Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 756–763

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:14:11

О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев

Изучается вопрос о скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана. Получены константы, связывающие (эквивалентные друг другу) степенную скорость сходимости эргодических средних и степенную особенность в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы. Все результаты работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Библиография: 5 названий.

Как было показано в [1], степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана эквивалентна наличию степенной же особенности в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы. В [1] обсуждался вопрос об асимптотике этих эквивалентных друг другу параметров эргодической теоремы в терминах “ O ” и “ o ” без выписывания связывающих их конкретных констант. Рассмотрением этих и некоторых других аналогичных констант мы и займемся в этой работе. Получаемые оценки можно рассматривать как уточнения соответствующих им асимптотических результатов из [1].

Пусть (Ω, λ) – пространство с вероятностной мерой, T – его автоморфизм. Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega).$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование п.в. предела

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$$

и равенство $\int f d\lambda = \int f^* d\lambda$.

Через U_T обозначим унитарный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f,$$

равного f^* , причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T . Через $b_k f$ будем обозначать корреляционные коэффициенты, т.е. скалярные произведения $(U_T^k f, f)$. Наконец, через σ_f обозначим спектральную меру, т.е. такую конечную борелевскую меру на единичной окружности, что

$$b_k f = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

для всех целых k (так что корреляционные коэффициенты являются ее коэффициентами Фурье в комплексной форме).

Пусть L_2^0 – подпространство функций с нулевым средним в L_2 . Заметим, что если $f \in L_2$, то $f - f^* \in L_2^0$; поэтому и $A_n(f - f^*) \in L_2^0$. Поскольку дисперсия

$$DA_n(f - f^*) = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \|A_n f - f^*\|_2^2$$

как раз и измеряет L_2 -норму отклонения $A_n f$ от предела (т.е. f^*), то поведение нормы этого отклонения совпадает с рассматриваемым в [1] поведением дисперсии эргодических средних. Как и в [1], это поведение полностью определяется (теорема 1 ниже) особенностью спектральной меры σ_{f-f^*} в нуле или скоростью убывания корреляционных коэффициентов (теорема 2). Переход же от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке нуль меры $\sigma_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов оператора U_T , отвечающих собственному значению 1; по этой же причине верно равенство $\|f\|_2^2 = \|f - f^*\|_2^2 + \|f^*\|_2^2$).

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Заметим, что Φ_n отличается от $(n-1)$ -го ядра Фейера K_{n-1} лишь коэффициентом: $\Phi_n = 2K_{n-1}$. Отметим вытекающие из свойств ядер Фейера [2; § 47] равенства $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 2\pi$ и стандартные неравенства

$$\frac{1}{n} \Phi_n(x) \leq \frac{\pi^2}{n^2 x^2}, \quad \text{для } \frac{\pi}{n} \leq |x| \leq \pi, \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \Phi_n(x) \leq 1, \quad \text{для } |x| \leq \pi. \quad (2)$$

Как хорошо известно, для каждой $g \in L_2^0$ дисперсия $DA_n g = \|A_n g\|_2^2$ может быть точно посчитана через интеграл от $\Phi_n(x)$ по спектральной мере σ_g или выражена через корреляционные коэффициенты $b_k g$. Основные результаты этой работы получаются анализом асимптотик следующих двух формул, фактически использовавшихся еще фон Нейманом в [3] (вывод этих формул можно найти в [4; теорема 18.2.1]):

$$\|A_n g\|_2^2 = \int_{(-\pi, \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(\lambda) d\sigma_g(\lambda), \quad (3)$$

$$\|A_n g\|_2^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} (n - |k|) b_k g. \quad (4)$$

Всюду далее $f \in L_2(\Omega)$ – как уже отмечалось, в этом случае $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$.

ЛЕММА 1. При любом $a \in (0, \pi]$ для всех натуральных n справедливо неравенство

$$\left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2 \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n} \right] \leq \|A_n f - f^*\|_2^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается применением представления (3) для $g = f - f^*$:

$$\int_{(-a/n, a/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(\lambda) d\sigma_{f-f^*}(\lambda) \leq \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \|A_n f - f^*\|_2^2. \quad (5)$$

Так как

$$\frac{1}{n} \Phi_n(\lambda) = \frac{\sin^2(n\lambda/2)}{n^2 \sin^2(\lambda/2)} \geq \left(\frac{\sin(n\lambda/2)}{n\lambda/2} \right)^2,$$

доказываемое неравенство леммы 1 следует из (5) в силу очевидных соотношений

$$\min_{|x| \leq a/n} \left(\frac{\sin(n\lambda/2)}{n\lambda/2} \right)^2 = \min_{|x| \leq a/2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2.$$

Следующая лемма уточняет асимптотическую числовую лемму из [1].

ЛЕММА 2. Если $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$ – невозрастающая последовательность неотрицательных действительных чисел, $\alpha \in [0, 2)$ и C – некоторая положительная константа, то из того, что

$$\sum_{k=n}^\infty \sigma_k \leq Cn^{-\alpha} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k < C \frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S_n = \sum_{k=n}^\infty \sigma_k \leq Cn^{-\alpha}$; тогда $\sigma_k = S_k - S_{k+1}$ и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 S_k - \sum_{k=2}^n (k-1)^2 S_k = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) S_k - (n-1)^2 S_n \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} k S_k \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} k C k^{-\alpha} = 2C \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} = 2C n^{2-\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{n} < C \frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовалось то, что $\sum_{k=1}^{n-1} (k/n)^{1-\alpha} (1/n)$ является частью нижней суммы Дарбу для $\int_0^1 x^{1-\alpha} dx = 1/(2-\alpha)$. Лемма 2 доказана.

Следующая теорема дает константы, связывающие (эквивалентные друг другу) степенную сходимость в эргодической теореме фон Неймана и степенную же особенность в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы, т.е. уточняет асимптотическую теорему 3 из [1]. Никакие ограничения на спектральные меры (абсолютная непрерывность и т.п.) здесь не накладываются.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in [0, 2)$. Тогда

- 1) если спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т.е. если для некоторой положительной константы A при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq A\delta^\alpha,$$

то скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ степенная, т.е. для любого натурального n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq A\pi^\alpha \left(1 + \frac{8}{2-\alpha}\right) n^{-\alpha};$$

- 2) если скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ степенная, т.е. если для некоторой положительной константы B при всех натуральных n выполняется неравенство

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha},$$

то спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т.е. для любого $\delta \in (0, \pi]$

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq B\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha} \delta^\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первой части теоремы, как и доказательство первой части теоремы 3 в [1], получается анализом асимптотики представления (3) для $g = f - f^*$:

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) + \int_{(-\pi/n, \pi/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x). \quad (6)$$

Оценим сначала первый интеграл в (6), используя неравенство (1):

$$\begin{aligned} & \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \\ & \leq \frac{1}{n^2} \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x) \\ & = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(-\pi/k, -\pi/(k+1)] \cup (\pi/(k+1), \pi/k]} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x) \\ & \leq \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{\pi^2} \sigma_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \sigma_k \\ & \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k \right) \max_{1 \leq k \leq n-1} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k, \end{aligned}$$

где $\sigma_k = \sigma_{f-f^*}\{(-\pi/k, -\pi/(k+1)] \cup (\pi/(k+1), \pi/k]\}$. По условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k = \sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \leq A\pi^\alpha n^{-\alpha},$$

поэтому оценку первого интеграла в (6) завершает ссылка на лемму 2:

$$\frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k < A\pi^\alpha \frac{8}{2-\alpha} n^{-\alpha}.$$

Теперь оценим второй интеграл в (6), используя неравенство (2):

$$\int_{(-\pi/n, \pi/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \leq \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \leq A\pi^\alpha n^{-\alpha}.$$

Складывая оценки для обеих частей (6), получаем требуемое неравенство.

Для доказательства второй части теоремы 1 воспользуемся леммой 1, дающей для каждого натурального n неравенство

$$\sigma_{f-f^*} \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \leq \left(\frac{\pi/2}{\sin(\pi/2)} \right)^2 \|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 B n^{-\alpha} = \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B \left(\frac{\pi}{n} \right)^\alpha.$$

Пусть натуральное n таково, что $\delta \in (\pi/(n+1), \pi/n]$, т.е. $1/\delta \in [n/\pi, (n+1)/\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] &\leq \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \leq \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B \left(\frac{\pi}{n} \right)^\alpha = \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B \delta^\alpha \left(\frac{\pi}{n} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\delta} \right)^\alpha \\ &\leq \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B \delta^\alpha \left(\frac{\pi}{n} \right)^\alpha \left(\frac{n+1}{\pi} \right)^\alpha \leq \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B \delta^\alpha 2^\alpha = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2-\alpha} B \delta^\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

Для исчерпывающего решения рассматриваемого в теореме 1 вопроса остается разобрать случай $\alpha \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\alpha = 2$ аналог теоремы 1 не имеет места ни с какими константами (замечание 2 к теореме 3 в [1]), а скорости сходимости с $\alpha > 2$ при $f - f^* \not\equiv 0$ просто не бывает (см., например, следствие 5 в [5]).

Поэтому не удивительно, что константа из утверждения первой части теоремы 1 стремится к бесконечности при стремлении α к 2.

Как известно (теорема 18.2.1 в [4]), в случае абсолютной непрерывности меры σ_{f-f^*} с непрерывной в точке нуль плотностью ρ справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = D A_n(f - f^*) = 2\pi\rho(0)n^{-1} + o(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Как очевидное следствие теоремы 1, получаем следующий аналог этого утверждения, уточняющий асимптотическую теорему 4 из [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если мера σ_{f-f^*} является абсолютно непрерывной с плотностью $\rho \in L_\infty(-\pi, \pi]$, то $\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq 18\pi\|\rho\|_\infty n^{-1}$ для любого натурального n .

Действительно, в этом случае $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = \int_{-\delta}^{\delta} \rho(x) dx \leq 2\delta\|\rho\|_\infty$ для любого $\delta \in (0, \pi]$, и неравенство замечания 2 немедленно следует из теоремы 1.

Как показывает теорема 1, степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением спектральной меры σ_{f-f^*} , а значит, поведением ее коэффициентов Фурье, т.е. корреляционных коэффициентов. Следующая теорема уточняет асимптотическую теорему 6 из [1]. Обсуждение того, почему ее оценки необратимы, т.е. почему здесь отсутствует критерий степенной сходимости в терминах убывания корреляционных коэффициентов, имеется в [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. для некоторой положительной константы C при всех натуральных n выполнено неравенство $|b_n(f - f^*)| \leq Cn^{-\alpha}$. Тогда для любого натурального n

1) если $\alpha \in [0, 1)$, то

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + \frac{2C}{1-\alpha} n^{-\alpha} \leq \left(\|f\|_2^2 + \frac{2C}{1-\alpha} \right) n^{-\alpha};$$

2) если $\alpha = 1$, то

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + 2C \frac{1 + \ln n}{n} \leq (\|f\|_2^2 + 2C) \frac{1 + \ln n}{n};$$

3) Если $\alpha > 1$, то мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью ρ , и

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} + o(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

причем

$$\begin{aligned} 2\pi\rho(0) &= \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f - f^*) \\ &\leq \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} C|k|^{-\alpha} \leq \|f\|_2^2 + 2C \frac{\alpha}{\alpha-1}; \end{aligned}$$

если, более того, корреляционные коэффициенты убывают экспоненциально, т.е. $|b_n(f - f^*)| \leq Ae^{-Bn}$ для некоторых положительных констант A и B при всех натуральных n , то

$$2\pi\rho(0) = \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f\|_2^2 + \frac{2Ae^{-B}}{1 - e^{-B}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, как и доказательство теоремы 6 в [1], получается анализом асимптотики представления (4). Так как $b_0(f - f^*) = \|f - f^*\|_2^2$, и для всех целых k , очевидно, $b_{-k}(f - f^*) = \overline{b_k(f - f^*)}$, из представления (4) для $g = f - f^*$ получаем неравенство

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} (n - |k|) |b_k(f - f^*)| \leq \frac{1}{n} \sum_{|k| < n} |b_k(f - f^*)|$$

$$= \frac{1}{n} \|f - f^*\|_2^2 + \frac{1}{n} \sum_{|k|=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)| = \frac{1}{n} \|f - f^*\|_2^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)|,$$

из которого легко следуют первые два утверждения теоремы 2.

Действительно, если $\alpha \in [0, 1]$, то

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)| \leq \frac{2C}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha} = \frac{2C}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-\alpha} \frac{1}{n}.$$

Остается заметить, что $\sum_{k=1}^{n-1} (k/n)^{-\alpha} (1/n)$ — это нижняя сумма Дарбу для

$$\int_0^{1-1/n} x^{-\alpha} dx < \int_0^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha},$$

если $\alpha \in [0, 1)$; и это на $1 - 1/n$ больше нижней суммы Дарбу для $\int_{1/n}^1 x^{-1} dx = \ln n$, если $\alpha = 1$.

Если же $\alpha > 1$, то, как известно (см., например, доказательство теоремы 6 в [1]), у меры σ_{f-f^*} есть непрерывная (неотрицательная) плотность ρ , поэтому справедливо асимптотическое соотношение (7). Остается заметить, что в рассматриваемом случае $\alpha > 1$ ряд из коэффициентов Фурье функции ρ сходится абсолютно: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(1/2\pi)b_k(f - f^*)| < \infty$, а поэтому сам ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/2\pi)b_k(f - f^*)e^{ikx}$ равномерно сходится к функции $\rho(x)$ всюду на $(-\pi, \pi]$ — в частности, в точке нуля он сходится к $\rho(0)$. Следовательно,

$$2\pi\rho(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \leq \|f\|_2^2 + 2C \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ на 1 больше нижней суммы Дарбу для $\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = 1/(\alpha - 1)$.

В случае же экспоненциального убывания $|b_k(f - f^*)|$ требуемое неравенство получается суммированием геометрической прогрессии:

$$2\pi\rho(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Ae^{-kB} = \|f - f^*\|_2^2 + \frac{2Ae^{-B}}{1 - e^{-B}}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим в заключение, что все результаты этой работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов, доказывающиеся дословно так же. Приведем здесь соответствующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле процесс (с конечным вторым моментом), $EX_n = 0$, $F(\lambda)$ — спектральная функция, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. Тогда для каждого $\alpha \in [0, 2)$

- 1) если для некоторой положительной константы A при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство $F(\delta) - F(-\delta) \leq A\delta^\alpha$, то для любого натурального n

$$DS_n \leq A\pi^\alpha \left(1 + \frac{8}{2 - \alpha}\right) n^{2-\alpha};$$

- 2) если для некоторой положительной константы B при всех натуральных n выполняется неравенство $DS_n \leq Bn^{2-\alpha}$, то для любого $\delta \in (0, \pi]$

$$F(\delta) - F(-\delta) \leq B \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2-\alpha} \delta^\alpha.$$

Аналог теоремы при $\alpha = 2$ не имеет места, ни с какими константами, а степенного убывания DS_n (случай $\alpha > 2$) при $X_n \not\equiv 0$ просто не бывает.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Качуровский, “Скорости сходимости в эргодических теоремах”, *УМН*, **51:4** (1996), 73–124.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [3] J. von Neumann, “Proof of quasi-ergodic hypothesis”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **18:1** (1932), 70–82.
- [4] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.
- [5] В. Ф. Гапошкин, “Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39:6** (1975), 1366–1392.

А. Г. Качуровский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступило

19.08.2009

В. В. Седалищев

Новосибирский государственный университет

E-mail: vvs1988@yandex.ru