Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ниукканен, Распространение принципа факторизации на гипергеометрические ряды общего вида, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 573–581

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm872>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:43:36

УДК 517.588+519.68

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИНЦИПА ФАКТОРИЗАЦИИ НА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ОБЩЕГО ВИДА

А. В. Ниукканен

Показано, что формулы операторной факторизации гипергеометрических функций, полученные в предыдущих работах автора, допускают распространение на гипергеометрические ряды наиболее общего вида. Такое обобщение не приводит к усложнению технического аппарата метода факторизации. В качестве примера, иллюстрирующего практическую эффективность полученных в работе формул, дан анализ трансформационных свойств горновского ряда G_3 , имеющего типичную для общих гипергеометрических функций структуру. Показано, что формула преобразования Эрдейи, связывающая ряд G_3 с функцией Аппеля F_2 , содержит ошибочные выражения в аргументах ряда G_3 . Найден правильный аналог формулы Эрдейи и приведены некоторые новые преобразования ряда G_3 .

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Как показано в [1]–[3], применение метода операторной факторизации значительно облегчает исследование свойств многих гипергеометрических функций. Основная идея метода факторизации состоит во введении простой дифференциальной операции (именуемой далее операцией Ω -умножения) над функциями $u(x_1, \dots, x_N)$, $v(x_1, \dots, x_N)$:

$$\langle u * v \mid x_1, \dots, x_N \rangle = u \left(\frac{d}{ds_1}, \dots, \frac{d}{ds_N} \right) v(x_1 s_1, \dots, x_N s_N) \Big|_{s_1 = \dots = s_N = 0},$$

позволяющей выражать сложные гипергеометрические ряды через гипергеометрические функции более простого вида и использовать свойства последних для анализа свойств исходных гипергеометрических функций. Обозначим через ${}^N F[D; x_1, \dots, x_N]$ произвольный степенной ряд от N переменных $x_1, \dots, x_N$ с коэффициентами $D(i) \equiv D(i_1, \dots, i_N)$, где $i = (i_1, \dots, i_N)$ – множество переменных суммирования ряда ${}^N F$. Основное содержание принципа факторизации заключается в утверждении: если $D(i) = D_1(i) D_2(i)$, то ${}^N F[D] \equiv {}^N F[D_1 \times D_2] = {}^N F[D_1] * {}^N F[D_2]$ (свойство Ω -представимости операции умножения коэффициентов степенного ряда). Будем называть такую операторную редукцию (связывающую ряды от *одинакового* числа переменных) *общей редукцией* или *редукцией* (N, N) -типа.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 97-01-00317).

В случае общего *гипергеометрического* ряда ${}^N F$ для каждого из сомножителей $D_k(i)$, входящих в произведение $D(i)$, выполняется *специальное условие* “спектральной представимости” $D_k(i) = L_k(\mathbf{m} \cdot \mathbf{i})$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{i} \equiv m_1 i_1 + \dots + m_N i_N$, где $L_k(I)$ – некоторая функция от *одного* переменного, а $m_1, \dots, m_N$ – произвольные целые числа, именуемые далее *спектральными параметрами ряда* ${}^N F$. Как показано в [2], в случае $m_1 \geq 0, \dots, m_N \geq 0$ для “спектрально представимого” ряда ${}^N F$ наряду с общей редукцией (N, N) -типа имеет место специальная операторная редукция $(N, 1)$ -типа, выражающая ряд ${}^N F$ в виде Ω -произведения более простого ряда от N переменных и ряда ${}^1 F[L_k]$ от одного переменного. Специальные формулы факторизации играют важную роль в операторной теории гипергеометрических функций, так как позволяют осуществить “глобальную редукцию” ряда к гипергеометрическим функциям от одного переменного.

Условие неотрицательности спектральных параметров, использованное в [2] для доказательства специальных формул редукции, существенно ограничивает область применимости метода факторизации, так как многие типы гипергеометрических рядов (например, 19 из 34 функций Горна [4], большинство тройных рядов Шриваштавы и Карлссона [5], гипергеометрические функции Гельфанда, Граева и Ретаха [6]–[8] и т.д. содержат не только положительные, но и отрицательные спектральные индексы.

В настоящей заметке показано, что существование обобщенной операции Ω -умножения, применимой к рядам с *произвольными* целыми спектральными индексами и не противоречащей первоначальному определению гипергеометрических рядов общего вида, в некотором смысле завершающее построение “операторной теории” гипергеометрических функций, не сопровождается усложнением технического аппарата метода, так как основные алгебраические свойства операции Ω -умножения сохраняются при переходе к обобщенному случаю. Это позволяет применить для исследования сложных гипергеометрических функций простые и эффективные правила операторного исчисления, которые были применены ранее [1]–[3] для анализа функций более простого вида. В качестве иллюстрации этого утверждения в заметке дан вывод некоторых формул преобразования горновского ряда G_3 , содержащего два индефинитных спектральных набора, и проведено сравнение полученных результатов с литературными данными, требующими применения значительно более сложных методов.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, введем удобные обозначения для общих гипергеометрических рядов и поясним некоторые свойства и определения, используемые в дальнейшем.

2. Общие гипергеометрические ряды: обозначения, определения, элементарные свойства. За исключением символа $\mathbf{d}$ все остальные “векторные” символы используем далее либо для обозначения N -компонентных наборов, связанных с переменными суммирования ряда ${}^N F$, либо для обозначения числовых величин, связанных с такими наборами. Например, для обозначения наборов величин $i_n, x_n, m_n^a, l_n^b, d(s_n) \equiv d/ds_n, x_n s_n, x_n s^{m_n}, x_n u^{m_n}, (-1)^{m_n} x_n$, для каждого из которых $n = 1, \dots, N$, будем использовать векторные символы $\mathbf{i}, \mathbf{x}, \mathbf{m}^a, \mathbf{l}^b, \mathbf{d}(s), \mathbf{x}s, \mathbf{x}s^{\mathbf{m}}, \mathbf{x}u^{\mathbf{m}}$ и $(-1)^{\mathbf{m}} \mathbf{x}$ соответственно. Для обозначения “скалярных” величин, связанных с этими “векторами”, применим символы: $\mathbf{m}^a \cdot \mathbf{i} = m_1^a i_1 + \dots + m_N^a i_N, \mathbf{l}^b \cdot \mathbf{i} = l_1^b i_1 + \dots + l_N^b i_N, \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = m_1 v_1 + \dots + m_N v_N, \mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \prod_{n=1}^N x_n^{i_n}, \mathbf{x}^{\mathbf{i}+\mathbf{v}} = \prod_{n=1}^N x_n^{i_n+v_n}, \mathbf{i}! = \prod_{n=1}^N i_n!, \Gamma(1+\mathbf{i}+\mathbf{v}) = \prod_{n=1}^N \Gamma(1+i_n+v_n)$. Совокупности условий $0 \leq i_n < \infty, -\infty < i_n < \infty, v_n \rightarrow 0, m_n \geq 0$ и т.п., где $n = 1, \dots, N$, будем также записывать в “векторной” форме:

$0 \leq i < \infty$, $-\infty < i < \infty$, $v \rightarrow 0$, $m \geq 0$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Общим гипергеометрическим рядом* от N переменных, характеризуемым списком параметров L , назовем степенной ряд вида

$${}^N F[L; x] \equiv {}^N F \left[\begin{matrix} \langle \alpha^1 | m^1 \rangle, \dots, \langle \alpha^A | m^A \rangle; x \\ \langle \beta^1 | l^1 \rangle, \dots, \langle \beta^B | l^B \rangle \end{matrix} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} L(i) \frac{x^i}{i!}, \quad (1)$$

$$L(i) = [(\alpha^1, m^1 \cdot i) \dots (\alpha^A, m^A \cdot i)] / [(\beta^1, l^1 \cdot i) \dots (\beta^B, l^B \cdot i)], \quad (2)$$

где символы Похгаммера (a, p) , связанные с параметрами числителя α^a и параметрами знаменателя β^b , определяются соотношением $(a, p) = \Gamma(a + p)/\Gamma(a)$, а спектральные индексы $m_1^a, \dots, m_N^a$ ($1 \leq a \leq A$) и $l_1^b, \dots, l_N^b$ ($1 \leq b \leq B$) принимают произвольные целые значения, совместимые с условиями сходимости ряда ${}^N F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Параметры ряда ${}^N F$, имеющие одинаковые спектральные наборы, будем называть *спектрально эквивалентными*.

Для сокращения записи будем объединять такие параметры в *элементарные списки* вида

$$\left[\begin{matrix} \langle a | m \rangle, \langle b | m \rangle, \dots \\ \langle c | m \rangle, \langle e | m \rangle, \dots \end{matrix} \right] = \left\langle \begin{matrix} a, b, \dots \\ c, e, \dots \end{matrix} \middle| m \right\rangle = \langle d | m \rangle, \quad d \equiv \left[\begin{matrix} a, b, \dots \\ c, e, \dots \end{matrix} \right],$$

где d – произвольный двойной набор спектрально эквивалентных параметров, входящих в список L . В однострочных обозначениях будем отделять параметры числителя любого двойного набора от параметров его знаменателя двойной наклонной чертой, например, $d = [a, b, \dots] // [c, e, \dots]$ и т. п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если спектральный набор m , входящий в элементарный список $\langle d | m \rangle$, имеет вид $m = (0, \dots, 0, m_n, 0, \dots, 0)$, будем называть набор параметров d *индивидуальным набором*, связанным с n -м переменным суммирования. В противном случае набор параметров d будем называть *глюонным (склеивающим) набором*.

Полный список параметров ряда ${}^N F$ будем записывать в виде $L = [L(G); L_1; \dots; L_N]$, где $L(G)$ – список глюонных параметров, а $[L_1; \dots; L_N]$ – упорядоченный набор индивидуальных списков, помеченных номерами соответствующих переменных суммирования ряда ${}^N F$. Применение *позиционных обозначений* позволяет использовать вместо развернутой записи индивидуальных элементарных списков $\langle d | 0, \dots, m_n, \dots, 0 \rangle$, $\langle d' | 0, \dots, m'_n, \dots, 0 \rangle$, входящих в объединенный индивидуальный список L_n , сокращенную запись вида $L_n = [\langle d | m_n \rangle, \langle d' | m'_n \rangle, \dots]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Глюонный набор d или индивидуальный набор d' будем называть *простыми наборами*, если все компоненты спектрального набора m , входящего в глюонный элементарный список $\langle d | m \rangle$, или спектральное число m_n , входящее в индивидуальный элементарный список $\langle d' | m_n \rangle$, имеют единичные значения.

Простые наборы d и d' будем заносить в соответствующие объединенные списки $L(G)$ и L_n без указания спектральных индексов. Другими словами, символы d и d' в списках $L(G)$ и L_n будем считать эквивалентными символам $\langle d | 1, 1, \dots, 1 \rangle$ и $\langle d' | 1 \rangle$ соответственно.

Пустое множество (или подмножество) параметров в любой части полного списка L будем обозначать символом $*$, опуская этот значок (или множество таких значков) в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям. Например, ${}^N F[L(G); *; *; \dots; *; x] \equiv {}^N F[L(G); x]$, ${}^2 F[a // b : a_1 // *; a_2 // *; x_1, x_2] \equiv {}^2 F[a // b : a_1; a_2; x_1, x_2]$ и т. п.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого ряда ${}^N F$ имеет место преобразование инверсии

$${}^N F[\langle \alpha | \mathbf{m} \rangle, L; \mathbf{x}] = {}^N F[L // \langle 1 - \alpha | \overline{\mathbf{m}} \rangle; (-1)^{\mathbf{m}} \mathbf{x}], \quad \overline{\mathbf{m}} \equiv -\mathbf{m}, \quad (3)$$

которое позволяет: (а) перевести любой параметр ряда из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель; (б) изменить знаки всех компонент любого спектрального набора на противоположные; (в) придать заданной компоненте любого спектрального набора неотрицательное значение; (г) привести к спектрально эквивалентной форме параметры, отличающиеся инверсией (изменением знаков всех компонент) спектра.

Справедливость формулы (3), а вместе с нею и замечания 1 следует из соотношений (1), (2) с помощью элементарного тождества $(\alpha, i) = (-1)^i / (1 - \alpha, -i)$. Замечание 1а показывает, что разделение параметров ряда ${}^N F$ на параметры числителя и параметры знаменателя имеет условный характер. Следует, однако, иметь в виду, что разбиение множества параметров ряда на подмножества спектрально эквивалентных параметров (см. замечание 1г), значительно упрощающее структуру многих формул факторизации, в общем случае неизбежно сопровождается разделением параметров ряда на параметры числителя и параметры знаменателя.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Параметры, характеризующиеся кратными спектрами, могут быть приведены к спектрально эквивалентной форме с помощью формулы умножения Гаусса–Лежандра.

В самом деле, если ряд ${}^N F$ содержит параметры $\langle \alpha | \mathbf{m} \rangle$ и $\langle \beta | \mathbf{l} \rangle$ такие, что $\mathbf{m} = k\mathbf{l}$, где k – целое положительное число, то коэффициенты, соответствующие этим параметрам, имеют вид (α, ki) и (β, i) , где $i = \mathbf{l} \cdot \mathbf{i}$. В этом случае справедливость замечания 2 вытекает из формулы $(\alpha, ki) = k^{ki} (\alpha/k, i) ((\alpha+1)/k, i) \dots ((\alpha+k-1)/k, i)$, являющейся парафразом формулы умножения Гаусса–Лежандра [4]. Если k – целое отрицательное число, то с помощью замечания 1б доказательство замечания 2 сводится к рассмотренному выше случаю.

Непосредственно из замечания 2 и определения 4 следует:

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Параметры, спектры которых кратны единичному спектру, представимы в виде набора простых параметров. Любой набор индивидуальных параметров представим в виде набора простых индивидуальных параметров.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Гипергеометрический ряд ${}^N F$ симметричен относительно любой перестановки аргументов ряда и одновременной перестановки соответствующих индивидуальных наборов и соответствующих компонент всех спектральных наборов.

Данное утверждение вытекает из определений 1 и 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Парциальным типом* ряда ${}^N F$ (по некоторому переменному x_n) будем называть пару чисел $(p_n // q_n)$, где

$$p_n = \frac{\sigma_n + \delta_n}{2}, \quad q_n = \frac{\sigma_n - \delta_n}{2},$$

$$\sigma_n = \sum_{a=1}^A |m_n^a| + \sum_{b=1}^B |l_n^b|, \quad \delta_n = \sum_{a=1}^A m_n^a - \sum_{b=1}^B l_n^b, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Полным типом ряда* ${}^N F$ будем называть полную совокупность парциальных типов по всем переменным, т.е. таблицу чисел вида $(p_1 // q_1, \dots, p_N // q_N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Наибольшее из чисел $p_1, \dots, p_N, q_1 + 1, \dots, q_N + 1$ будем называть *порядком ряда* ${}^N F$.

В случае $N = 2$ определение 7 эквивалентно определению порядка, предложенному Горном [4]. В соответствии с терминологией, принятой в [4] для случая $N = 2$, будем называть ряд ${}^N F$ *полным гипергеометрическим рядом*, если $p_1 = \dots = p_N = q_1 + 1 = \dots = q_N + 1$. Классификация рядов по типам дает более содержательную информацию о структуре ряда ${}^N F$ по сравнению с общепринятой классификацией по порядку.

3. Обобщенные формулы факторизации. Для ряда ${}^N F$ имеет место общая формула факторизации (N, N) -типа [2]:

$${}^N F[L_1, L_2; x] = {}^N F[L_1; d(s)] {}^N F[L_2; xs] \Big|_{s=0}, \quad (4)$$

где $d(s) = [d(s_1), \dots, d(s_N)]$, $d(s_n) = d/ds_n$, а $[L_1, L_2]$ – произвольное разбиение списка L на два списка меньшего объема. Применение формулы (4) не приводит к изменению структуры элементарных списков вида $\langle d|m \rangle$, входящих в список L . В случае $m \geq 0$ возможна более глубокая перестройка ряда ${}^N F$ с помощью специальной формулы факторизации $(N, 1)$ -типа [3]:

$${}^N F[\langle d|m \rangle, L; xu^m] = F[d; ud(s)] {}^N F[L; xs^m] \Big|_{s=0}, \quad (5)$$

где $F[d; x]$ – обобщенный гипергеометрический ряд от одного переменного [4]

$$F[d; x] \equiv F_q^p[d; x] = \sum_{i=0}^{\infty} (d, i) \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \{ [(a, i)(b, i) \dots] / [(c, i)(e, i) \dots] \} \frac{x^i}{i!}, \quad (6)$$

содержащий p параметров числителя $a, b, \dots$ и q параметров знаменателя $c, e, \dots$.

Для доказательства формул (4), (5) достаточно использовать в их правых частях определения (1), (6) и применить затем *основное дифференциальное тождество* $d^i(s)s^j \Big|_{s=0} = i! \delta(i, j)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 0, 1, 2, \dots$), где $\delta(i, j)$ – символ Кронекера, принимающий значения 1 и 0 в случаях $i = j$ и $i \neq j$ соответственно. В случае формулы (5) имеем $j = m \cdot i$, где i – набор переменных суммирования ряда ${}^N F[L]$. Поскольку основное дифференциальное тождество имеет место только в том случае, если $i \geq 0$ и $j \geq 0$, то приведенное доказательство соотношения (5) применимо лишь для $m \geq 0$ (или для $m \leq 0$, см. замечание 1б).

Чтобы распространить формулу (5) на случай *индефинитных* спектральных наборов, сопоставим степенным рядам тейлоровского типа (6) и (1) формальные степенные ряды лорановского типа:

$$F_v[d; x] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(d, i+v)x^{i+v}}{\Gamma(1+i+v)}, \quad {}^N F_v[L; x] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{L(i+v)x^{i+v}}{\Gamma(1+i+v)}, \quad (7)$$

где $v, v_1, \dots, v_N$ – произвольные вещественные числа. Почленное применение обобщенной формулы дифференцирования [9] $d^\nu(s)s^\mu = [\Gamma(1+\mu)/\Gamma(1+\mu-\nu)]s^{\mu-\nu}$ позволяет определить Ω -произведение рядов (7а) и (7б) в виде:

$$\Omega_v^v(\mathbf{m}; \mathbf{x}) = F_v[\mathbf{d}; d(s)]^N F_v[L; \mathbf{x}s^{\mathbf{m}}] \Big|_{s=0}. \quad (8)$$

В общем случае предел последовательности функций (8) при $v \rightarrow 0, \mathbf{v} \rightarrow 0$ не существует, однако главное значение этого предела, соответствующее дополнительному условию $v = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}$, существует, а его явное выражение для любых целых $m_1, \dots, m_N$ имеет вид ряда ${}^N F[\langle \mathbf{d} | \mathbf{m} \rangle, L; \mathbf{x}]$, совпадающего по форме с левой частью (5). Другими словами, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Обобщенная формула факторизации ряда ${}^N F[\langle \mathbf{d} | \mathbf{m} \rangle, L; \mathbf{x}]$ имеет вид*

$${}^N F[\langle \mathbf{d} | \mathbf{m} \rangle, L; \mathbf{x}] = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} F_{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}}[\mathbf{d}; d(s)]^N F_v[L; \mathbf{x}s^{\mathbf{m}}] \Big|_{s=0}, \quad (9)$$

где $m_1, \dots, m_N$ – произвольные целые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя определения (7а) и (7б) в правую часть (8) и применяя почленно обобщенную формулу дифференцирования, получаем:

$$\Omega_v^v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{d}, i+v)L(i+\mathbf{v})\mathbf{x}^{i+\mathbf{v}}\Gamma(1+i'+v')s^{i'-i+v'-v}}{\Gamma(1+i+v)\Gamma(1+i+\mathbf{v})\Gamma(1+i'-i+v'-v)} \Big|_{s=0}, \quad (10)$$

где $v' \equiv \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}, i' \equiv \mathbf{m} \cdot i$. Поскольку функция $\Gamma(z)$ имеет полюсы в точках $z = 0, -1, -2, \dots$, общий член ряда (10) в случае $v = v'$ отличен от нуля, если $i' - i \geq 0$. При выполнение условий $i' \geq i, v = v'$ предел величины $s^{i'-i+v'-v} = s^{i'-i}$ при $s \rightarrow 0$ существует и равен $\delta(i, i')$. После выполнения предельного перехода при $s \rightarrow 0$ видно, что $(N+1)$ -кратная сумма в правой части (10) в силу “правила отбора” $i = i'$ сводится к N -кратной сумме по переменным $i_1, \dots, i_N$, а отношение $\Gamma(1+i'+v')/\Gamma(1+i+v)$ обращается в единицу. Переходя затем к пределу при $v \rightarrow 0$ и учитывая, что $1/\Gamma(1+i) \neq 0$ в том и только том случае, если $i \geq 0$, получаем $\Omega_{0, \dots, 0}^0(\mathbf{m}; \mathbf{x}) = {}^N F[\langle \mathbf{d} | \mathbf{m} \rangle, L; \mathbf{x}]$, что завершает доказательство предложения 1.

Таким образом, несмотря на то, что в случае индефинитных спектральных наборов операция Ω -умножения не может быть определена непосредственно на множестве рядов тейлоровского типа, ее можно определить на более широком множестве степенных рядов лорановского типа. Главное значение предела последовательности Ω -произведений, соответствующего переходу к граничным (тейлоровским) элементам этого множества, существует и может быть принято за определение обобщенного Ω -произведения.

Алгебраические свойства операции Ω -умножения [1] определяются коммутационными свойствами операторов $d(s)$ и s . Поскольку операции дифференцирования и предельного перехода в правой части (9) независимы друг от друга, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Наличие предельного перехода $v \rightarrow 0$ в правой части (9), отличающее формулу (9) от соотношения (5), не приводит к изменению алгебраических свойств операции обобщенного Ω -умножения по сравнению с операцией обычного Ω -умножения.*

В частности, для операции обобщенного Ω -умножения сохраняются свойства коммутативности и ассоциативности, правило спаривания, свойство Ω -единичности показательной функции и т. п. (см. [1]–[3]). Это позволяет отказаться от введения специальных

обозначений для обобщенного Ω -произведения, т.е. сохранить для этого случая обычные дифференциальные обозначения типа (5), не прибегая к явному указанию предельных переходов, а лишь подразумевая их в необходимых случаях.

4. Трансформационные свойства горновского ряда G_3 . В теории гипергеометрических рядов важную роль играют формулы преобразования вида $F = \tilde{F}$, выражающие некоторый ряд F в виде другого ряда (или комбинации некоторых рядов) $\tilde{F}$. Для вывода таких формул обычно используют один из трех методов: метод прямой перегруппировки ряда F ; метод, основанный на применении дифференциальных соотношений для функций F и $\tilde{F}$; и метод интегральных преобразований [5]. Гипергеометрические ряды с индефинитными спектральными наборами наиболее трудны для изучения. Для исследования трансформационных свойств горновских рядов с индефинитными спектрами Эрдейи предложил использовать метод контурных интегралов по двойной петле Похгаммера [10]. В качестве примера, иллюстрирующего эффективность метода контурных интегралов, Шриваштава и Карлссон (см. [5, с. 318]) приводят соотношение Эрдейи [10]

$$\begin{aligned} G_3[\alpha_1, \alpha_2; y_1 X_2 X_1^{-2}, y_2 X_1 X_2^{-2}] \\ = X_1^{\alpha_2} X_2^{\alpha_1} F_2[1 - \alpha, \alpha, \alpha, 1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2; x_1, x_2], \\ X_1 = 1 - y_1, \quad X_2 = 1 - y_2, \quad y_1 = x_1(1 - x_2), \\ y_2 = x_2(1 - x_1), \quad \alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2, \end{aligned} \quad (11)$$

выражающее горновскую функцию G_3 через функцию Аппеля F_2 , и указывают, ссылаясь на замечание Эрдейи [10], что это преобразование “было бы трудно получить с помощью любого из первых двух (*упомянутых выше*) методов”. Однако, легко показать, что соотношение (11), по крайней мере в той форме, в какой оно приведено в [5], является ошибочным. В самом деле, применяя обозначения, введенные в п. 2, запишем определения функций G_3 и F_2 в виде $G_3[\alpha_1, \alpha_2; x_1, x_2] = {}^2F[\langle \alpha_1 | \bar{1}, 2 \rangle, \langle \alpha_2 | 2, \bar{1} \rangle; x_1, x_2]$, $F_2[\alpha, a_1, a_2, b_1, b_2; x_1, x_2] = {}^2F[\alpha : a_1 // b_1; a_2 // b_2; x_1, x_2]$. В случае $x_2 = 0$ с учетом этих определений и замечаний 1, 2 и 3 из (11) следует, что

$$F_1^2\left[\frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_2 + 1}{2} // 1 - \alpha_1; \frac{-4x_1}{(1 - x_1)^2}\right] = (1 - x_1)^{\alpha_2} F_1^2[1 - \alpha_{12}, \alpha_{12} // 1 - \alpha_1; x_1], \quad (12)$$

где $\alpha_{12} \equiv \alpha_1 + \alpha_2$. Чтобы убедиться в некорректности формулы (12), достаточно положить в ней $\alpha_1 = (1 - \alpha_2)/2$, что приводит к явно ошибочному соотношению $F_0^1[\alpha_2/2; -4x_1(1 - x_1)^{-2}] = (1 - x_1)^{\alpha_2} F_0^1[(1 - \alpha_2)/2; x_1]$, где $F_0^1[a; x] = (1 - x)^{-a}$.

Применяя по каждому из параметров ряда G_3 обобщенную формулу факторизации (5) (см. предложения 1 и 2) и учитывая вспомогательные операторные тождества [2], [3]

$$\begin{aligned} F(d(s))\Psi(xz^m s^m)|_{s=0} &= F(zd(s))\Psi(xs^m)|_{s=0}, \\ F_0^1[\alpha; zd(s)]\Psi(s)|_{s=0} &= z^{-\alpha} F_0^1[\alpha; d(s)] \exp[(1 - z^{-1})s] \Psi(s)|_{s=0}, \end{aligned}$$

где F, Ψ – произвольные функции, а $F_0^1[\alpha; z] = (1 - z)^{-\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned} G_3[\alpha_1, \alpha_2; x_1 z_1^{-1} z_2^2, x_2 z_1^2 z_2^{-1}] &\equiv {}^2F[\langle \alpha_1 | \bar{1}, 2 \rangle, \langle \alpha_2 | 2, \bar{1} \rangle; x_1 z_1^{-1} z_2^2, x_2 z_1^2 z_2^{-1}] \\ &= F_0^1[\alpha_1; z_1 d(s_1)] F_0^1[\alpha_2; z_2 d(s_2)] \exp(x_1 s_1^{-1} s_2^2 + x_2 s_1^2 s_2^{-1})|_{s_1=s_2=0} \\ &= z_1^{-\alpha_1} z^{-\alpha_2} F_0^1[\alpha_1; d(s_1)] F_0^1[\alpha_2; d(s_2)] E(s_1, s_2)|_{s_1=s_2=0}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $E(s_1, s_2) = \exp[Q(s_1, s_2)/s_1 s_2]$, а $Q(s_1, s_2)$ – кубическая форма вида

$$Q(s_1, s_2) = x_2 s_1^3 + (1 - z_1^{-1}) s_1^2 s_2 + (1 - z_2^{-1}) s_1 s_2^2 + x_1 s_2^3. \quad (14)$$

В двух случаях $n = 1, 2$, соответствующих специальным значениям параметров $z_i = z_{i,n} = (1 + x_i - n x_1 - n x_2)^{-1}$, где $i = 1, 2$, кубическая форма Q принимает особо простые выражения вида $Q = Q_n = (s_1 + s_2)^n (x_2 s_1^{3-n} + x_1 s_2^{3-n})$. Применение этих выражений в формуле для E позволяет применить к функции $E(s_1, s_2)$ формулу сложения $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$. Записывая каждую из экспонент $\exp(a)$ и $\exp(b)$ в виде степенного ряда, после подстановки преобразованной E в (13) получаем:

$$G_3 = z_{1,n}^{-\alpha_1} z_{2,n}^{-\alpha_2} \sum_{i_1, i_2} L(i_1, i_2) \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2}}{i_1! i_2!}, \quad (15)$$

$$L(i_1, i_2) = F_0^1[\alpha_1; d(s_1)] s_1^{\nu_1} F_0^1[\alpha_2; d(s_2)] s_2^{\nu_2} (s_1 + s_2)^i \Big|_{s_1=s_2=0}, \quad (16)$$

$$\nu_1 \equiv (2 - n) i_2 - i_1, \quad \nu_2 \equiv (2 - n) i_1 - i_2, \quad i \equiv n(i_1 + i_2). \quad (17)$$

Используя в правой части (16) свойство коммутативности операции Ω -умножения [1], учитывая правило дифференцирования $d^\nu(s) F_0^1[\alpha; s] = (\alpha, \nu) F_0^1[\alpha + \nu; s]$ и применяя затем обобщенное правило Лейбница [1], имеем:

$$L(i_1, i_2) = (\alpha_1, \nu_1)(\alpha_2, \nu_2) d^i(s) F_0^1[\alpha_1 + \nu_1; s] F_0^1[\alpha_2 + \nu_2; s] \Big|_{s=0}. \quad (18)$$

Применяя в правой части (18) формулу сложения $F_0^1 F_0^1 = F_0^1[\alpha_{12} + \nu_{12}; s]$, где $\alpha_{12} \equiv \alpha_1 + \alpha_2$, $\nu_{12} \equiv \nu_1 + \nu_2$, и учитывая, что $d^i(s) F[\alpha_{12} + \nu_{12}; s] \Big|_{s=0} = (\alpha_{12} + \nu_{12}, i)$, после несложных преобразований получаем

$$L(i_1, i_2) = \sigma_n^{i_{12}} (\alpha_1, \nu_1)(\alpha_2, \nu_2)(\alpha_{12}, i_{12})(1 - \alpha_{12}, (n - 1) i_{12}), \quad (19)$$

где $\sigma_n = (-1)^{n-1}$, $i_{12} = i_1 + i_2$. Подставляя (19) в (15), учитывая определения (17), (1) и применяя обозначения, введенные в п. 2, имеем:

$$G_3 = z_{1,n}^{-\alpha_1} z_{2,n}^{-\alpha_2} \times {}^2F[\alpha_{12}, \langle 1 - \alpha_{12} | n - 1, n - 1 \rangle, \langle \alpha_1 | \bar{1}, 2 - n \rangle, \langle \alpha_2 | 2 - n, \bar{1} \rangle; \sigma_n x_1, \sigma_n x_2]. \quad (20)$$

Рассматривая в (20) по-отдельности случаи $n = 1$ и $n = 2$, используя явные выражения для параметров $z_{1,n}$ и $z_{2,n}$, применяя в случае $n = 2$ замечания 1а, 1в и учитывая определения горновских функций G_1 и F_4 [4], [5], получаем окончательную формулировку результата:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для ряда G_3 имеют место формулы преобразования

$$G_3 \left[\alpha_1, \alpha_2; \frac{x_1(1 - x_2)}{(1 - x_1)^2}, \frac{x_2(1 - x_1)}{(1 - x_2)^2} \right] = (1 - x_2)^{\alpha_1} (1 - x_1)^{\alpha_2} G_1[\alpha_{12}, \alpha_1, \alpha_2; x_1, x_2], \quad (21)$$

$$G_3 \left[\alpha_1, \alpha_2; \frac{x_1(1 - x_1 - 2x_2)}{(1 - x_2 - 2x_1)^2}, \frac{x_2(1 - x_2 - 2x_1)}{(1 - x_1 - 2x_2)^2} \right] = (1 - x_1 - 2x_2)^{\alpha_1} (1 - x_2 - 2x_1)^{\alpha_2} F_4[\alpha_{12}, 1 - \alpha_{12}, 1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2; x_1, x_2], \quad (22)$$

связывающие этот ряд с горновской функцией $G_1[\alpha, \alpha_1, \alpha_2] \equiv {}^2F[\alpha, \langle \alpha_1 | \bar{1}, 1 \rangle, \langle \alpha_2 | 1, \bar{1} \rangle]$ и функцией Аппеля $F_4[a_1, a_2, b_1, b_2] \equiv {}^2F[a_1, a_2 : *//b_1; *//b_2]$.

Формулы (21), (22) позволяют найти корректный аналог ошибочной формулы (11). Например, применяя в правой части (22) формулу Бейли [11] (см. также [5, с. 318]) $F_4[a, b_1 + b_2 - 1, b_1, b_2; z_1(1 - z_2), z_2(1 - z_1)] = F_2[b_1 + b_2 - 1, a, a, b_1, b_2; z_1, z_2]$, легко показать, что преобразование (11) имеет место в том случае, если

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 - y_2 - 2y_1, & X_2 &= 1 - y_1 - 2y_2, \\ y_1 &= x_1(1 - x_2), & y_2 &= x_2(1 - x_1), & \alpha &\equiv \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Для дополнительной проверки формул (23) можно применить в правой части (21) формулу Эрдейи [12], связывающую функцию G_1 с F_2 (см. также [5, с. 319]).

Отметим в заключение, что существует еще один специальный случай $z_i = 1/[1 - 3(x_1 x_2 x_i)^{1/3}]$, для которого кубическая форма Q (см. (14)) принимает особо простой вид $Q = (x_2^{1/3} s_1 + x_1^{1/3} s_2)^3$. По аналогии с выводом формул (21), (22) можно показать, что ряд G_3 допускает в этом случае кубические преобразования, связывающие его с негорновскими рядами типов $(6//5, 2//1)$, $(5//4, 2//1)$, $(4//3, 2//1)$ и $(3//2, 2//1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Niukkanen A.W. Generalized operator reduction formulae for multiple hypergeometric series ${}^N F(x_1, \dots, x_N) //$ J. Phys. A. Math. Gen. 1984. V. 17. P. 731–736.
- [2] Ниукканен А. В. Новый метод в теории гипергеометрических рядов и специальных функций математической физики // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. №3. С. 191–192.
- [3] Ниукканен А. В. Новый подход к теории гипергеометрических рядов и специальных функций математической физики // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №1. С. 65–73.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [5] Srivastava H. M., Karlsson P. W. Multiple Hypergeometric Series. Chichester: Ellis Horwood, 1985.
- [6] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Г-ряды и общие гипергеометрические функции на многообразии $(k \times n)$ -матриц. Препринт ИПМ, 1990.
- [7] Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{3,6}$ // Матем. сб. 1989. Т. 180. №1. С. 3–38.
- [8] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. №4. С. 3–82.
- [9] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
- [10] Erdélyi A. Transformations of hypergeometric functions of two variables // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. 1948. V. 62. P. 378–385.
- [11] Bailey W. N. Generalized hypergeometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.
- [12] Erdélyi A. Hypergeometric functions of two variables // Acta Math. 1950. V. 83. P. 131–164.