Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 764–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:04:35

Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода

С. А. Назаров

Установлено, что малым периодическим сингулярным или регулярным возмущением границы цилиндрического трехмерного волновода можно образовать лакуну в непрерывном спектре задачи Дирихле для оператора Лапласа в получившемся периодическом волноводе. Сингулярное возмущение подразумевает образование периодического семейства малых полостей, а регулярное – полное периодическое искривление границы. При коротком периоде лакуны нет, но при длинном она открывается сразу после первого сегмента непрерывного спектра. Результат получен путем асимптотического анализа собственных чисел вспомогательной задачи на возмущенной ячейке периодичности.

Библиография: 30 названий.

1. Цилиндрические и периодические (квазицилиндрические) волноводы. В трехмерном цилиндре $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$, сечение ω которого – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым замкнутым гладким (класса C^∞ для простоты) контуром $\partial\omega$, рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta_x v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1)$$

Этой задаче отвечает неограниченный, самосопряженный и положительный оператор A_Ω в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, заданный дифференциальным выражением $-\Delta_x$ и имеющий область определения $\mathcal{D}(A_\Omega) = H^2(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega; \partial\Omega)$, где $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева, а $\dot{H}^1(\Omega; \partial\Omega)$ – подпространство в $H^1(\Omega)$, выделенное условиями Дирихле из задачи (1). Как известно и нетрудно проверить, непрерывный спектр $\sigma_c(A_\Omega)$ оператора A_Ω представляет собой луч $[\mu^\dagger, +\infty)$ на вещественной оси, где точка отсечки¹ $\mu^\dagger > 0$ – первое собственное число M_1 вспомогательной задачи Дирихле на сечении цилиндра

$$-\Delta_y V(y) = M V(y), \quad y \in \omega, \quad V(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \quad (2)$$

Здесь введено обозначение (y, z) для декартовой системы координат $x = (x_1, x_2, x_3)$, а именно, $y = (x_1, x_2)$, $z = x_3$. Кроме того, $\Delta_x = \Delta_y + \partial^2/\partial z^2$ и Δ_y – трехмерный и двумерный оператор Лапласа. Напомним, что в силу принципа максимума

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00759).

¹В зарубежной терминологии – cut-off.

(см., например, [1]) собственное число M_1 простое, а соответствующую собственную функцию V_1 можно взять положительной в области ω .

Рассмотрим аналогичную (1) задачу

$$-\Delta_x u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Pi, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (3)$$

в периодическом волноводе Π (рис. 1) с ячейкой периодичности ϖ . Иными словами, ϖ – область в пространстве $\mathbb{R}^3$, расположенная в круговом цилиндре $\{x : |y| < R, z \in (0, 1)\}$ с единичной высотой и радиусом $R > 0$, а Π – внутренность множества

$$\bar{\Pi} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \bar{\varpi}_j, \quad (4)$$

причем $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и $\varpi_j = \{x : (y, z - j) \in \varpi\}$. Разумеется, предполагаем, что Π – область, т.е. связное множество, и дополнительно (для простоты) считаем, что граница $\partial\Pi$ гладкая.

Рис. 1. Периодический волновод

Задаче (3) также можно поставить в соответствие оператор A_Π в пространстве $L_2(\Pi)$, имеющий область определения $\mathcal{D}(A_\Pi) = H^2(\Pi) \cap \mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)$ и обладающий теми же свойствами, что и оператор A_Ω . Вместе с тем, непрерывный спектр $\sigma_c(A_\Pi)$ этого оператора устроен значительно сложнее, чем спектр $\sigma_c(A_\Omega) = [\mu^\dagger, +\infty)$. Именно он является объединением счетного набора замкнутых сегментов

$$\sigma_c(A_\Pi) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Upsilon_n, \quad \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}. \quad (5)$$

Сегменты Υ_n определены формулой

$$\Upsilon_n = \{\Lambda_n(\eta) : \eta \in [0, 2\pi)\}, \quad (6)$$

в которой фигурирует бесконечно большая положительная последовательность

$$\Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_n(\eta) \leq \dots \quad (7)$$

собственных чисел вспомогательной задачи на ячейке периодичности

$$L(\nabla_x; \eta)U(y, z) := -\Delta_y U(y, z) - (\partial_z + i\eta)^2 U(y, z) = \Lambda U(y, z), \quad (y, z) \in \varpi, \quad (8)$$

$$U(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \gamma, \quad (9)$$

$$U(y, 0) = U(y, 1), \quad \partial_z U(y, 0) = \partial_z U(y, 1), \quad y \in \gamma_0. \quad (10)$$

Здесь $\partial_z = \partial/\partial z$, i – мнимая единица, η – вещественный параметр, $\gamma = \partial\varpi \setminus (\bar{\gamma}_0 \cup \bar{\gamma}_1)$ – боковая поверхность ячейки, а $\gamma_t = \{y \in \mathbb{R}^2 : (y, t) \in \Pi\}$ – сечение квазицилиндра Π .

Обращаем внимание на то, что собственные числа приведены в списке (7) при учете кратностей. Задаче (8)–(10) при $\eta \in \mathbb{R}$ отвечает положительно определенная замкнутая полуторалинейная эрмитова форма

$$q(U, V; \eta) = (\nabla_y U, \nabla_y V)_\varpi + ((\partial_z + i\eta)U, (\partial_z + i\eta)V)_\varpi \quad (11)$$

на подпространстве $\mathring{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma)$ функций из $H_{\text{per}}^1(\varpi)$, 1-периодических относительно переменной z и подчиненных условию (9); в равенстве (11) и далее $(\cdot, \cdot)_\varpi$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\varpi)$. Таким образом, согласно [2; гл. 10] собственные числа задачи (8)–(10) вещественны и положительны. Кроме того, собственные числа непрерывно и 2π -периодически зависят от переменной η , т.е. действительно (6) – замкнутый сегмент. Непрерывность обеспечена общими результатами [3; гл. 9], а 2π -периодичность – следующим наблюдением: пары $\{\eta, U\}$ и $\{\eta \pm 2\pi, \exp(\mp 2\pi iz)U\}$ удовлетворяют задаче (8)–(10) одновременно.

Сегментарное строение (5) множества $\sigma_c(A_\Pi)$ допускает возникновение *лакун* – интервалов, имеющих концы на непрерывном спектре, но содержащих разве лишь точки дискретного спектра оператора A_Π (на самом деле для чисто периодической задачи лакуны свободны от спектра). В то же время сегменты (6) могут пересекаться, накрывать один другой и в результате образовывать сплошной луч $[\lambda^\dagger, +\infty)$ с единственной точкой отсечки $\lambda^\dagger$. Так происходит, например, когда цилиндру Ω искусственно приписывается периодическое строение (см. далее пункт 3).

Рис. 2. Сингулярно возмущенный цилиндрический волновод

Рис. 3. Регулярно возмущенный цилиндрический волновод

Известны примеры открытия лакун в существенном спектре скалярных дифференциальных операторов и оператора системы уравнений Максвелла [4]–[9] и (см. также обзоры [10]–[11]), заданных во всем пространстве $\mathbb{R}^m$ и имеющих периодические коэффициенты, вариацией которых и достигается результат. В данной работе для волновода Ω , бесконечного лишь в одном направлении, показано, что малое периодическое возмущение границы (образование микрополости или пологое искривление поверхности) открывает лакуну (см. далее теоремы 5, 6, 8 и 9, а также рис. 2 и 3 соответственно). Для этого применяется асимптотический анализ [12; гл. 9, 10] спектральной задачи (8)–(10) в сингулярно или регулярно возмущенной области.

2. Спектры модельных задач. Задача (2) на сечении ω получается из задачи (1) в цилиндре Ω посредством преобразования Фурье

$$v(y, z) \mapsto V(y; \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iz\zeta) v(y, z) dz.$$

Если M – собственное число задачи (2), а V – соответствующая собственная функция, то при

$$\mu = M + \zeta^2, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

волна

$$v(x) = \exp(i\zeta z) V(y) \quad (13)$$

удовлетворяет соотношениям (1).

Аналогично задача (8)–(10) на ячейке ϖ выводится из задачи (3) в квазицилиндре Π при помощи преобразования Гельфанда

$$u(y, z) \mapsto V(y, z; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(-i\eta(z+j)) v(y, z+j) \quad (14)$$

(см. оригинальную статью [13], а также, например, книги [14]–[16]). Отметим, что в левой части (14) $(y, z) \in \Pi$, но в правой – $(y, z) \in \varpi$. Являясь дискретным преобразованием Фурье, преобразование (14) осуществляет изометрический изоморфизм

$$L_2(\Pi) \cong L_2(0, 2\pi; L_2(\varpi)).$$

Здесь $L_2(0, 2\pi; \mathfrak{B})$ – пространство абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, а норма имеет вид

$$\|U; L_2(0, 2\pi; \mathfrak{B})\| = \left(\int_0^{2\pi} \|U(\eta); \mathfrak{B}\|^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Если $u \in C_c^\infty(\overline{\Pi})$ (линеал гладких функций с компактными носителями), то имеем $U(y, 0; \eta) = U(y, 1; \eta)$ и, кроме того, $(\partial_z + i\eta)U(y, z; \eta)$ – образ Гельфанда производной $\partial_z u(y, z)$. Эти формулы поясняют происхождение условий периодичности (10) и вид дифференциального уравнения (8), а также показывают, что преобразование (14) порождает изоморфизмы

$$H^l(\Pi) \approx L_2(0, 2\pi; H_{\text{per}}^l(\varpi)), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Дифференциальный оператор в левой части (8) квадратично зависит от двойственной переменной $\eta \in \mathbb{C}$, и поэтому при фиксированном параметре Λ задачу (8)–(10) следует интерпретировать как *полиномиальный пучок*

$$\eta \mapsto \mathfrak{A}(\eta; \Lambda): H_{\text{per}}^2(\varpi) \cap \mathring{H}^1(\varpi; \gamma) \rightarrow L_2(\varpi). \quad (15)$$

Согласно общим результатам [17] спектр $\mathfrak{s}(\Lambda) \subset \mathbb{C}$ пучка (15) состоит из нормальных собственных значений η_p с единственной точкой сгущения на бесконечности. Нетрудно убедиться в том, что спектр $\mathfrak{s}(\Lambda)$ инвариантен относительно сдвигов на

расстояния $\pm 2\pi$ вдоль вещественной оси (подробности см. в [18] и [16; § 3.4]). Поэтому далее считаем, что $\operatorname{Re} \eta \in [0, 2\pi)$, даже $\eta \in [0, 2\pi)$, так как интерес представляют вещественные собственные значения, порождающие волны Флоке

$$u(x) = \exp(i\eta z)U(y, z). \quad (16)$$

Здесь U – соответствующая собственная функция задачи (8)–(10). Наконец, в [18] (см. также [16; § 3.4]) установлено, что при заданном $\lambda = \Lambda \in \mathbb{C}$ оператор

$$H^2(\Pi) \cap \mathring{H}^1(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi) \quad (17)$$

задачи (8)–(10) является фредгольмовым в том и только в том случае, когда полуотрезок $[0, 2\pi)$ на вещественной оси $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ свободен от η -спектра $\mathfrak{s}(\Lambda)$ пучка (15), т.е. собственных чисел η_p задачи (8)–(10). Подчеркнем, что фредгольмов оператор (17) оказывается изоморфизмом.

Потеря фредгольмовости отображением (17) означает, что точка λ принадлежит непрерывному спектру оператора A_Π . В самом деле, сингулярная последовательность Вейля для этого оператора в точке $\lambda = \Lambda$ (см., например, [2; § 9.1]) выстраивается по волне Флоке (16) при помощи стандартной процедуры, а именно, волна умножается на срезку $\chi_N(z)$, равную единице при $|z| < N$ и нулю при $|z| > N + 1$, что придает последовательности $\{N^{-1/2}\chi_N u\}_{n=1}^\infty$ нужные свойства:

$$\begin{aligned} N^{-1/2}\chi_N u &\rightarrow 0 \quad \text{слабо в } L_2(\Pi), \\ \|\chi_N u; L_2(\Pi)\| &\geq cN^{1/2}, \quad c > 0, \quad \|\chi_N u; H^1(\Pi)\| \leq C. \end{aligned}$$

Отметим, что ввиду конечномерности ядра отображения (17) (см. [18] и [16; замечание 3.1.5]) точки существенного спектра попадают на непрерывный спектр $\sigma_c(A_\Pi)$.

Фиксация спектрального параметра Λ и интерпретация задачи (8)–(10) как полиномиального пучка (15) характерны для теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами (см. ключевые работы [19]–[22]), а также монографии [16], [23]). Разработан и другой метод, опирающийся на теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см. обзоры [10], [11] и монографии [14], [15]). При таком подходе для каждого значения двойственной переменной $\eta \in [0, 2\pi)$ вводится оператор $\mathcal{A}(\eta)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\varpi)$ с дифференциальным выражением $-\Delta_y - (\partial_z + i\eta)^2$ и областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(\eta)) = H_{\text{per}}^2(\varpi) \cap \mathring{H}^1(\varpi; \gamma).$$

Оператор $\mathcal{A}(\eta)$ самосопряжен и положителен. Он обладает последовательностью (7) собственных чисел, так как вложение $H^2(\varpi) \subset L_2(\varpi)$ компактно. Наконец, число $\eta \in [0, 2\pi)$ принадлежит спектру $\mathfrak{s}(\lambda)$ пучка $\eta \mapsto \mathfrak{A}(\eta; \lambda)$ тогда и только тогда, когда параметр λ совпадает с каким-либо собственным числом $\Lambda_n(\eta)$ оператора $\mathcal{A}(\eta)$. В итоге обнаруживаем, что непрерывный спектр оператора A_Π принимает вид (5).

В случае прямого цилиндра $\Pi = \Omega$ с ячейкой $\varpi = \omega \times (0, 1)$ обычная волна (13) превратится в волну Флоке (16), если положить

$$U(y, z) = \exp(2\pi i q z)V(y), \quad \eta = \zeta - 2\pi q, \quad q = \max\{p \in \mathbb{Z} : 2\pi p \leq \zeta\}.$$

Эта трансформация сопровождается разбиением ветви (12) на фрагменты и параллельным переносом их вдоль оси $\eta \in \mathbb{R}$ на участок $[0, 2\pi)$, т.е. одна ветвь порождает бесконечный набор собственных чисел оператора $\mathcal{A}(\eta)$. Для главной ветви, отвечающей первому собственному числу $M_1 > 0$ задачи (2), результат указанных действий схематически изображен на рис. 4.

Рис. 4. Сворачивание первой ветви

Далее лакуна в непрерывном спектре строится в предположении, что второе собственное число $M_2 \in (M_1, \infty)$ задачи (2) удовлетворяет соотношению

$$M_2 > M_1 + \pi^2. \quad (18)$$

В правую часть (18) помещена ордината точки пересечения двух нижних дуг на рис. 4. Отметим, что такое требование можно соблюсти масштабированием. В самом деле, при сжатии координат

$$x \mapsto \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = h^{-1}x \quad (19)$$

собственные числа $\mathbf{M}_n$ задачи Дирихле на сечении $\omega_h = \{\mathbf{y} : h\mathbf{y} \in \omega\}$ становятся равными $h^{-2}M_n$, а значит, условие (18) выполнено в случае $h > (M_2 - M_1)^{-1/2}\pi$. С другой стороны, высота фиктивной ячейки $\varpi = \omega \times (0, 1)$ зафиксирована единичной, т.е. замена (19) равносильна введению цилиндрической ячейки $\omega \times (0, h^{-1})$, подобной $\omega_h \times (0, 1)$, и, тем самым, более частому расположению возмущений цилиндрической поверхности, используемых в следующих пунктах.

3. Сингулярное возмущение цилиндрической ячейки. Пусть θ – открытое, но не обязательно связное множество в $\mathbb{R}^3$ с гладкой (для простоты) границей $\partial\theta$ и компактным замыканием $\bar{\theta} = \theta \cup \partial\theta$. Считаем, что начало координат лежит внутри θ . Введем малый параметр $\varepsilon > 0$ и множества

$$\theta_\varepsilon = \{x : \xi := \varepsilon^{-1}(x - x^0) \in \theta\}, \quad \varpi(\varepsilon) = \varpi \setminus \bar{\theta}_\varepsilon, \quad (20)$$

где $x^0 = (y^0, z^0)$ – точка внутри цилиндрической ячейки $\varpi = \omega \times (0, 1)$, а граница $\varepsilon_0 > 0$ изменения параметра ε выбрана так, что $\bar{\theta}_\varepsilon \subset \varpi$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Разумеется, предполагаем, что $\varpi(\varepsilon)$ – область, т.е. связное множество.

Ячейка периодичности $\varpi(\varepsilon)$ по формуле (4) определяет квазицилиндр $\Pi(\varepsilon)$, т.е. цилиндр Π , перфорированный периодическим семейством малых полостей

$$\{x : (y, z - j) \in \bar{\theta}_\varepsilon\}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

(см. рис. 2). Соответствующую модельную спектральную задачу

$$L(\nabla_x; \eta)U^\varepsilon(x; \eta) = \Lambda^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon(x; \eta), \quad x \in \varpi(\varepsilon), \quad (21)$$

$$U^\varepsilon(x; \eta) = 0, \quad x \in \partial\varpi(\varepsilon) \setminus (\bar{\gamma}_0 \cup \bar{\gamma}_1), \quad (22)$$

$$U^\varepsilon(y, 0; \eta) = U^\varepsilon(y, 1; \eta), \quad \partial_z U^\varepsilon(y, 0; \eta) = \partial_z U^\varepsilon(y, 1; \eta), \quad y \in \gamma_0, \quad (23)$$

следует интерпретировать как сингулярное возмущение задачи (8)–(10) в цилиндрической ячейке $\varpi = \omega \times (0, 1)$. В уравнении (21) фигурирует дифференциальный оператор $L(\nabla_x; \eta)$ из левой части (8).

Применим к задаче (21)–(23) метод [24] (см. также [25]–[27] и [12; гл. 9, 10]) построения асимптотики решений спектральных задач в областях с сингулярными возмущениями границы. Пусть сначала точка η удалена от середины полуинтервала $[0, 2\pi)$, на которую проецируется точка пересечения дуг, отмеченных на рис. 4. В этом случае асимптотику простых собственных чисел

$$\Lambda_\pm^\varepsilon(\eta) \in [0, \min\{M_1 + 4\pi^2, M_2\}] \quad (24)$$

задачи (21)–(23) ищем в виде

$$\Lambda_\pm^\varepsilon(\eta) = \Lambda_\pm^0(\eta) + \varepsilon\Lambda'_\pm(\eta) + \tilde{\Lambda}_\pm^\varepsilon(\eta). \quad (25)$$

Здесь и в соответствующем асимптотическом анзаце для собственных функций

$$U_\pm^\varepsilon(x; \eta) = U_\pm^0(x; \eta) + \chi(x)W_\pm(\varepsilon^{-1}(x - x^0); \eta) + \varepsilon U'_\pm(x; \eta) + \tilde{U}_\pm^\varepsilon(x; \eta) \quad (26)$$

фигурируют малые остатки $\tilde{\Lambda}_\pm^\varepsilon$ и $\tilde{U}_\pm^\varepsilon$ и основные асимптотические поправки $\Lambda'_\pm(\eta)$ и $U'_\pm$. Кроме того, $W_\pm$ – функция типа пограничного слоя, а $\chi \in C_c^\infty(\varpi)$ – гладкая срезающая функция, равная единице в окрестности точки x^0 и нулю вблизи границы $\partial\varpi$. Наконец,

$$\Lambda_\pm^0(\eta) = M_1 + (\eta - \pi \pm \pi)^2, \quad (27)$$

$$U_\pm^0(x; \eta) = \mathbf{U}_\pm(x) = \exp(-i(\pi \mp \pi)z)V_1(y), \quad (28)$$

а V_1 – собственная функция задачи (2), отвечающая ее первому собственному числу M_1 и нормированная в пространстве Лебега $L_2(\omega)$.

Решение $W_\pm$ типа пограничного слоя зависит от “быстрых” переменных $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^0)$ и компенсирует невязку главного асимптотического члена (28) в краевом условии (22) на границе отверстия. Поэтому (ср. общую асимптотическую процедуру в статье [24], а также в книге [12; гл. 9]) функция $W_\pm$ является решением внешней задачи Дирихле для множества $\bar{\theta}$. Таким образом,

$$W_\pm(\xi; \eta) = -\alpha_\pm V_1(y^0)P(\xi), \quad \alpha_\pm = \exp(i(\pi \mp \pi)z^0), \quad (29)$$

причем P – емкостной потенциал (см. [27], [28]), т.е. гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\theta}$ функция, равная единице на поверхности $\partial\theta$ и затухающая на бесконечности,

$$P(\xi) = C_\theta |\xi|^{-1} + \tilde{P}(\xi), \quad |\nabla_\xi^k \tilde{P}(\xi)| \leq c_k |\xi|^{-1-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Величина $C_\theta = \text{cap}(\theta) > 0$ называется *гармонической емкостью* множества $\bar{\theta}$ (см., например, [27], [28]).

Подставим асимптотические анзацы (25), (26) в задачу (21)–(23) и при учете вытекающей из соотношений (29), (30), (20) формулы

$$W_\pm(\xi; \eta) = -\varepsilon C_\theta \alpha_\pm V_1(y^0) |x - x^0|^{-1} + O(\varepsilon^2 |x - x^0|^{-2})$$

соберем коэффициенты при малом параметре ε , записанные в “медленных” координатах x . В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} L(\nabla_x; \eta) U'_\pm(x; \eta) - \Lambda^0(\eta) U'_\pm(x; \eta) &= F(x; \eta) \\ &:= \Lambda'(\eta) U_\pm^0(x; \eta) \\ &\quad + C_\theta \alpha_\pm V_1(y^0) (L(\nabla_x; \eta) - \Lambda^0(\eta)) (\chi(x) |x - x^0|^{-1}), \quad x \in \varpi \setminus x^0, \end{aligned} \quad (31)$$

снабженному краевыми условиями (9) и условиями периодичности (10). Подчеркнем, что уравнение (31) поставлено в проколотой области $\varpi \setminus x^0$, т.е. никаких δ -функций Дирака нет, и благодаря гармоничности функции $x \mapsto |x - x^0|^{-1}$ его правая часть составляет $O(|x - x^0|^{-2})$. Такая, слабая, сингулярность не мешает задаче (31), (9), (10) иметь обобщенное решение [29] в пространстве $\mathring{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma)$ (см. далее интегральное тождество (50)) при обычном условии разрешимости. Именно, правая часть уравнения (31) должна быть ортогональна в пространстве $L_2(\varpi)$ собственной функции $\mathbf{U}_\pm$. В силу равенства $\|\mathbf{U}_\pm; L_2(\varpi)\| = 1$ названное условие принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda'(\eta) &= \Lambda'(\eta) \int_{\varpi} \overline{\mathbf{U}_\pm(x)} U_\pm^0(x; \eta) dx \\ &= -C_\theta \alpha_\pm V_1(y^0) \int_{\varpi} \overline{\mathbf{U}_\pm(x)} (L(\nabla_x; \eta) - \Lambda^0(\eta)) (\chi(x) |x - x^0|^{-1}) dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Последний интеграл сходится абсолютно, и его можно вычислить как предел

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\varpi \setminus \mathbb{B}_\rho(x^0)} \overline{\mathbf{U}_\pm(x)} (L(\nabla_x; \eta) - \Lambda^0(\eta)) (\chi(x) |x - x^0|^{-1}) dx. \quad (33)$$

Здесь $\mathbb{B}_\rho(x^0) = \{x : |x - x^0| < \rho\}$ – шар малого радиуса $\rho > 0$. Применяя формулу Грина, получаем, что выражение (33) равно

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho \rightarrow +0} \left(\int_{\varpi \setminus \mathbb{B}_\rho(x^0)} \chi(x) |x - x^0|^{-1} \overline{(L(\nabla_x; \eta) - \Lambda^0(\eta)) \mathbf{U}_\pm(x)} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \mathbb{B}_\rho(x^0)} (\overline{\mathbf{U}_\pm(x)} N(\nabla_x; \eta) |x - x^0|^{-1} - |x - x^0|^{-1} \overline{N(\nabla_x; \eta) \mathbf{U}_\pm(x)}) ds_x \right) \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho(x^0)} \overline{\mathbf{U}_\pm(x)} |x - x^0|^{-2} ds_x = -4\pi \bar{\alpha}_\pm \overline{V_1(y^0)}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом $N(\nabla_x; 0)$ – оператор дифференцирования вдоль нормали и

$$N(\nabla_x; \eta) = |x - x^0|^{-1} \left((y_1 - y_1^0) \frac{\partial}{\partial y_1} + (y_2 - y_2^0) \frac{\partial}{\partial y_2} + (z - z^0) \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\eta \right) \right).$$

В итоге из формул (32) и (34) выводим, что

$$\Lambda'(\eta) = 4\pi C_\theta |V_1(y^0)|^2. \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку на границе полости θ_ε назначены условия Дирихле, справедливо включение $\overset{\circ}{H}_{\text{per}}^1(\varpi(\varepsilon); \gamma \cup \partial\theta_\varepsilon) \subset \overset{\circ}{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma)$, а значит, максиминимальный принцип с полуторалинейной формой (11) (см. [2; теорема 10.2.2]) устанавливает связь

$$\Lambda_p^\varepsilon(\eta) > \Lambda_p^0(\eta) \quad (36)$$

между собственными числами задачи (21)–(23) на возмущенной ячейке $\varpi(\varepsilon)$ и задачи (8)–(10) на цилиндрической ячейке ϖ . Неравенство (36) согласуется с формулой (35) для асимптотической поправки в анзаце (25), которая оказывается положительной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно общим результатам [19] (см. также [16; § 3.5 и § 3.3]) сингулярность $O(|x - x^0|^{-2})$ правой части F уравнения (31) может спровоцировать логарифмический рост решения $U'_\pm$. Тем не менее, понятное соотношение

$$F(x; \eta) = c \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|x - x^0|} + O(1) = -c \frac{z - z^0}{|x - x^0|^3} + O(1), \quad x \rightarrow x^0,$$

показывает, что главный член асимптотики решения $U'_\pm(x; \eta)$ вблизи точки $x = x^0$ имеет вид $c_0(\eta) + c_1(\eta)(z - z^0)|x - x^0|^{-1}$. Таким образом, сама функция остается ограниченной, а ее градиент составляет $O(|x - x^0|^{-1})$ (см. статьи [19], [21], а также, например, вводную гл. 2 или полную теорию в гл. 3, 4 книги [16]).

Пусть теперь

$$\eta = \pi + \psi\varepsilon, \quad (37)$$

где $\psi \in \mathbb{R}$ – параметр, описывающий отклонение переменной η от точки $\eta = \pi$, в которой кратность собственного числа удваивается. В этом случае асимптотические анзацы (25) и (26) сохраняются, причем $\Lambda^0(\pi) = M_1 + \pi^2$ согласно формуле (27), но главный член становится линейной комбинацией собственных функций (28):

$$U_\pm^0(x; \pi, \psi) = a_1^\pm(\psi) \mathbf{U}_+(x) + a_2^\pm(\psi) \mathbf{U}_-(x) = (a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi) \exp(-2\pi iz)) V_1(y). \quad (38)$$

При этом $a^\pm = (a_1^\pm, a_2^\pm)$ – столбцы коэффициентов, подлежащих определению. Таким образом, прежние доводы доставляют решение типа пограничного слоя

$$W_\pm(\xi; \pi, \psi) = -(a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi) \exp(-2\pi iz^0)) V_1(y^0) P(\xi), \quad (39)$$

а уравнение (31) принимает вид

$$\begin{aligned} L(\nabla_x; \pi) U'_\pm(x; \pi, \psi) - \Lambda^0(\pi) U'_\pm(x; \pi, \psi) \\ = \Lambda'(\pi, \psi) U_\pm^0(x; \pi, \psi) + 2i\psi(\partial_z + \pi i) U_\pm^0(x; \pi, \psi) \\ + C_\theta (a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi) \exp(-2\pi iz^0)) \\ \times V_1(y^0) (L(\nabla_x; \eta) - \Lambda^0(\eta)) (\chi(x) |x - x^0|^{-1}), \quad x \in \varpi \setminus x^0. \end{aligned} \quad (40)$$

В правой части учтено слагаемое $2i\psi(\partial_z + \pi i)U_{\pm}^0$, вызванное малым возмущением (37) точки $\eta = \pi$.

Поскольку $\Lambda^0(\pi) = M_1 + \pi^2$ – двукратное собственное число, задача (40), (9), (10) имеет решение $U'_{\pm} \in H^1(\varpi)$ в том и только в том случае, если правая часть уравнения (40) удовлетворяет двум условиям, выражающим ее ортогональность в пространстве $L_2(\varpi)$ собственным функциям

$$x \mapsto \mathbf{U}_+(x) = V_1(y) \quad \text{и} \quad x \mapsto \mathbf{U}_-(x) = \exp(-2\pi iz)V_1(y).$$

Повторяя выкладки (34) и учитывая простые равенства

$$\begin{aligned} 2\pi i\psi \int_{\varpi} \overline{V_1(y)}(\partial_z + \pi i)U_{\pm}^0(x; \pi, \psi) dx &= -2\pi\psi a_1^{\pm}(\psi), \\ 2\pi i\psi \int_{\varpi} \overline{\exp(-2\pi iz)V_1(y)}(\partial_z + \pi i)U_{\pm}^0(x; \pi, \psi) dx &= 2\pi\psi a_2^{\pm}(\psi), \end{aligned} \quad (41)$$

приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Lambda'_{\pm}(\pi, \psi)a_1^{\pm}(\psi) &= 2\pi\psi a_1^{\pm}(\psi) + 4\pi C_{\theta}|V_1(y^0)|^2(a_1^{\pm}(\psi) + a_2^{\pm}(\psi)\exp(-2\pi iz^0)), \\ \Lambda'_{\pm}(\pi, \psi)a_2^{\pm}(\psi) &= -2\pi\psi a_2^{\pm}(\psi) + 4\pi C_{\theta}|V_1(y^0)|^2(a_1^{\pm}(\psi)\exp(2\pi iz^0) + a_2^{\pm}(\psi)). \end{aligned} \quad (42)$$

Отыскивая собственные значения эрмитовой (2×2) -матрицы из правой части (42), получаем, что

$$\Lambda'_{\pm}(\pi, \psi) = F \pm \sqrt{F^2 + 4\pi^2\psi^2}, \quad (43)$$

где

$$F = 4\pi C_{\theta}|V_1(y^0)|^2 > 0.$$

Подчеркнем, что по понятным причинам величина (43) не зависит от аппликаты z^0 точки x^0 . Соответствующие (ненормированные) собственные столбцы можно взять такими:

$$\begin{aligned} a^{\pm}(\psi) &= \left(\pm 2\pi\psi + \sqrt{F^2 + 4\pi^2\psi^2}, \pm F \exp(2\pi iz^0) \right) \quad \text{при} \quad \pm \psi \geq 0, \\ a^{\pm}(\psi) &= \left(\pm F \exp(-2\pi iz^0), \mp 2\pi\psi + \sqrt{F^2 + 4\pi^2\psi^2} \right) \quad \text{при} \quad \mp \psi \geq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поправка $\Lambda'_+(\pi, \psi)$, вычисленная по формуле (43), положительна, что согласуется с неравенством (36), выведенным из максиминимального принципа. Вместе с тем, другая поправка

$$\Lambda'_-(\pi, \psi) = -2\pi^2 F^{-1}\psi^2 + O(\psi^4)$$

оказывается отрицательной при малом $|\psi| > 0$, однако в случае $|\psi| \ll \pi^{-1}F$ благодаря вытекающему из формулы (27) соотношению

$$\min\{\Lambda'_{\pm}(\eta + \varepsilon\psi)\} = M_1 + \pi^2 - 2\pi\varepsilon|\psi| + O(\psi^2)$$

противоречий с неравенством (36) нет.

4. Идентификация лакуны. Согласно [24] (см. также [12; гл. 9]) появление малого отверстия $\bar{\theta}_\varepsilon$ в области ϖ приводит к малым возмущениям собственных чисел. Именно, при малых положительных η_0 и m_0 можно найти такую величину $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta_0, m_0) > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\eta \in (\pi - \eta_0, \pi + \eta_0)$ задача (21)–(23) имеет на интервале

$$(M_1 + (\pi - \eta_0)^2 - m_0, M_1 + (\pi - \eta_0)^2 + m_0) \quad (45)$$

либо два простых собственных числа $\Lambda_\pm^\varepsilon(\eta)$, либо одно $\Lambda_-^\varepsilon(\eta) = \Lambda_+^\varepsilon(\eta)$ с кратностью два (см. соответственно рис. 5, с и b). Далее это утверждение будет проверено независимо в замечании 7. Формулы (25) и (43) приводят к соотношениям

$$\Lambda_\pm^\varepsilon(\eta + \varepsilon\psi) = M_1 + \pi^2 + \varepsilon(F \pm F \pm 2\pi^4 F^{-1}\psi^2 + O(\psi^4)) + O(\varepsilon^2),$$

которые согласуются с ситуацией двух простых собственных чисел, изображенной на рис. 5, с и обеспечивающей открытие лакуны (тонированная область и жирная линия на оси ординат).

Рис. 5. Возмущение собственных чисел а), без открытия лакуны б) и с открытием с)

Приступим к обоснованию формальных асимптотических конструкций из предыдущего пункта. Для этого понадобится вспомогательное утверждение, известное как “лемма о почти собственных значениях и векторах” (см. [30] и [2]) и формулируемое ниже в достаточном для поставленных целей объеме.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{B}$ – самосопряженный, положительный и компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а число $b > 0$ и элемент $\mathcal{W} \in \mathcal{H}$ таковы, что

$$\|\mathcal{W}; \mathcal{H}\| = 1, \quad \|\mathcal{B}\mathcal{W} - b\mathcal{W}; \mathcal{H}\| = \tau \in (0, b). \quad (46)$$

Тогда на сегменте $[b - \tau, b + \tau]$ расположено хотя бы одно собственное число оператора $\mathcal{B}$.

При $\eta \in [0, 2\pi)$ введем в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma \cup \partial\theta_\varepsilon)$ специфическое скалярное произведение

$$\langle u, w \rangle_\eta = (\nabla_y u, \nabla_y w)_{\varpi(\varepsilon)} + ((\partial_z + i\eta)u, (\partial_z + i\eta)w)_{\varpi(\varepsilon)}. \quad (47)$$

Отметим, что соотношение

$$\|w; L_2(\varpi(\varepsilon))\|^2 \leq c_{\varpi} \langle w, w \rangle_{\eta}$$

обеспечено неравенством Фридрихса

$$\|v; L_2(\varpi(\varepsilon))\|^2 \leq c_{\varpi} \|\nabla_x v; L_2(\varpi(\varepsilon))\|^2, \quad v \in \mathring{H}^1(\varpi; \gamma), \quad (48)$$

примененным к функции $x \mapsto v(x) = \exp(iz)w(x)$, продолженной нулем на множество θ_{ε} .

Оператор $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta) = \mathring{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma \cup \partial\theta_{\varepsilon})$ со скалярным произведением (47), заданный формулой

$$\langle \mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)u, w \rangle_{\eta} = (u, w)_{\varpi(\varepsilon)}, \quad u, w \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta), \quad (49)$$

по понятным причинам оказывается самосопряженным, положительным и компактным. Следовательно, в силу теорем 9.2.1 и 10.2.2 [2] его спектр состоит из точки $\beta_0 = 0$ существенного спектра и бесконечно малой положительной последовательности собственных чисел

$$\beta_1^{\varepsilon}(\eta) \geq \beta_2^{\varepsilon}(\eta) \geq \dots \geq \beta_j^{\varepsilon}(\eta) \geq \dots$$

Благодаря определениям (49), (47) и интегральному тождеству [29]

$$\langle U^{\varepsilon}, V \rangle_{\eta} = \Lambda^{\varepsilon}(\eta)(U^{\varepsilon}, V)_{\varpi(\varepsilon)}, \quad V \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta), \quad (50)$$

обслуживающему спектральную задачу (21)–(23), собственные числа последней находятся по формуле

$$\Lambda_j^{\varepsilon}(\eta) = \beta_j^{\varepsilon}(\eta)^{-1}. \quad (51)$$

Сначала займемся обоснованием разложений (25) и (26) в точке (37). Положим в лемме 4

$$b_{\pm} = (l_{\pm})^{-1}, \quad \mathcal{W}_{\pm}(x) = \|\mathcal{U}_{\pm}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta + \psi\varepsilon)\|^{-1} \mathcal{U}_{\pm}(x), \quad (52)$$

где

$$l_{\pm} = \Lambda_{\pm}^0(\pi) + \varepsilon \Lambda'_{\pm}(\pi, \psi), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\pm}(x) &= X_{\varepsilon}(x)U_{\pm}^0(x; \pi, \psi) + (1 - X_{\varepsilon}(x))U_{\pm}^0(x^0; \pi, \psi) \\ &\quad + \chi(x)W_{\pm}(\varepsilon^{-1}(x - x^0); \pi, \psi) + \varepsilon X_{\varepsilon}(x)U'_{\pm}(x; \pi, \psi), \end{aligned} \quad (54)$$

причем $X_{\varepsilon}(x) = 1 - \chi_{\theta}(\varepsilon^{-1}(x - x^0))$ и $\chi_{\theta} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ – такая гладкая срезающая функция с компактным носителем, что $\chi_{\theta} = 1$ в окрестности множества $\bar{\theta}$. Благодаря свойствам срезов χ_{θ} и χ , а также определению (39) члена $W_{\pm}$ типа пограничного слоя, функции (54) обращаются в нуль на поверхности $\gamma \cup \partial\theta_{\varepsilon}$, а значит, $\mathcal{W}_{\pm} \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)$. Подчеркнем, что для сокращения обозначений в данном пункте не указываем явно зависимость величин (52) от параметра ψ .

Вычислим скалярные произведения

$$\langle \mathcal{U}_{\pm}, \mathcal{U}_{\phi} \rangle_{\pi + \psi\varepsilon} = (\nabla_y \mathcal{U}_{\pm}, \nabla_y \mathcal{U}_{\phi})_{\varpi(\varepsilon)} + ((\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{U}_{\pm}, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{U}_{\phi})_{\varpi(\varepsilon)},$$

в которых индекс ϕ принимает значения плюс и минус. Заметим, что

$$J_{\phi\pm} := (\nabla_y U_{\pm}^0, \nabla_y U_{\phi}^0)_{\varpi} + ((\partial_z + i\pi)U_{\pm}^0, (\partial_z + i\pi)U_{\phi}^0)_{\varpi} = (M_1 + \pi^2)(a^{\pm}, a^{\phi})_{\mathbb{C}^2}, \quad (55)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^2}$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$, и в силу формул (44)

$$(a^{\pm}, a^{\mp})_{\mathbb{C}^2} = 0, \quad 2 < (F^2 + 4\pi\psi^2)^{-1}(a^{\pm}, a^{\pm})_{\mathbb{C}^2} \leq 3. \quad (56)$$

Кроме того, при помощи соотношений (36), (28) и (56) находим

$$\begin{aligned} & |(X_{\varepsilon}U_{\pm}^0 + (1 - X_{\varepsilon})U_{\pm}^0(x^0; \pi, \psi), X_{\varepsilon}U_{\phi}^0 + (1 - X_{\varepsilon})U_{\phi}^0(x^0; \pi, \psi))_{\pi+\psi\varepsilon} - J_{\phi\pm}| \\ & \leq c(J_{\pm}J_{\phi} + J_{\pm} + J_{\phi}), \\ J_{\phi} & = \|(U_{\phi}^0 - U_{\phi}^0(x^0; \pi, \psi))\nabla_x X_{\varepsilon}; L_2(\varpi)\| + \|(1 - X_{\varepsilon})\nabla_x U_{\phi}^0; L_2(\varpi)\| \\ & \quad + \|(1 - X_{\varepsilon})U_{\phi}^0; L_2(\varpi)\| + \varepsilon|\psi|\|U_{\phi}^0; L_2(\varpi)\| \\ & \leq c(\varepsilon^{3/2} + \varepsilon|\psi|)(F^2 + 4\pi\psi^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (57)$$

При обработке норм учтено, что носители функций $\nabla_x X_{\varepsilon}$ и $1 - X_{\varepsilon}$ расположены в шаре радиусом $O(\varepsilon)$, и на этом шаре выполнено соотношение

$$|U_{\phi}^0(x; \pi, \psi) - U_{\phi}^0(x^0; \pi, \psi)| \leq c|x - x^0| \leq C\varepsilon.$$

Наконец, принимая во внимание поведение функции W_{ϕ} на бесконечности (см. формулы (39) и (30)) и включение $U'_{\phi} \in H^1(\varpi)$, находим

$$\begin{aligned} \|\chi W_{\phi}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\| & \leq c \left(\int_{c\varepsilon}^C \left(\varepsilon^{-2} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} + (1 + \varepsilon|\psi|)^2 \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} \right) r^2 dr \right)^{1/2} |a^{\phi}| \\ & \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \varepsilon^{1/2}|\psi|)(F^2 + 4\pi\psi^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\varepsilon\|X_{\varepsilon}U'_{\phi}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\| \leq \varepsilon c(1 + \varepsilon|\psi|)\|U'_{\phi}; H^1(\varpi)\| \leq c\varepsilon(1 + \varepsilon|\psi|)(F^2 + 4\pi\psi^2)^{1/2}.$$

Собирая полученные соотношения (55)–(58), подводим итог:

$$|\langle \mathcal{U}_{\pm}, \mathcal{U}_{\phi} \rangle_{\pi+\psi\varepsilon} - (M_1 + \pi^2)(a^{\pm}, a^{\phi})_{\mathbb{C}^2}| \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \varepsilon^{1/2}|\psi|)(F^2 + 4\pi\psi^2)^{1/2}. \quad (59)$$

Наложим ограничение

$$\varepsilon^{1/2}|\psi| \leq \psi_0. \quad (60)$$

Из формул (52), (53) и (59) вытекает, что при малых $\varepsilon > 0$ и $\psi_0 > 0$ верны неравенства

$$l_{\pm} \geq c_l > 0, \quad \|\mathcal{U}_{\pm}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\| \geq c_{\mathcal{U}}(F^2 + 4\pi^2\psi^2)^{1/2}, \quad c_{\mathcal{U}} > 0.$$

Теперь можно оценить величину τ из формулы (46). Имеем

$$\begin{aligned} \tau & = \|\mathcal{B}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\mathcal{W}_{\pm} - l_{\pm}\mathcal{W}_{\pm}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\| = \max |\langle \mathcal{B}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\mathcal{W}_{\pm} - l_{\pm}\mathcal{W}_{\pm}, \mathcal{Z} \rangle_{\pi+\psi\varepsilon}| \\ & = \|\mathcal{U}_{\pm}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\|^{-1} l_{\pm}^{-1} \max |l_{\pm} \langle \mathcal{B}^{\varepsilon}(\pi + \psi\varepsilon)\mathcal{U}_{\pm}, \mathcal{Z} \rangle_{\pi+\psi\varepsilon} - \langle \mathcal{U}_{\pm}, \mathcal{Z} \rangle_{\pi+\psi\varepsilon}| \\ & \leq c_{\mathcal{U}}^{-1} c_l^{-1} (F^2 + 4\pi^2\psi^2)^{-1/2} \max |T_{\pm}(\mathcal{Z})|, \end{aligned} \quad (61)$$

где максимум вычисляется по всем таким $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)$, что $\|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)\| = 1$, и, кроме того,

$$T_\pm(\mathcal{Z}) = (\Lambda_\pm^0(\pi) + \varepsilon\Lambda'_\pm(\pi, \psi))(\mathcal{U}_\pm, \mathcal{Z})_{\varpi(\varepsilon)} - (\nabla_y \mathcal{U}_\pm, \nabla_y \mathcal{Z})_{\varpi(\varepsilon)} - ((\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{U}_\pm, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_{\varpi(\varepsilon)}. \quad (62)$$

Подчеркнем, что одномерное неравенство Харди дает оценку

$$\| |x - x^0|^{-1} \mathcal{Z}; L_2(\varpi) \| \leq c \|\mathcal{Z}; H^1(\varpi)\| \leq C \|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)\| = C. \quad (63)$$

Здесь и далее постоянные в мажорантах не зависят от параметров $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\psi \in [-\varepsilon^{-1/2}\psi_0, \varepsilon^{-1/2}\psi_0]$ и пробной функции $\mathcal{Z}$, которая продолжена нулем на отверстие θ_ε .

Прибавим к величине (62) скалярные произведения

$$(\nabla_y U_\pm^0, \nabla_y \mathcal{Z})_\varpi + ((\partial_z + i\pi)U_\pm^0, (\partial_z + i\pi)\mathcal{Z})_\varpi - \Lambda_\pm^0(\pi)(U_\pm^0, \mathcal{Z})_{\varpi(\varepsilon)}, \quad (64)$$

$$(\nabla_x W_\pm, \nabla_x (\chi \mathcal{Z}))_\varpi, \quad (65)$$

$$\varepsilon(\nabla_y U'_\pm, \nabla_y \mathcal{Z})_\varpi + \varepsilon((\partial_z + i\pi)U'_\pm, (\partial_z + i\pi)\mathcal{Z})_\varpi - \varepsilon\Lambda_\pm^0(\pi)(U'_\pm, \mathcal{Z})_\varpi - \varepsilon\Lambda'_\pm(\pi, \psi) + i\varepsilon\psi((\partial_z U_\pm^0, \mathcal{Z})_\varpi - (U_\pm^0, \partial_z \mathcal{Z})_\varpi) - (\mathcal{F}, \mathcal{Z})_\varpi, \quad (66)$$

которые обращаются в нуль согласно определению членов асимптотических анзацев (26) и (25). В формуле (66) через $\mathcal{F}$ обозначено последнее слагаемое из правой части уравнения (40).

Поочередно обработаем слагаемые, оставшиеся в выражении (62) после указанной операции. Умножение главного члена $U_\pm^0$ на срезающую функцию приводит к таким остаточным членам:

$$\begin{aligned} & ((U_\pm^0 - U_\pm^0(x^0; \pi, \psi))\nabla_y X_\varepsilon, \nabla_y \mathcal{Z})_\varpi, \quad ((1 - X_\varepsilon)\nabla_y U_\pm^0, \nabla_y \mathcal{Z})_\varpi, \\ & ((U_\pm^0 - U_\pm^0(x^0; \pi, \psi))\partial_z X_\varepsilon, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\varpi, \\ & ((1 - X_\varepsilon)\partial_z U_\pm^0, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\varpi, \\ & i(\pi + \psi\varepsilon)((1 - X_\varepsilon)(U_\pm^0 - U_\pm^0(x^0; \pi, \psi)), (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\varpi, \\ & (\Lambda_\pm^0(\pi) + \varepsilon\Lambda'_\pm(\pi, \psi))((1 - X_\varepsilon)U_\pm^0, \mathcal{Z})_\varpi. \end{aligned} \quad (67)$$

Аналогично выкладкам (57) модули этих скалярных произведений меньше, чем

$$c\varepsilon^{3/2}(F^2 + 4\pi^2\psi^2)^{1/2}\|\mathcal{Z}; H^1(\varpi)\|; \quad (68)$$

отметим, что для пятого показатель степени параметра ε можно увеличить с $3/2$ до $5/2$. Кроме того, остается член, в силу требования (60) удовлетворяющий неравенству

$$\begin{aligned} |(i\varepsilon\psi X_\varepsilon U_\pm^0, i\varepsilon\psi \mathcal{Z})_\varpi| & \leq c\varepsilon^2\psi^2(F^2 + 4\pi^2\psi^2)^{1/2}\|\mathcal{Z}; L_2(\varpi)\| \\ & \leq c\varepsilon^{3/2}|\psi|(F^2 + 4\pi^2\psi^2)^{1/2}\|\mathcal{Z}; L_2(\varpi)\| \end{aligned} \quad (69)$$

и происходящий от возмущения (37) точки $\eta = \pi$. Отметим, что в предпоследнем выражении (66) учтены “перекрестные члены”, отсутствующие в формулах (69) и (64).

Асимптотическая поправка $U'_\pm$ гладкого типа порождает большее количество слагаемых, однако они оцениваются просто благодаря дополнительному множителю ε . Именно, в силу замечания 2 и согласно упоминавшемуся расположению носителей функций $|\nabla_y X_\varepsilon|$ и $1 - X_\varepsilon$ модули аналогичных (67) скалярных произведений

$$\begin{aligned} & \varepsilon(U'_\pm \nabla_y X_\varepsilon, \nabla_y \mathcal{Z})_\omega, \quad \varepsilon((1 - X_\varepsilon) \nabla_y U'_\pm, \nabla_y \mathcal{Z})_\omega, \\ & \varepsilon(U'_\pm \partial_z X_\varepsilon, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\omega, \quad \varepsilon((1 - X_\varepsilon) \partial_z U'_\pm, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\omega, \\ & i(\pi + \psi\varepsilon) \varepsilon((1 - X_\varepsilon) U'_\pm, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\omega, \\ & \varepsilon(\Lambda'_\pm(\pi) + \varepsilon \Lambda'_\pm(\pi, \psi))((1 - X_\varepsilon) U'_\pm, \mathcal{Z})_\omega \end{aligned}$$

не превосходят величины (68). Выражения

$$\varepsilon|(i\varepsilon\psi X_\varepsilon U'_\pm, \partial_z \mathcal{Z})_\omega|, \quad \varepsilon|(\partial_z(X_\varepsilon U'_\pm), i\varepsilon\psi \mathcal{Z})_\omega|, \quad \varepsilon|(i\varepsilon\psi X_\varepsilon U'_\pm, i\varepsilon\psi \mathcal{Z})_\omega|$$

приобретают мажоранту, указанную в неравенстве (69). Наконец, согласно (43) и (60) мажоранта (68) годится для еще одного слагаемого $\varepsilon^2 \Lambda'_\pm(\pi, \psi)(U'_\pm, \mathcal{Z})_\omega$.

Осталось проанализировать вклад асимптотического члена типа пограничного слоя. В соответствии с формулами (39) и (30) положим

$$W_\pm(\xi; \pi, \psi) = W_\pm^0(\xi; \pi, \psi) + \widetilde{W}_\pm(\xi; \pi, \psi); \quad (70)$$

здесь $W_\pm^0(\xi; \pi, \psi) = \varepsilon W_\pm^0(x - x^0; \pi, \psi)$ и остаток $\widetilde{W}_\pm(\xi; \pi, \psi)$ допускает оценки (30). При учете неравенства Харди (63) и соотношений (43), (30) имеем

$$\begin{aligned} & |\Lambda'_\pm(\pi)(\chi \widetilde{W}_\pm, \mathcal{Z})_\omega + \varepsilon \Lambda'_\pm(\pi, \psi)(\chi W_\pm, \mathcal{Z})_\omega| \\ & \leq c \left(\int_{c\varepsilon}^C r^2 \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} r^2 dr + \varepsilon^2 (1 + \psi^2) \int_{c\varepsilon}^C r^2 \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \right)^{1/2} \\ & \quad \times (F^2 + 4\pi^2 \psi^2) \| |x - x^0|^{-1} \mathcal{Z}; L_2(\omega) \| \\ & \leq c \varepsilon^2 (1 + |\psi|) (F^2 + 4\pi^2 \psi^2)^{1/2} \| \mathcal{Z}; H^1(\omega) \|. \end{aligned} \quad (71)$$

Заметим, что

$$W_\pm(\varepsilon(x - x^0); \pi, \psi) = O(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \widetilde{W}_\pm(\varepsilon(x - x^0); \pi, \psi) = O(\varepsilon^2)$$

на носителях производных срезки χ , которые обращаются в нуль на фиксированной окрестности точки $x = x^0$. Следовательно, такие же соображения, как и ранее, устанавливают, что модули разностей

$$\begin{aligned} & (\widetilde{W}_\pm \nabla_y \chi, \nabla_y \mathcal{Z})_\omega - (\nabla_y \widetilde{W}_\pm, \mathcal{Z} \nabla_y \chi)_\omega, \\ & (\widetilde{W}_\pm \partial_z \chi, (\partial_z + i\pi)\mathcal{Z})_\omega - ((\partial_z + i\pi)\widetilde{W}_\pm, \mathcal{Z} \partial_z \chi)_\omega, \\ & i\psi \varepsilon(\chi W_\pm, (\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\mathcal{Z})_\omega - i\psi \varepsilon((\partial_z + i(\pi + \psi\varepsilon))\chi W_\pm, \mathcal{Z})_\omega, \end{aligned} \quad (72)$$

не превосходят правой части (71). Подчеркнем, что во всех обработанных скалярных произведениях замена $W_\pm \mapsto \widetilde{W}_\pm$, сопровождающаяся улучшением оценки, стала возможной благодаря введению во фрагмент $\mathcal{F}$ правой части уравнения (40) соответствующих выражений с главным членом $W_\pm^0$ разложения (70) на месте остатка $\widetilde{W}_\pm$. Величины (72) возникли в результате переноса срезающей функции χ

в скалярном произведении $(\nabla_y(\chi W_\pm), \nabla_y \mathcal{Z})_\varpi$ от члена $W_\pm$ типа пограничного слоя к пробной функции $\mathcal{Z}$, а полученное скалярное произведение (65) равно нулю, так как $W_\pm$ – гармоническая функция и $\mathcal{Z} = 0$ на $\partial\theta_\varepsilon$.

Собирая приведенные неравенства, обнаруживаем, что величина τ , фигурирующая в формулах (61) и (46), подчинена соотношению

$$\tau \leq c_{\mathcal{W}}^{-1} c_l^{-1} (F^2 + 4\pi^2 \psi^2)^{-1/2} c \varepsilon^{3/2} (1 + \varepsilon^{1/2} \psi) (F^2 + 4\pi^2 \psi^2)^{1/2} \|\mathcal{Z}; H^1(\varpi)\| \leq C \varepsilon^{3/2},$$

в котором множитель C не зависит от параметров ε и ψ при ограничениях $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и (60).

Итак, лемма 4 показывает, что оператор $\mathcal{B}^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)$ имеет, по крайней мере, два собственных числа $\beta_\pm(\pi + \psi\varepsilon)$, удовлетворяющих формуле

$$|\beta_\pm(\pi + \psi\varepsilon) - l_\pm^{-1}| \leq C \varepsilon^{3/2}. \quad (73)$$

В силу определения (53) и связи (51) спектральных параметров формула (73) равносильна формуле

$$|\Lambda_\pm^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon) - \Lambda_\pm^0(\pi) - \varepsilon \Lambda'_\pm(\pi, \psi)| \leq C \varepsilon^{3/2} \Lambda_\pm^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon) |\Lambda_\pm^0(\pi) + \varepsilon \Lambda'_\pm(\pi, \psi)|,$$

которая в свою очередь при малом ε_0 и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ превращается в такую:

$$|\Lambda_\pm^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon) - \Lambda_\pm^0(\pi) - \varepsilon \Lambda'_\pm(\pi, \psi)| \leq 4C(M_1 + \pi^2)^2 \varepsilon^{3/2}. \quad (74)$$

Поскольку $\Lambda'_+(\pi, \psi) - \Lambda'_-(\pi, \psi) \geq 2F$, опять-таки при малых $\varepsilon_0 > 0$ и $\psi_0 > 0$ собственные числа $\Lambda_+^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)$ и $\Lambda_-^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)$ не могут совпадать. Осталось вспомнить (см. также замечание 7), что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $|\eta - \pi| < \psi_0$ на интервале (45) расположено только два собственных числа задачи (21)–(23).

ТЕОРЕМА 5. *Существуют такие положительные числа ε_0 , ψ_0 и C , что при условиях (60) и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ сингулярно возмущенная задача (21)–(23) с параметром $\eta = \pi + \psi\varepsilon$ имеет на интервале (45) в точности два собственных числа $\Lambda_\pm^\varepsilon(\pi + \psi\varepsilon)$, и для этих чисел верны оценки (74).*

Если параметр $\eta \in [0, 2\pi)$ удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon^{1/2} \psi_0 \leq |\eta - \pi| < \eta_0, \quad (75)$$

то собственные числа задачи (21)–(23), обладающие асимптотикой (26) с поправкой (35) и остатком $\tilde{\Lambda}_\pm^\varepsilon(\eta) = O(\varepsilon^{3/2})$, при малом $\varepsilon > 0$ заведомо сохраняют простоту, так как

$$\begin{aligned} & |\Lambda_+^0(\eta) + \varepsilon \Lambda'_+(\eta) - \Lambda_-^0(\eta) - \varepsilon \Lambda'_-(\eta)| \\ & = |M_1 + \eta^2 - M_1 - (2\pi - \eta)^2| = 4\pi|\eta - \pi| \geq 4\pi\varepsilon^{1/2}\psi_0. \end{aligned}$$

Объявленные оценки остатков проверяются по прежней схеме, но с некоторыми упрощениями, вызванными простотой собственных чисел, – ограничимся формулировкой результата.

ТЕОРЕМА 6. Пусть величина η_0 зафиксирована так, как указано перед формулой (45). Существуют такие положительные числа ε_0 , ψ_0 и C , что при условиях (75) и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (21)–(23) с параметром $\eta = \pi + \psi\varepsilon$ имеет на интервале (45) в точности два собственных числа $\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\eta)$, и эти числа подчинены соотношению

$$|\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\eta) - M_1 - (\eta + \pi \mp \pi)^2 - \varepsilon \Lambda'_{\pm}(\eta)| \leq C\varepsilon^{3/2},$$

где $\Lambda'_{\pm}(\eta)$ – поправка (35).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Утверждение о количестве собственных чисел (24) сингулярно возмущенной задачи на ячейке $\varpi(\varepsilon)$ может быть получено разными способами. Реализуем простейший, обеспечивающий так называемую теорему о сходимости. Пусть $|\eta - \pi| < \eta_0$ и U^{ε} – собственная функция задачи (21)–(23), отвечающая какому-то собственному числу $\Lambda^{\varepsilon}(\eta)$ из интервала (45), продолженная нулем на отверстие $\bar{\theta}_{\varepsilon}$, нормированная в $L_2(\varpi(\varepsilon))$ и ортогональная другим собственным функциям в этом гильбертовом пространстве. В силу неравенства Фридрихса (48) и интегрального тождества (50) находим

$$\|U^{\varepsilon}; H^1(\varpi(\varepsilon))\|^2 \leq c_{\varpi} \langle U^{\varepsilon}, U^{\varepsilon} \rangle_{\eta} = \Lambda^{\varepsilon}(\eta) \|U^{\varepsilon}; L_2(\varpi)\|^2 \leq \min\{M_1 + 4\pi^2, M_2\},$$

а значит, вдоль некоторой бесконечно малой положительной последовательности $\{\varepsilon_q\}$ имеют место сходимости $\Lambda^{\varepsilon_q}(\eta) \rightarrow \Lambda^0(\eta)$ и

$$U^{\varepsilon_q}(\cdot, \eta) \rightarrow U^0(\cdot, \eta) \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma) \quad \text{слабо в } \dot{H}^1(\varpi; \gamma) \text{ и сильно в } L_2(\varpi).$$

Таким образом, предел U^0 сохраняет нормировку и ортогональность другим таким пределам в пространстве $L_2(\varpi)$, а предельный переход в интегральном тождестве (50) с пробной функцией $V \in C_{\text{c, per}}^{\infty}(\bar{\varpi} \setminus (\gamma \cup x^0))$ (обозначение понятно) приводит к интегральному тождеству

$$(\nabla_y U^0, \nabla_y V)_{\varpi} + ((\partial_z + i\eta)U^0, (\partial_z + i\eta)V)_{\varpi} = \Lambda^0(\eta)(U^0, V)_{\varpi}.$$

Поскольку линейал $C_{\text{c, per}}^{\infty}(\bar{\varpi} \setminus (\gamma \cup x^0))$ плотен в пространстве $\dot{H}_{\text{per}}^1(\varpi; \gamma)$, видим, что $\Lambda^0(\eta)$ и $U^0(\cdot, \eta) \neq 0$ – собственное число и функция задачи на цилиндрической ячейке. Теперь нужное утверждение вытекает из упомянутой ортогональности пределов в пространстве $L_2(\varpi)$, означающей сохранение полной кратности спектра.

Рассуждения, приведенные в замечании 7, показывают, что при $\eta \in [0, \pi - \eta_0) \cup (\pi + \eta, 2\pi)$ собственные числа оказываются малыми возмущениями собственных чисел $M_k + (\eta + \pi \mp \pi)^2$ и потому не могут перекрыть лауну, обнаруженную в теореме 5. Это наблюдение обеспечивает основное утверждение данного пункта.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнено требование (18) (см. комментарии к этой формуле). При любом сингулярном возмущении (20) цилиндрической ячейки $\varpi = \omega \times (0, 1)$ найдется такое положительное число ε_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ непрерывный спектр (5) задачи (3) в периодическом волноводе $\Pi(\varepsilon)$, определенном согласно равенству (4) по ячейке $\varpi(\varepsilon)$, после первого сегмента Υ_1 образуется лакуна шириной

$$8\pi\varepsilon C_{\theta} |V_1(y^0)|^2 + O(\varepsilon^2),$$

где C_θ – гармоническая емкость множества $\bar{\theta}$ (см. разложение (30)), а V_1 – нормированная в $L_2(\omega)$ первая собственная функция задачи Дирихле (2) на сечении ω цилиндрического волновода $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$.

5. Регулярное возмущение цилиндрической ячейки. Пусть сечение ω ограничено простым гладким контуром $\Gamma = \partial\omega$, в окрестности $\mathcal{N}$ которого введем систему криволинейных координат (n, s) , где n – ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ внутри пограничной полосы $\omega \cap \mathcal{N}$, а s – длина дуги на контуре. Введем функцию $H \in C_{\text{per}}^\infty(\Gamma \times [0, 1])$, 1-периодическую по переменной z и гладкую, а также возмущенную ячейку (см. рис. 3)

$$\varpi(\varepsilon) = (\varpi \setminus \mathcal{N}) \cup \{x \in \mathcal{N} : n\varepsilon < H(s, z)\}, \quad (76)$$

причем параметр $\varepsilon > 0$ возьмем достаточно малым. Область (76) следует интерпретировать как регулярное возмущение цилиндрической ячейки $\varpi = \omega \times (0, 1)$.

При помощи формулы (4) определим по ячейке (76) квазицилиндр $\Pi(\varepsilon)$ и рассмотрим спектральную задачу (21)–(23). Построим асимптотику собственных чисел $\Lambda_\pm^\varepsilon(\pi + \varepsilon\psi)$, расположенных в окрестности точки пересечения двух нижних ветвей на рис. 4, т.е. попадающих на интервал (45) и допускающих то же представление (25), что и в случае сингулярного возмущения. При регулярном возмущении границы характерен такой асимптотический анзац для собственных функций:

$$U_\pm^\varepsilon(x; \pi + \varepsilon\psi) = U_\pm^0(x; \pi, \psi) + \varepsilon U_\pm'(x; \pi, \psi) + \tilde{U}_\pm^\varepsilon(x; \pi + \varepsilon\psi). \quad (77)$$

Здесь $U_\pm^0$ – линейная комбинация (38), а собственная функция V_1 считается гладко продолженной за пределы области ω .

Сохраним обозначения $U_\pm^0$ и $\mathbf{U}_\pm$ для функций (38) и (28), записанных в криволинейных координатах. Благодаря условиям Дирихле (9) и формуле Тейлора обнаруживаем, что главная часть невязки в краевом условии (22) на поверхности $\partial\varpi(\varepsilon) \setminus (\bar{\gamma}_0 \cup \bar{\gamma}_1)$ принимает вид

$$U^0(\varepsilon H(s, z), s, z; \pi) = \varepsilon H(s, z) \partial_n U_\pm^0(0, s, z; \pi, \psi) + O(\varepsilon^2), \quad (78)$$

где ∂_n – производная вдоль внешней нормали. Напомним (см., например, [1]), что в силу принципа максимума для первой (положительной) собственной функции V_1 задачи Дирихле (2) выполнено соотношение

$$\partial_n V_1(0, s) < 0, \quad s \in \Gamma. \quad (79)$$

Поправочные слагаемые в представлениях (25) и (77) удовлетворяют аналогичному (40) уравнению, но без последнего члена, порожденного пограничным слоем:

$$\begin{aligned} L(\nabla_x; \pi) U_\pm'(x; \pi, \psi) - \Lambda_\pm^0(\pi) U_\pm'(x; \pi, \psi) \\ = \Lambda'(\pi, \psi) U_\pm^0(x; \pi, \psi) + 2i\psi(\partial_z + \pi i) U_\pm^0(x; \pi, \psi), \quad x \in \varpi. \end{aligned} \quad (80)$$

Подставив соотношения (77), (78) в краевое условие (22) и выделив члены порядка ε , формируем краевое условие для асимптотической поправки

$$U_\pm'(0, s, z; \pi, \psi) = -H(s, z) \partial_n U_\pm^0(0, s, z; \pi, \psi), \quad (s, z) \in \Gamma \times (0, 1). \quad (81)$$

Разумеется, на торцах ячейки ϖ назовем условия периодичности (10).

В силу равенств (41) условия разрешимости задачи (80), (81), (10)

$$\begin{aligned} \Lambda'(\pi, \psi) \int_{\varpi} \overline{U_{\phi}(x)} U_{\pm}^0(x; \pi, \psi) dy dz + 2i\psi \int_{\varpi} \overline{U_{\phi}(x)} (\partial_z + \pi i) U_{\pm}^0(x; \pi, \psi) dy dz \\ + \int_0^1 \int_{\partial\omega} \overline{\partial_n U_{\phi}(0, s, z)} H(s, z) \partial_n U_{\pm}^0(0, s, z; \pi, \psi) ds dz = 0, \quad \phi = \pm, \end{aligned}$$

принимают вид системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Lambda'(\pi, \psi) a_1^{\pm}(\psi) + 2\pi\psi a_1^{\pm}(\psi) + F_0 a_1^{\pm}(\psi) + F_1 a_2^{\pm}(\psi) &= 0, \\ \Lambda'(\pi, \psi) a_2^{\pm}(\psi) - 2\pi\psi a_2^{\pm}(\psi) + \overline{F_1} a_1^{\pm}(\psi) + F_0 a_2^{\pm}(\psi) &= 0, \end{aligned}$$

в которой

$$F_k = \int_0^1 \exp(-2\pi i k z) \int_{\partial\omega} H(s, z) |\partial_n V_1(0, s)|^2 ds dz, \quad k = 0, 1. \quad (82)$$

Решая систему, находим

$$\Lambda'_{\pm}(\pi, \psi) = -F_0 \pm \sqrt{|F_1|^2 + 4\pi^2 \psi^2}. \quad (83)$$

Нетрудно усмотреть, что в случае

$$F_1 \neq 0 \quad (84)$$

формула (83) для асимптотической поправки в представлении (25) собственного числа $\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\pi + \varepsilon\psi)$ устанавливает раскрытие лакуны в непрерывном спектре оператора задачи (3) при малом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

При условии (84) обоснование полученных асимптотических формул проводится по той же схеме, что и в п. 4, но со значительным упрощением выкладок. Подчеркнем, что замена координат $x \mapsto ((1 + \sigma\varepsilon)^{-1}y, z)$ с подходящим коэффициентом σ помещает область (76) внутрь цилиндрической ячейки ϖ и позволяет дословно повторить замечание 7. Поэтому ограничимся формулировкой утверждения об открытии лакуны, аналогичного теореме 8 в случае сингулярного возмущения.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены требования (18) и (84). При регулярном возмущении (76) цилиндрической ячейки $\varpi = \omega \times (0, 1)$ найдется такое положительное число ε_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ непрерывный спектр (5) задачи (3) в периодическом волноводе $\Pi(\varepsilon)$, определенном согласно равенству (4) по ячейке $\varpi(\varepsilon)$, после первого сегмента Υ_1 имеет лакуну шириной $\varepsilon|F_1| + O(\varepsilon^2)$; здесь F_1 – ненулевая (по предположению) величина (82), найденная по профилю H возмущения поверхности $\gamma = \partial\gamma \times (0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если функция $H \neq 0$ неотрицательна (неположительна) при всех $(s, z) \in \Gamma \times (0, 1)$, то возмущенная ячейка (76) содержит в себе цилиндрическую ячейку ϖ (содержится в ϖ), а значит, справедливо неравенство $\Lambda_p^{\varepsilon}(\eta) \leq \Lambda_p^0$ (неравенство (36)). Понятно, что согласно определению (82) и формуле (79) верны соотношения

$$\pm F_0 > 0, \quad |F_1| \leq \pm F_0 \quad \text{при} \quad \pm H(s, z) \geq 0, \quad H \neq 0.$$

Эти соотношения позволяют при регулярном возмущении (76) сделать такие же выводы, как и в замечании 3 для случая сингулярного возмущения (20).

6. Обсуждение. В случае ячейки

$$\varpi(\varepsilon) = \varpi \setminus \bigcup_{j=1}^J \bar{\theta}_\varepsilon^{(j)} \quad (85)$$

с несколькими малыми полостями $\theta_\varepsilon^j = \{x : \varepsilon^{-1}(x - x^{(j)}) \in \theta^j\}$, порожденными открытыми множествами $\theta^{(j)}$ с компактными замыканиями и точками $x^j \neq x^k$ при $j, k = 1, \dots, J$, $j \neq k$ изменяется вид асимптотической поправки $\Lambda'_\pm(\pi, \psi)$. Рассмотрим ячейку, возмущенную двумя $J = 2$ полостями, причем положим $x^{(1)} = (y^{(1)}, 0)$, $x^{(2)} = (y^{(2)}, z^{(2)})$. Тогда повторение с незначительными изменениями выкладок из п. 3 приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Lambda'_\pm(\pi, \psi) a_1^\pm(\psi) &= 2\pi\psi a_1^\pm(\psi) + 4\pi C_\theta^{(1)} |V_1(y^{(1)})|^2 (a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi)) \\ &\quad + 4\pi C_\theta^{(2)} |V_1(y^{(2)})|^2 (a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi) \exp(-2\pi i z^{(2)})), \\ \Lambda'_\pm(\pi, \psi) a_2^\pm(\psi) &= -2\pi\psi a_2^\pm(\psi) + 4\pi C_\theta^{(1)} |V_1(y^{(1)})|^2 (a_1^\pm(\psi) + a_2^\pm(\psi)) \\ &\quad + 4\pi C_\theta^{(2)} |V_1(y^{(2)})|^2 (a_1^\pm(\psi) \exp(2\pi i z^{(2)}) + a_2^\pm(\psi)), \end{aligned} \quad (86)$$

где $C_\theta^{(j)}$ – гармоническая емкость множества $\bar{\theta}^{(j)}$. Решая простую спектральную задачу (86), обнаруживаем, что собственные числа $\Lambda'_\pm(\pi, \psi)$ приобретают вид (83), причем

$$\begin{aligned} F_0 &= 4\pi (C_\theta^{(1)} |V_1(y^{(1)})|^2 + C_\theta^{(2)} |V_1(y^{(2)})|^2) > 0, \\ F_1 &= 4\pi \left(\sum_{j=1}^2 |C_\theta^{(j)}|^2 |V_1(y^{(j)})|^4 + 2C_\theta^{(1)} C_\theta^{(2)} |V_1(y^{(1)})|^2 |V_1(y^{(2)})|^2 \cos(2\pi z^{(2)}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Как и в п. 5, при $F_1 > 0$ все выводы о раскрытии лакуны остаются в силе.

Если величина F_1 из формул (82), (83) равна нулю, то асимптотическое представление собственных чисел приобретает вид

$$\Lambda_\pm^\varepsilon(\eta + \varepsilon\psi) = -F_0 \pm 2\pi\varepsilon|\psi| + \dots,$$

и на первый взгляд кажется, что реализуется ситуация, изображенная на рис. 5, b, т.е. лакуна не наблюдается. Это впечатление ошибочно, так как все еще может образоваться лакуна шириной $O(\varepsilon^N)$ с показателем $N \geq 2$, для обнаружения которой требуются младшие члены асимптотических разложений. Иными словами, асимптотический анализ способен достоверно идентифицировать лакуну, но для проверки ее отсутствия нужны иные соображения.

Укажем два предельно простых случая возмущения цилиндрического волновода Ω , не приводящего к открытию лакуны около точки $M_1 + \pi^2$. Во-первых, при профильной функции H , не зависящей от переменной z , волновод с ячейкой (76) остается цилиндрическим и его спектр заполняет целый луч $[\lambda^\dagger(\varepsilon), +\infty)$. Во-вторых, при замене (18) противоположным неравенством

$$M_2 < M_1 + \pi^2, \quad (87)$$

возмущения двух собственных чисел

$$\Lambda_\pm^{0,2}(\eta) = M_2 + (\eta - \pi \pm \pi)^2,$$

изображенных на рис. 6 пунктирной линией (ср. формулу (27) и рис. 5, а), перекроют промежуток, образовавшийся между возмущенными собственными числами $\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\eta)$ (рис. 5, с), и лакуна не появится. Точно так же промежуток, появляющийся при возмущении двукратного собственного числа, отмеченного жирной точкой на рис. 6, будет перекрыт первыми ветвями, и скорее всего непрерывный спектр окажется сплошным.

Напомним, что согласно комментариям к формулам (18) и (19) неравенство (87) имеет место при редком расположении полостей. Однако возникновение дополнительных полостей в ячейке (85) может искусственно уменьшить период и привести к условию (87) при замене (19) с множителем $h \in \{2, 3, \dots\}$. Так может произойти, например, в ситуации

$$\theta^{(1)} = \theta^{(2)}, \quad x^{(1)} = (y^{(1)}, 0), \quad x^{(2)} = \left(y^{(2)}, \frac{1}{2}\right),$$

в которой $\cos(2\pi z^{(2)}) = -1$ и $F_1 = 0$. Отмеченная невозможность идентифицировать лакуну вполне согласуется со сказанным после формулы (87).

Рис. 6. Ситуация, обеспечивающая перекрытие лакуны другой ветвью

В случае

$$M_2 = \dots = M_{\varkappa+1} = M_1 + \pi^2,$$

где $\varkappa \in \mathbb{N}$ — кратность собственного числа M_2 задачи (2), лакуна открывается, но ее размер может варьироваться значительно. Дело в том, что $\Lambda_2^{\varepsilon}(\eta) > \Lambda_2^0(\eta)$ при малом $\eta \geq 0$, т.е. поднятие ветви $M_2 + \eta^2$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ сохраняет, по крайней мере, часть лакуны, указанной на рис. 5, с. Вместе с тем, асимптотический анализ [24] (см. также [12; гл. 9]) гарантирует формулу

$$\Lambda_2^{\varepsilon}(\eta) - \Lambda_2^0(\eta) \geq c\varepsilon, \quad c > 0,$$

лишь при дополнительном требовании $\varkappa = 1$, $V_2(y^0) \neq 0$. Если же $\varkappa \in \{1, 2\}$, $V_2(y^0) = 0$, $|\nabla_x V_2(y^0)| > 0$ (при надлежащем выборе собственной функции V_2 в случае $\varkappa = 2$), общая асимптотическая процедура [26] показывает, что

$$\Lambda_2^{\varepsilon}(\eta) = \Lambda_2^0(\eta) + C(\eta)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad \eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

и обеспечивает лакуну с шириной $O(\varepsilon^3)$. При $\varkappa > 2$ ширина лакуны может еще более уменьшиться.

Сингулярные возмущения (20) и (85) ячейки ϖ всегда приводят к уменьшению ее объема, однако результат теоремы 8 для регулярного возмущения боковой поверхности показывает, что открытие лакуны никак не соотносится с увеличением или уменьшением объема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.
- [3] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [4] A. Figotin, P. Kuchment, “Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. I. Scalar model”, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:1 (1996), 68–88; “Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. II. Two-dimensional photonic crystals”, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:6 (1996), 1561–1620.
- [5] E. L. Green, “Spectral theory of Laplace–Beltrami operators with periodic metrics”, *J. Differential Equations*, **133**:1 (1997), 15–29.
- [6] R. Hempel, K. Lienau, “Spectral properties of periodic media in the large coupling limit”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:7–8 (2000), 1445–1470.
- [7] L. Friedlander, “On the density of states of periodic media in the large coupling limit”, *Comm. Partial Differential Equations*, **27**:1–2 (2002), 355–380.
- [8] N. Filonov, “Gaps in the spectrum of the Maxwell operator with periodic coefficients”, *Comm. Math. Phys.*, **240**:1–2 (2003), 161–170.
- [9] В. В. Жиков, “О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами”, *Алгебра и анализ*, **16**:5 (2004), 34–58.
- [10] П. А. Кучмент, “Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных”, *УМН*, **37**:4 (1982), 3–52.
- [11] P. Kuchment, “The mathematics of photonic crystals”, *Mathematical Modeling in Optical Science*, Frontiers Appl. Math., **22**, SIAM, Philadelphia, PA, 2001, 207–272.
- [12] V. Maz’ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains*, v. I, Oper. Theory Adv. Appl., **111**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [13] И. М. Гельфанд, “Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **73** (1950), 1117–1120.
- [14] М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР, **171**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1985.
- [15] P. Kuchment, *Floquet Theory for Partial Differential Equations*, Oper. Theory Adv. Appl., **60**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [16] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.
- [17] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [18] С. А. Назаров, “Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 101–112.
- [19] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1963, 219–292.
- [20] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками”, *Math. Nachr.*, **76** (1977), 29–60.

- [21] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **81** (1978), 25–82.
- [22] С. А. Назаров, “Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов”, *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142.
- [23] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, Math. Surveys Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [24] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 347–371.
- [25] S. A. Nazarov, “Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **27**:6 (1993), 777–799.
- [26] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов”, Тр. СПбМО, **6**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 151–212.
- [27] Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962.
- [28] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
- [29] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [30] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122.

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург

E-mail: serna@snark.ipme.ru, srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило

18.08.2008