_{m,x}, \quad x \in \{0; \infty\}.$$

Введем также изометрические вложения

$$\begin{aligned} \tilde{i}_{m,x} &= \text{id}_{L_p(\mathbb{R})} \otimes i_{m,x}: L_p^{(m,x)}(\mathbb{R} \times S_{n-1}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes l_{(m,x)} \\ &\rightarrow L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes L_p(S_{n-1}) \end{aligned}$$

с соответствующими проекторами

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{m,x} &= \text{id}_{L_p(\mathbb{R})} \otimes r_{m,x}: L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes L_p(S_{n-1}) \\ &\rightarrow L_p^{(m,x)}(\mathbb{R} \times S_{n-1}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes l_{(m,x)}. \end{aligned}$$

Из [13; с. 131] вытекает, что

$$\exists C(>0) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \{0; \infty\} \quad \|\tilde{r}_{m,x}\| < C, \quad \|r_{m,x}\| < C. \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь естественные изометрические изоморфизмы $\kappa_m: \mathbb{C}^m \rightarrow l_{(m,0)}$,

$$\tilde{\kappa}_m = \text{id}_{L_p(\mathbb{R})} \otimes \kappa_m: L_p^m(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^m \rightarrow L_p^{(m,0)}(\mathbb{R} \times S_{n-1}) = L_p(\mathbb{R}) \otimes l_{(m,0)}$$

и мономорфизм $v_m: L(m; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{K}_{p,n}$, определяемый равенством

$$v_m(Q) = i_{m,0}\kappa_m(Q)(\kappa_m)^{-1}r_{m,0}, \quad Q \in L(m; \mathbb{C}). \quad (2.6)$$

В силу [13; с. 181] прямой предел $L(\infty; \mathbb{C}) = \varinjlim v_m(L(m; \mathbb{C}))$ плотен в $\mathcal{K}_{p,n}$, а из (2.5) вытекает, что

$$\exists C(>0) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \|v_m\| < C. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 2.1. 1) Для произвольного m соответствие

$$B \mapsto \Lambda_p^m(B) = \tilde{i}_{m,0}\tilde{\kappa}_m(B - \lambda I_m)(\tilde{\kappa}_m)^{-1}\tilde{r}_{m,0} + \lambda I, \quad (2.8)$$

где B – оператор вида (2.3), по непрерывности продолжается до мономорфизма банаховых алгебр $\Lambda_p^m: W_p^m \rightarrow W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и

$$\exists C_1(>0), C_2(>0) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \tilde{B} \in W_p^m \quad C_1\|\tilde{B}\| \leq \|\Lambda_p^m \tilde{B}\| \leq C_2\|\tilde{B}\|. \quad (2.9)$$

2) Прямой предел $W_p^\infty = \varinjlim \Lambda_p^m(W_p^m)$ плотен в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, и мономорфизмы банаховых алгебр Λ_p^m корректно определяют мономорфизм $\Lambda_p^\infty: W_p^\infty \rightarrow W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подалгебра операторов вида (2.3) плотна в W_p^m , и в силу (2.5) на операторах такого вида выполняется правая оценка из (2.9). Следовательно, по теореме о продолжении оператора по непрерывности (см. [13; с. 110]) Λ_p^m продолжается до определенного на W_p^m мономорфизма банаховой алгебры с сохранением этой оценки. Из инъективности Λ_p^m , равенства

$$(\tilde{\kappa}_m)^{-1}\tilde{r}_{m,0}(\Lambda_p^m(B) - \lambda I)\tilde{i}_{m,0}\tilde{\kappa}_m = B - \lambda I_m, \quad B \in W_p^m$$

(см. (2.8)) и (2.5) следует левая оценка из (2.9). Это завершает доказательство первого положения леммы; второе положение является следствием первого.

2.2. Символическое исчисление и фредгольмовость. Сопоставление оператору свертки $C_a (\in V_p^m)$ преобразования Фурье его ядра задает мономорфизм $\phi_p^m : V_p^m \rightarrow C_0(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$, являющийся в случае $p = 2$ изометрическим изоморфизмом. Введем на $C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C})) = \phi_p^m(V_p)$ топологию пространства $L_p^m(\mathbb{R})$ -мультипликаторов Фурье и далее под

$$\Phi_p^m : V_p^m \rightarrow C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$$

будем понимать изоморфизм ограничения ϕ_p^m на образ, причем $C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ непрерывно вложена и наполнена в $C_0(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ и $C_{0,2}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C})) = C_0(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ (см. [16; теорема 2.6.9]).

Рассмотрим непрерывный мономорфизм

$$\Phi_p^1 \otimes I : V_p \otimes \mathcal{K}_{p,n} \rightarrow C_0(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})$$

и введем на алгебре

$$C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n}) = (\Phi_p^1 \otimes I)(V_p \otimes \mathcal{K}_{p,n})$$

норму равенством

$$\|f\| = \|(\Phi_p^1 \otimes I)^{-1}(f)\|_{\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}))}.$$

В силу плотности $L(\infty; \mathbb{C})$ в $\mathcal{K}_{p,n}$ из свойств $C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ получаем, что банахова алгебра $C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})$ непрерывно вложена и наполнена в $C_0(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})$ и выполнено $C_{0,2}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{2,n}) = C_0(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{2,n})$. Рассмотрим ограничение $\Phi_p^1 \otimes I$ на образ, перейдем к унитализации и получим изоморфизм

$$\Phi_p^{\mathcal{K}_{p,n}} : V_p^{\mathcal{K}_{p,n}} = (V_p \otimes \mathcal{K}_{p,n})^+ \rightarrow (C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n}))^+. \quad (2.10)$$

В банаховой алгебре $C_0((\mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}); \mathcal{K}_{p,n})$, где $\mathfrak{N}(\mathbb{R})$ – определенный в п. 1.4 компактный нарост, выделим подалгебру таких функций φ , что

$$\forall \eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \quad \varphi(\eta, -) \in C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n}),$$

расширим ее единицей и обозначим $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Элементы из $(C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n}))^+$ будем естественным образом отождествлять с такими функциями ψ_0 на $\mathbb{R}$, что $\psi_0(\infty) \in \mathbb{C}I$, а $\psi_0(t) \in \mathcal{K}_{p,n}$ для $t \in \mathbb{R}$. Аналогично, элементы из $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ будем отождествлять с определенными на $(\mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ функциями ψ , для которых $\psi(\infty) \in \mathbb{C}I$, а $\psi(\eta, t) \in \mathcal{K}_{p,n}$ для $(\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Алгебра $\mathcal{S}_p^m$ определяется таким же путем, как и $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, но с заменой $\mathcal{K}_{p,n}$ на $L(m; \mathbb{C})$. Отметим, что алгебра $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p^1$ описана в лемме 1.1 работы [10].

ЛЕММА 2.2. 1) Алгебры $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и $\mathcal{S}_p^m$ суть банаховы алгебры, при этом

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}} = \max_{\eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R})} \|\varphi(\eta, \cdot)\|_{C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})}, \quad \|\varphi\|_{\mathcal{S}_p^m} = \max_{\eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R})} \|\varphi(\eta, \cdot)\|_{C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))}.$$

2) Алгебры $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и $\mathcal{S}_p^m$ непрерывно вложены в алгебры $(C_0(\mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}); \mathcal{K}_{p,n})^+$ и $(C_0(\mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}); L(m; \mathbb{C}))^+$ соответственно, наполнены в них, а при $p = 2$ совпадают с ними.

3) Отображение $\lambda_p^m: \mathcal{S}_p^m \rightarrow \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, определяемое формулой

$$(\lambda_p^m(\varphi))(\eta, t) = v_m(\varphi(\eta, t) - \varphi(\infty)) + \varphi(\infty)I, \quad (\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

является непрерывным мономорфизмом, прямой предел $\mathcal{S}_p^\infty = \varinjlim \mathcal{S}_p^m$ плотен в $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и

$$\exists C(>0) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \|\lambda_p^m\| < C. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полнота $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и $\mathcal{S}_p^m$ следует из равномерности норм по переменной $\eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R})$. Второе утверждение леммы вытекает из леммы 1.1 работы [10] и того, что алгебры $C_{0,p}(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})$ и $C_{0,p}(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ непрерывно вложены в $C_0(\mathbb{R}; \mathcal{K}_{p,n})$ и $C_0(\mathbb{R}; L(m; \mathbb{C}))$ соответственно, наполнены в них, а при $p = 2$ совпадают с ними. Третье утверждение леммы – следствие непрерывности мономорфизма v_m (см. (2.6)), плотности $L(\infty; \mathbb{C})$ в идеале $\mathcal{K}_{p,n}$ и оценки (2.7).

Рассмотрим в W_p^m оператор B вида (2.3) и в соответствии с формулой (1.4) из [10] определим его символ $s_p^m(B) \in \mathcal{S}_p^m$, используя (2.8), следующим образом:

$$s_p^m(B)(\eta, t) = \lambda E_m + \sum_{i=1}^l f_i(\eta)(\Phi_p^1(A_i))(t)Q_i, \quad (\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Аналогично, для оператора $D \in W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ вида (2.4) символ $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}(D) \in \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ определим равенством

$$s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}(D)(\eta, t) = \lambda I + \sum_{i=1}^l f_i(\eta)(\Phi_p^1(A_i))(t)T_i, \quad (\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 2.3. Сопоставление операторам вида (2.3), (2.4) их символов продолжается до гомоморфизмов банаховых алгебр $s_p^m: W_p^m \rightarrow \mathcal{S}_p^m$, $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}: W_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \rightarrow \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(L_p^m(\mathbb{R})) & \xrightarrow{i_p^m} & W_p^m & \xrightarrow{s_p^m} & \mathcal{S}_p^m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_p^m & \text{I} & \downarrow \Lambda_p^m & \text{II} & \downarrow \lambda_p^m \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(L_p(L_p(\mathbb{R}) \times S_{n-1})) & \xrightarrow{i_p^{\mathcal{K}_{p,n}}} & W_p^{\mathcal{K}_{p,n}} & \xrightarrow{s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}} & \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.13)$$

где гомоморфизм λ_p^m определен в (2.10), Λ_p^m – в (2.7), ι_p^m – ограничение Λ_p^m на $\mathcal{K}(L_p^m(\mathbb{R}))$, а i_p^m и $i_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ – естественные вложения, является коммутативной, а ее строки точны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция символа-гомоморфизма s_p^m , как и точность первой строки диаграммы, следует из результатов работы Штейнберга [12], где локальным методом Симоненко исследуются операторы свертки на общих группах и, в частности, построен операторный V_p^m -значный символ. Из теоремы об огибающем операторе в общей теории операторов локального типа [16; с. 18], теоремы об оценке нормы операторнозначного символа [16; с. 103] и определения изометрического изоморфизма Φ_p^m вытекает оценка нормы символа s_p^m : $\|s_p^m\| \leq 1$.

Коммутативность квадрата I следует из определений входящих в него мономорфизмов. Пусть $\mathfrak{X}_p^m$ – линейал всех операторов $B \in W_p^m$ вида (2.3). Подействуем на оператор B вида (2.3) композициями $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \Lambda_p^m$ и $\lambda_p^m s_p^m$ и в силу (2.8), (2.11) получим

$$\begin{aligned} ((s_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \Lambda_p^m) B)(\eta, t) &= \lambda I + \sum_{i=1}^l f_i(\eta)(\Phi_p^m(A_i))(t)(i_{m,0} \kappa_m Q_i(\kappa_m)^{-1} r_{m,0}) \\ &= ((\lambda_p^m s_p^m) B)(\eta, t), \end{aligned}$$

где $(\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Отметим, что символ $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ ограничен на линейале $\mathfrak{X}_p^\infty = \varinjlim \Lambda_p^m(\mathfrak{X}_p^m)$, плотном в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Действительно, пусть $D \in \mathfrak{X}_p^\infty$, а B – такой оператор из $\mathfrak{X}_p^m$ для некоторого m , что $D = \Lambda_p^m(B)$; тогда из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$\begin{aligned} \|s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}(D)\| &= \|s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}(\Lambda_p^m(B))\| = \|(\lambda_p^m s_p^m)B\| \\ &\leq \|\lambda_p^m\| \|s_p^m\| \|B\| \leq \frac{C}{C_1} \|\Lambda_p^m(B)\| = \frac{C}{C_1} \|D\|, \end{aligned}$$

где C из (2.12), а C_1 из (2.9). Поэтому в силу теоремы о непрерывном продолжении линейного ограниченного оператора символ $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр с сохранением нормы и соотношения $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \Lambda_p^m = \lambda_p^m s_p^m$, что свидетельствует о коммутативности квадрата II. Эпиморфность $s_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ следует из эпиморфности s_p^m и плотности $\mathcal{S}_p^{(\infty)} = \varinjlim \lambda_p^m(\mathcal{S}_p^m)$ в $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Точность в среднем члене второй строки вытекает из точности первой строки и коммутативности диаграммы.

Хорошо известно [12], что максимальной алгеброй коэффициентов, которыми расширяется V_p до банаховой алгебры, допускающей скалярный символ, по существу является C^* -алгебра $\Omega(\mathbb{R})$. Именно этим обстоятельством вызван интерес к рассмотрению слабо осциллирующих коэффициентов и для расширения банаховой алгебры $V_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Сформулируем теорему об условиях фредгольмовости для операторов из такого расширения.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $A \in W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Тогда $A \in \text{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_{p,n}})$ равносильно $s^{\mathcal{K}_{p,n}}(A) \in G\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из лемм 2.2 и 2.3 вытекает равносильность условия $s^{\mathcal{K}_{p,n}}(A) \in G\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ тому, что оператор A фредгольмов с регуляризатором из $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Заметим, что, как показывается в теории операторов локального типа [16; с. 18], из фредгольмовости оператора $B \in W_p^m$ вытекает существование у B регуляризатора, принадлежащего W_p^m . Поэтому из плотности $W_p^\infty = \varinjlim \Lambda_p^m(W_p^m)$ в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, вытекающей из леммы 2.1, следует, что из фредгольмовости произвольного оператора $A \in W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ следует существование у A регуляризатора, принадлежащего $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$.

Чтобы в соответствии с [14], [15] для произвольного $\psi \in GS_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ ввести топологический индекс $\text{ind}_t(\psi)$, рассмотрим изоморфизмы $i^{[m]}: [\mathbb{R}; GL(m; \mathbb{C})] \rightarrow \mathbb{Z}$, порождаемый сопоставлением

$$\varphi(\in C(\mathbb{R}; GL(m; \mathbb{C}))) \mapsto -\frac{1}{2\pi} \Delta \arg(\det \varphi)|_{-\infty}^{+\infty},$$

и $j^{[m]}: [\dot{\mathbb{R}}; GL(m; \mathbb{C})] \rightarrow [\dot{\mathbb{R}}; G(\mathcal{K}_{p,n})^+]$, порождаемый вложением $GL(m; \mathbb{C})$ в $(\mathcal{K}_{p,n})^+$. Определим

$$\text{ind}_t(\psi) = i^{[m]}(j^{[m]})^{-1}[(\psi(\eta_-, \cdot))(\psi(\eta_+, \cdot))^{-1}], \quad (2.14)$$

где $\eta_{\pm}$ – произвольная фиксированная точка из $\mathcal{R}(\mathbb{R})$, причем в силу [14] определение $\text{ind}_t(\psi)$ от выбора m и $\eta_{\pm}$ не зависит. В силу леммы 2.1 прямой предел $W_p^{\infty} = \varinjlim \Lambda_p^m(W_p^m)$ плотен в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, а в силу леммы 2.2 прямой предел $\mathcal{S}_p^{\infty} = \varinjlim \lambda_p^m(\mathcal{S}_p^m)$ плотен в $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, поэтому лемма 2.3 и теорема 2.1 позволяют редуцировать вычисление индекса операторов из $\text{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_{p,n}})$ к формуле из [14].

ТЕОРЕМА 2.2. *Если $A \in \text{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_{p,n}})$, то $\text{ind}(A) = \text{ind}_t(s^{\mathcal{K}_{p,n}}(A))$.*

3. Сверточное представление

и исследование разрешимости операторов из $\mathfrak{W}_{n,p}$

Зададим изоморфизм банаховых пространств $u_{(n,p)}: L_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(u_{(n,p)}f)(t) = \exp\left(\frac{-nt}{p}\right)f(\exp(-t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

и рассмотрим определяемый им изоморфизм подобия банаховых алгебр (см. (1.1)):

$$\hat{u}_{(n,p)}: \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1})) \rightarrow \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R})).$$

Связь между алгебрами V_p и $\mathcal{V}(\mathbb{R}_+, r^{n-1})$ (см. (1.9), (2.1)) устанавливает следующая лемма, доказательство которой содержится в [2; раздел 4.1].

ЛЕММА 3.1. *Ограничение $\hat{u}_{(n,p)}$ на $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1})$ задает изоморфизм*

$$\alpha_{(n,p)}: \mathcal{V}(\mathbb{R}_+, r^{n-1}) \rightarrow \mathcal{V}_p,$$

причем $\alpha_{(n,p)}(A_a) = C_b$, где A_a – оператор вида (1.9), а C_b – оператор свертки вида (2.1) с ядром b , определяемым равенством

$$b(t) = \exp\left(\frac{-tn}{p}\right)a(\exp(-t), 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим изоморфизм банаховых пространств

$$u_{n,p} = (u_{(n,p)} \otimes \text{id}_{L_p(S_{n-1})})q: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}) \quad (3.2)$$

(см. (1.6), (3.1)) и определяемый им в соответствии с (1.1) изоморфизм подобия банаховых алгебр

$$\hat{u}_{n,p}: \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1})).$$

ЛЕММА 3.2. *Ограничение $\hat{u}_{n,p}$ на алгебру $\mathfrak{V}_{n,p}$ задает изоморфизмы*

$$\alpha_{n,p}^0: \mathfrak{V}_{n,p} \rightarrow V_p^{\mathcal{K}_{p,n}}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) и (1.1) вытекает, что

$$\widehat{u}_{n,p} = (\widehat{u}_{(n,p)} \otimes \text{id}_{\mathcal{L}(L_p(S_{n-1}))})\widehat{q}.$$

Поэтому на основании лемм 1.1 и 3.1 получаем

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{n,p}(\mathfrak{V}_{n,p}) &= (\widehat{u}_{(n,p)} \otimes \text{id}_{\mathcal{L}(L_p(S_{n-1}))})\widehat{q}(\mathfrak{V}_{n,p}) \\ &= \widehat{u}_{(n,p)}(\mathcal{V}_p(\mathbb{R}_+, r^{n-1})) \otimes \mathcal{K}(L_p(S_{n-1})) = V_p^{\mathcal{K}_{p,n}}.\end{aligned}$$

В силу того, что $\widehat{u}_{n,p}$ – изоморфизм, отсюда вытекает требуемый результат.

ЛЕММА 3.3. Если $\varphi \in \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$ и $B \in \mathfrak{V}_{n,p}$, то $\varphi B - B\varphi I \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию изоморфизмов (1.11) и (1.12):

$$\alpha_n^1 = \widetilde{\xi}\widetilde{\xi}: \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1}).$$

В силу леммы 1.3 и замечания 1.1 для произвольного $\varphi \in \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\widehat{u}_{n,p}(\varphi I) = ((\alpha_n^1)(\varphi))I. \quad (3.4)$$

Следовательно, из леммы 3.2 и соотношения (2.2) получаем

$$\widehat{u}_{n,p}(\varphi B - B\varphi I) = ((\alpha_n^1)(\varphi))\alpha_{n,p}^0(B) - \alpha_{n,p}^0(B)((\alpha_n^1)(\varphi))I \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1})).$$

Поэтому $\varphi B - B\varphi I \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Основным результатом раздела является

ТЕОРЕМА 3.1. Ограничение $\widehat{u}_{n,p}$ на банахову алгебру $\mathfrak{W}_{n,p}$ задает изоморфизм подобия

$$\alpha_{n,p}: \mathfrak{W}_{n,p} \rightarrow W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_{n,p}^0$ и $\beta_{n,p}$ – ограничения $\widehat{u}_{n,p}^{-1}$ на банаховы алгебры $V_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ соответственно. В силу леммы 3.2 $\beta_{n,p}^0 = (\alpha_{n,p}^0)^{-1}$. Покажем, что $\alpha_{n,p}$ – изоморфизм и $\beta_{n,p} = (\alpha_{n,p})^{-1}$.

В п. 2.1 отмечалось, что множество операторов вида (2.4) плотно в банаховой алгебре $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Нетрудно видеть, что идеал $\mathcal{K}_{p,n}$ банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(S_{n-1}))$ совпадает со множеством всех произведений ψP , где $\psi \in L_\infty(S_{n-1})$, $P \in \mathcal{K}_{p,n}$. Отсюда вытекает, что в банаховой алгебре $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ содержится множество операторов вида

$$\widetilde{D} = \lambda I + \sum_{i=1}^m (f_i \psi_i)(A_i \otimes T_i) + T,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_i \in \Omega(\mathbb{R})$, $\psi_i \in L_\infty(S_{n-1})$, $A_i \in V_p$, $T_i \in \mathcal{K}_{p,n}$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1}))$, причем это множество плотно в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Но тогда в силу соотношения (1.10) получаем плотность в $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ и множества операторов вида

$$\dot{D} = \lambda I + \sum_{i=1}^m g_i(A_i \otimes T_i) + T, \quad (3.6)$$

где $g_i \in \Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1})$. Введем изоморфизм

$$\beta_{n,p}^1 = (\alpha_{n,p}^1)^{-1}: \Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1}) \rightarrow \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$$

и отметим, что в силу (3.4) для произвольного $\psi \in \Omega(\mathbb{R} \times S_{n-1})$ выполняется равенство

$$\beta_{n,p}(\varphi I) = \widehat{u}_{n,p}^{-1}(\varphi I) = (\beta_{n,p}^1(\varphi))I.$$

Подействуем на оператор $\dot{D}$ гомоморфизмом $\beta_{n,p}$ и, используя лемму 3.2, получим

$$\beta_{n,p}(\dot{D}) = \lambda I + \sum_{i=1}^m \beta_{n,p}^1(g_i) \beta_{n,p}^0((A_i \otimes T_i)) + \beta_{n,p}(T) \in \mathfrak{W}_{n,p}.$$

В силу плотности в банаховой алгебре $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$ операторов вида (3.6) отсюда вытекает, что

$$\beta_{n,p}(W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}) \subset \mathfrak{W}_{n,p}. \quad (3.7)$$

Согласно определению банахова алгебра $\mathfrak{W}_{p,n} (\subset \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)))$ порождена операторами вида (1.14):

$$B = \lambda I + \sum_{i=1}^l \varphi_i B_i + T,$$

где $\varphi_i \in \Omega_{\text{mult}}(\mathbb{R}^n)$, $B_i \in \mathfrak{W}_{p,n}$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Поэтому в силу леммы 3.2 и соотношения (3.4) получаем

$$\alpha_{n,p}(B) = \lambda I + \sum_{i=1}^l \alpha_n^1(\varphi_i) \alpha_{n,p}^0(B_i) + \alpha_{n,p}(T) \in W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$$

и, следовательно, $\alpha_{n,p}(\mathfrak{W}_{n,p}) \subset W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Отсюда и из соотношения (3.7) вытекает, что $\alpha_{n,p}$ и $\beta_{n,p}$ – взаимно обратные изоморфизмы.

При построении символического исчисления для алгебры $\mathfrak{W}_{n,p}$ в качестве алгебры символов мы будем использовать банахову алгебру $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, которая была построена в п. 2.2 как алгебра символов для $W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Символом модельного оператора B вида (1.14) назовем оператор-функцию $\sigma_{n,p}(A) (\in \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}})$, определяемую равенством

$$(\sigma_{n,p}(B))(\eta, t) = \lambda + \sum_{i=1}^m (\alpha_n^1(\varphi_i))(\eta) (\Psi_p^{\mathcal{K}_{p,n}}(B_i))(t), \quad (\eta, t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

где α_n^1 – изоморфизм (3.4), а $\Psi_p^{\mathcal{K}_{p,n}} = \Phi_p^{\mathcal{K}_{p,n}} \alpha_{n,p}^0$ – композиция изоморфизмов (2.10) и (3.3).

ЛЕММА 3.4. *Сопоставление операторам вида (1.14) их символов с помощью формулы (3.8) однозначно продолжается до символа-эпиморфизма $\sigma_{n,p}: \mathfrak{W}_{n,p} \rightarrow \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}}$ с ядром $\ker(\sigma_{n,p}) = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$, при этом $\sigma_{n,p} = s_{n,p} \alpha_{n,p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из определений. Действительно, пусть $\mathfrak{X}_p$ – линейал всех операторов вида (1.14), который порождает банахову алгебру $\mathfrak{W}_{n,p}$. Из леммы 3.3 вытекает плотность $\mathfrak{X}_p$ в $\mathfrak{W}_{n,p}$. В соответствии с определением $\sigma_{n,p}$ на операторах вида (1.14) выполняется условие $\sigma_{n,p} = s_{n,p} \alpha_{n,p}$. Поэтому

в силу теоремы 3.1 и леммы 2.3 оператор $\sigma_{n,p}$ ограничен на $\mathfrak{X}_p$ и, следовательно, по теореме о непрерывном продолжении линейного ограниченного оператора продолжается с сохранением нормы и соотношения $\sigma_{n,p} = s_{n,p}\alpha_{n,p}$ до гомоморфизма банаховых алгебр. Для завершения доказательства достаточно опять воспользоваться теоремой 3.1 и леммой 2.3: из изоморфности $\alpha_{n,p}$ и эпиморфности $s_{n,p}$ вытекает эпиморфность $\sigma_{n,p}$, а равенство $\ker(\sigma_{n,p}) = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$ следует из соотношений

$$\ker(s_{n,p}) = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1})), \quad \alpha_{n,p}(\mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))) = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R} \times S_{n-1})).$$

Следствием леммы 3.4 и теорем 3.1, 2.1, 2.2 является

ТЕОРЕМА 3.2. 1) Пусть $B \in \mathfrak{W}_{n,p}$. Тогда $B \in \text{Fr}(\mathfrak{W}_{n,p})$ равносильно $\sigma_{n,p}(B) \in G(\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}})$.

2) Если $B \in \text{Fr}(\mathfrak{W}_{n,p})$, то $\text{ind}(B) = \text{ind}_t(\sigma_{n,p}(B))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При фиксированном $p \in (1, \infty)$ рассмотрим произвольные целые m и n , превосходящие 1. В силу результатов Красносельского и Рутицкого пространства $L_p(S_{m-1})$ и $L_p(S_{n-1})$ изоморфны [17; с. 120]. Но тогда и банаховы алгебры $\mathcal{K}_{p,m}$ и $\mathcal{K}_{p,n}$ пространственно изоморфны (см. (1.1)). Из этого факта вытекает изоморфность следующих банаховых алгебр: $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,m}} \cong \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, $V_p^{\mathcal{K}_{p,m}} \cong V_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$, откуда с помощью леммы 2.3 легко выводится, что $W_p^{\mathcal{K}_{p,m}} \cong W_p^{\mathcal{K}_{p,n}}$. Теперь вследствие леммы 3.2 и теоремы 3.1 получаем: $\mathfrak{W}_{m,p} \cong \mathfrak{W}_{n,p}$, $\mathfrak{W}_{m,p} \cong \mathfrak{W}_{n,p}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. С помощью теоремы 3.1, являющейся ключевой для теоремы 3.2, можно распространить и другие результаты об операторах свертки в L_p -пространствах на операторы с однородными ядрами. В частности, это относится к формуле вычисления индекса семейств из [18], необходимой для исследования разрешимости операторов с биоднородными ядрами [7], [8]. Дальнейшее обобщение $\mathfrak{W}_{n,p}$ ($\subset \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$) как за счет расширения алгебры коэффициентов, так и за счет расширения класса однородных ядер, приводит к алгебрам операторов с *однородными* ядрами, которые, однако, являются операторами *белокального* типа [19], символ которых – пара нетривиально связанных операторнозначных отображения. В случае $n = 2$ и произвольного p примеры таких операторов рассмотрены в [20].

Автор выражает искреннюю признательность Л. И. Сазонову за помощь в уточнении ссылки [17] в замечании 3.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Г. Михайлов, “Новый класс особых интегральных уравнений”, *Math. Nachr.*, **76** (1977), 91–107.
- [2] N. Karapetians, S. Samko, *Equations with Involution Operators*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [3] Н. К. Карапетянц, “О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром”, *Матем. заметки*, **30:5** (1981), 787–794.
- [4] О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, “Многомерные интегральные операторы с однородными степенями $-n$ ядрами”, *Докл. РАН*, **368:6** (1999), 727–729.
- [5] О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, “Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 1, 3–10.

- [6] О. Г. Авсянкин, “Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 483–493.
- [7] О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, “О вычислении индекса многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами”, *Докл. РАН*, **391**:1 (2003), 7–9.
- [8] О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, “Об индексе многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами и переменными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 3, 3–12.
- [9] О. Г. Авсянкин, “Многомерные интегральные операторы с биоднородными ядрами: проекционный метод и псевдоспектры”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:3 (2006), 501–513.
- [10] О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, “Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами”, *Матем. заметки*, **82**:2 (2007), 163–176.
- [11] H. O. Cordess, “On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudodifferential operators”, *J. Funct. Anal*, **18**:2 (1975), 115–131.
- [12] Б. Я. Штейнберг, “Об операторах типа свертки на локально компактных группах”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:3 (1981), 95–96.
- [13] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.
- [14] В. М. Деундяк, Б. Я. Штейнберг, “Об индексе операторов свертки с медленно изменяющимися коэффициентами на абелевых группах”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 84–85.
- [15] В. М. Деундяк, Б. Я. Штейнберг, “Вычисление индекса операторов свертки с медленно изменяющимися коэффициентами на абелевых группах”, *Математический анализ и его приложения*, Изд-во Ростовск. гос. ун-та, Ростов-на-Дону, 1992, 64–70.
- [16] И. Б. Симоненко, *Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих*, ЦВВР, Ростов-на-Дону, 2007.
- [17] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Современные проблемы математики, ГИФМЛ, М., 1958.
- [18] В. М. Деундяк, “Индекс семейств операторов свертки на абелевых группах”, *Сиб. матем. журн.*, **31**:1 (1990), 70–78.
- [19] В. С. Пилиди, Л. И. Сазонов, “Локальный метод в теории операторов типа бисингулярных”, *Изв. вузов. Северо-Кавказск. рег. Естеств. науки*, 2005, Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики, 100–106.
- [20] В. М. Деундяк, Е. А. Степанюченко, “Об интегральных операторах с однородными ядрами послойно сингулярного типа в пространстве $L_p(R^2)$ ”, *Вестн. ДГТУ*, **7**:2 (2007), 161–168.

В. М. Деундяк

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

E-mail: vlade@math.rsu.ru

Поступило

15.05.2009