Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Зубков, Улучшенные оценки числа неповторных булевых функций в полном бинарном базисе $\{\&, \vee, \oplus, -\}$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 721–733

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:35:03

Улучшенные оценки числа неповторных булевых функций в полном бинарном базисе $\{\&, \vee, \oplus, -\}$

О. В. Зубков

В настоящей работе рассматриваются неповторные булевы функции в базисе $\{\&, \vee, \oplus, -\}$. Доказывается формула, выражающая число таких функций от n переменных при помощи произведений чисел Фибоначчи. Производится оценка этих произведений, в результате чего выводятся асимптотические оценки для числа неповторных булевых функций. Оценки содержат числа Эйлера второго порядка и могут быть уже известными методами приведены к виду показательного степенного ряда. На основании этих оценок можно строить окончательную асимптотику числа неповторных булевых функций в полном бинарном базисе.

Библиография: 6 названий.

Введение. Формула Φ над базисом B называется *неповторной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется *неповторной в базисе B* , если найдется неповторная формула Φ над B , представляющая функцию f . Далее в работе под базисом будем понимать полный бинарный базис $B_2 = \{\&, \vee, \oplus, -\}$.

В [1] были получены верхняя и нижняя оценки числа S_n неповторных булевых функций от n переменных в базисе B_2 :

$$2 \cdot 3^{n-1} \cdot (2n-3)!! < S_n < 2 \cdot 5^{n-1} \cdot (2n-3)!!, \quad (1)$$

где $(2n-3)!! = \prod_{i=2}^n (2i-3)$. Эти оценки весьма приблизительны и позволяют лишь строить самые общие предположения о характере асимптотики числа S_n при больших n .

Для дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. На множестве невозрастающих последовательностей натуральных чисел введем бинарное отношение. Будем говорить, что последовательность M_2 можно получить из последовательности $M_1 = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ *ш способами*, если M_2 может быть получена из M_1 одним из двух путей:

- путем увеличения какого-то числа q_i в последовательности M_1 на единицу; в этом случае $w = (q_i + 1) \cdot R(q_i)$, где $R(q_i)$ – количество вхождений числа q_i в M_1 ;
- путем приписывания справа к M_1 единицы; в этом случае $w = \sum_{i=1}^k q_i - k + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Путем к невозрастающей последовательности M называется набор невозрастающих последовательностей $M_1, M_2, \dots, M_N$, где M_1 – последовательность, состоящая из одной единицы, $M_N = M$, а последовательность M_{i+1} можно получить из последовательности M_i одним из двух путей, приведенных в определении 1. Обозначим число способов получения M_{i+1} из M_i через w_i . Ценой этого пути назовем величину $\prod_{i=1}^{s-1} w_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ценой невозрастающей последовательности M называется величина $P(M)$, равная сумме по множеству всех путей к последовательности M цен этих путей. Цена последовательности, состоящей из одной единицы, по определению равна 1.

В [1] также была получена точная формула для числа S_n :

$$S_n = 2 \cdot \sum_{M \in T_{n-1}} \left(P(M) \cdot \prod_{i=1}^k L_{q_i} \right), \quad (2)$$

где T_{n-1} – множество всевозможных разбиений числа $n-1$ на слагаемые; $P(M)$ – цена соответствующей упорядоченной последовательности слагаемых $M = (q_1, \dots, q_k)$, где $\sum_{i=1}^k q_i = n-1$,

$$L_q = \frac{5\sqrt{5} + 11}{2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^{q-1} + \frac{5\sqrt{5} - 11}{2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^{q-1}.$$

О недостатках формулы (2) и аналогичных ей формул будет упомянуто в следующем пункте при рассмотрении данных вопросов.

1. Некоторые упрощения точной формулы для числа S_n . Покажем, что числа L_{q_i} из формулы (2) несмотря на сложный вид, по сути являются хорошо известными числами Фибоначчи.

ЛЕММА 1. Имеем

$$L_n = F_{n+4} \cdot 2^{n-1},$$

где ряд F_n есть последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_i = F_{i-1} + F_{i-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известным нереккуррентным представлением Бинэ для чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n),$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ – “золотое сечение” Фидия, $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$.

Предварительно заметим, что $\varphi^5 = (11 + 5\sqrt{5})/2$, $\psi^5 = (11 - 5\sqrt{5})/2$; тогда

$$\begin{aligned} F_{n+4} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+4} - \psi^{n+4}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n-1} \cdot \varphi^5 - \psi^{n-1} \cdot \psi^5) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{5\sqrt{5} + 11}{2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^{n-1} + \frac{5\sqrt{5} - 11}{2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^{n-1} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot L_n, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы 1.

Таким образом, формула (2) принимает вид

$$S_n = 2 \cdot \sum_{M \in T_{n-1}} P(M) \cdot \prod_{i=1}^k (F_{q_i+4} \cdot 2^{q_i-1}).$$

Пусть $T_n(k)$ – множество разбиений натурального числа n точно на k слагаемых. Так как T_{n-1} – множество всех различных разбиений числа $n-1$ на слагаемые, то

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{M \in T_{n-1}(k)} P(M) \cdot \prod_{i=1}^k (F_{q_i+4} \cdot 2^{q_i-1}),$$

и, группируя отдельно степени двойки,

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{M \in T_{n-1}(k)} P(M) \cdot \prod_{i=1}^k (F_{q_i+4}) \cdot 2^{(\sum_{i=1}^k q_i - k)}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^k q_i = n-1$, окончательно получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{n-k} \cdot \sum_{M \in T_{n-1}(k)} P(M) \cdot \prod_{i=1}^k F_{q_i+4} \right). \quad (3)$$

Основными недостатками формул (2) и (3) являются суммирование по сложному множеству разбиений числа $n-1$ и наличие под знаком суммы непредставимых в замкнутом виде рекуррентных чисел $P(M)$ – цен последовательностей $M = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, соответствующих разбиениям числа $n-1 = \sum_{i=1}^k q_i$.

В [1] было показано, что сумма всех цен вычисляется легко:

$$\sum_{M \in T_{n-1}} P(M) = (2n-3)!!$$

Имеет место более сильное утверждение.

ЛЕММА 2. *Имеем*

$$\sum_{M \in T_{n-1}(k)} P(M) = \left\langle \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle,$$

где $\left\langle \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle \right\rangle$ – числа Эйлера второго порядка, для определения которых можно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$\left\langle \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle \right\rangle = (k+1) \cdot \left\langle \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle \right\rangle + (2n-k-1) \cdot \left\langle \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle; \quad (4)$$

необходимыми условиями являются

$$\left\langle \left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle = 1, \quad \left\langle \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle = n!$$

(см., например, [2; с. 300]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ леммы предположим необходимые сведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Упорядоченной формулой Φ над B_2 от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть формулу над B_2 , удовлетворяющую следующим требованиям:

- 1) формула Φ является бесповторной;
- 2) в формуле Φ отрицания могут быть только над переменными;
- 3) для любой подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ формулы Φ , где $*$ $\in \{\&, \vee, \oplus\}$, переменная с наименьшим индексом среди всех переменных подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ содержится в подформуле Φ_1 ;
- 4) в формуле Φ не содержится подформул вида

$$(\Phi_1 \& \Phi_2) \& \Phi_3, \quad (\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3, \quad (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \oplus \Phi_3;$$

- 5) для любой подформулы $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ формулы Φ переменная с наименьшим индексом среди переменных подформулы Φ_2 входит в Φ_2 без отрицания.

Построенная таким образом упорядоченная формула является каноническим представлением для соответствующей бесповторной булевой функции [1], т.е. от подсчета бесповторных функций можно перейти к подсчету упорядоченных формул.

В [1; с. 48] вводятся в рассмотрение структуры, сохраняющие индексы ($SSI(\Psi)$), которые получаются из упорядоченных над B_2 формул путем замены в них всех символов бинарных функций на символ $\circ$ и удаления всех отрицаний.

Для подсчета числа структур вида SSI от переменных $x_1, \dots, x_n$ удобно разбить их множество на непересекающиеся классы по числу левых и правых узлов в них [3; с. 61]. Если $\Psi_1 \circ \Psi_2$ является подформулой структуры $SSI(\Psi)$, причем Ψ_1, Ψ_2 отличны от переменных, то Ψ_1 называется *левым узлом*, а Ψ_2 называется *правым узлом*. Далее под $B(i, j)$ будем понимать число структур вида SSI , содержащих i левых и j правых узлов. Так как в формуле от n переменных $n - 1$ бинарная функция, причем внешняя функция не является ни левым, ни правым узлом, то $i + j = n - 2$. В [3; с. 62] приведено рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют числа $B(i, j)$.

В [4] показано, что

$$B(k, n - k - 1) = \left\langle\left\langle n \atop k \right\rangle\right\rangle. \quad (5)$$

Доказательство этого факта опирается на формулу (4). Легко показать совпадение краевых условий

$$\left\langle\left\langle n \atop 0 \right\rangle\right\rangle = B(0, n - 1) \quad \text{и} \quad \left\langle\left\langle n \atop n - 1 \right\rangle\right\rangle = B(n - 1, 0).$$

Далее, пользуясь методом математической индукции, соотношение (5) доказывается для всех n и k .

В [1; с. 52–55] строится другое разбиение множества структур вида SSI на непересекающиеся классы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Формулу вида $(\dots(((x_{i_1} \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}) \circ x_{i_4}) \dots) \circ x_{i_{q+1}}$ будем называть *цепью вида* SSI , если переменная x_{i_1} имеет наименьший индекс среди всех переменных цепи. Эту переменную будем называть *ключевой* для данной цепи. Число q – количество вхождений в цепь символа $\circ$ будем называть *длиной цепи*.

Очевидно, что цепь вида SSI является структурой вида SSI.

Любую структуру вида SSI от n различных переменных можно построить из цепей вида SSI (или разбить на цепи вида SSI) по следующему правилу:

- 1) если структура SSI_1 является цепью, то ее разбиение состоит из этой цепи;
- 2) если $CSSI_1$ – цепь вида SSI и SSI_2 – структура вида SSI, множества переменных у них не пересекаются, индекс ключевой переменной в $CSSI_1$ меньше любого индекса среди переменных структуры SSI_2 , причем SSI_2 разбивается на цепи $CSSI_2, \dots, CSSI_k$, то, подставив вместо любой неключевой переменной цепи $CSSI_1$ структуру SSI_2 , можно получить новую структуру SSI_1 ; вновь полученная структура SSI_1 разбивается на цепи $CSSI_1, CSSI_2, \dots, CSSI_k$.

Пусть длины цепей, на которые разбивается структура SSI_1 , равны $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}$. Упорядочив их по неубыванию, получим последовательность натуральных чисел $M = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, где $\sum_{i=1}^k q_i = n - 1$, т.е. числу символов бинарной функции в структуре SSI_1 .

Последовательность M , очевидно, является разбиением числа $n - 1$. Все структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которым соответствует одна и та же последовательность M , образуют отдельный класс, число элементов в котором однозначно определяется по последовательности M как цена этой последовательности $P(M)$ [1; с. 47, 55].

Внешняя функция любой цепи является либо правым узлом, либо внешней функцией всей структуры вида SSI. Отсюда видно, что структур вида SSI от переменных $x_1, \dots, x_n$, состоящих из k цепей, ровно столько, сколько структур вида SSI, содержащих $k - 1$ правых узлов, а значит, $n - 2 - (k - 1)$ левых узлов. Суммируя по всевозможным разбиениям числа $n - 1$ на k частей, получим

$$\sum_{M \in T_{n-1}(k)} P(M) = B(n - k - 1, k - 1) = \left\langle\left\langle \begin{matrix} n - 1 \\ n - k - 1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle,$$

что и требовалось для доказательства леммы 2.

2. Оценки для произведения чисел Фибоначчи. Следующим шагом на пути упрощения формулы (3) могла бы стать аппроксимация чисел $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$ с дальнейшим ее вынесением за знак внутренней суммы и применением леммы 2.

К сожалению, эти произведения нельзя аппроксимировать одной функцией, поэтому на данном этапе можно говорить только о существенном улучшении оценок по сравнению с (1). Окончательной асимптотики, как для числа неповторных булевых функций в элементарном базисе $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ [6], получить пока не удается.

ЛЕММА 3. Среди всех произведений $F_q F_m$, где $q + t$ – постоянная величина, равная s , и $5 \leq q \leq t$, наибольшее значение принимает произведение $F_5 F_{s-5}$, а наименьшее значение принимает произведение $F_6 F_{s-6}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известным для $i = 1, \dots, n$ равенством $F_n = F_i F_{n-i+1} + F_{i-1} F_{n-i}$. Применяя его i раз, получим

$$\begin{aligned} F_i F_{n-i+1} &= F_n - F_{i-1} F_{n-i} = F_n - F_{n-2} + F_{i-2} F_{n-i-1} \\ &= F_n - F_{n-2} + F_{n-4} - F_{i-3} F_{n-i-2} = \dots = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j F_{n-2j}. \end{aligned}$$

Последнее верно, так как $F_0 = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} F_5 F_{c-5} &= F_{c-1} - F_{c-3} + F_{c-5} - F_{c-7} + F_{c-9}, \\ F_6 F_{c-6} &= F_{c-1} - F_{c-3} + F_{c-5} - F_{c-7} + F_{c-9} - F_{c-11} = F_5 F_{c-5} - F_{c-11}. \end{aligned}$$

Заметим, что любая знакопередающаяся сумма S вида $\sum_{j=0}^t (-1)^j F_{p-2j}$ для любых натуральных p и $t \leq p/2$ положительна. Тогда для любых q и m таких, что $6 < q \leq m$ и $q + m = c$, выполняется

$$F_q F_m = F_5 F_{c-5} - S_1, \quad F_q F_m = F_6 F_{c-6} + S_2,$$

где S_1 и S_2 – положительные знакопередающиеся суммы вышеуказанного вида. При этом следует иметь в виду, что и S_1 , и S_2 больше либо равны 1. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $M = (q_1, \dots, q_k)$ – разбиение числа $n-1$ на k слагаемых. Тогда среди произведений $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$

а) наибольшее равно

$$\underbrace{F_5 \cdots F_5}_{k-1} F_{n-k+4};$$

б) наименьшее равно

$$\begin{cases} \underbrace{F_6 \cdots F_6}_{k-1} F_{n-2k+5}, & \text{если } k \leq \frac{n-1}{2}, \\ \underbrace{F_6 \cdots F_6 \cdot F_5 \cdots F_5}_k, & \text{если } k > \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 3

$$\begin{aligned} F_{q_1+4} \cdot F_{q_2+4} \cdot F_{q_3+4} \cdots F_{q_k+4} &\leq F_5 \cdot F_{q_1+q_2+4 \cdot 2-5} \cdot F_{q_3+4} \cdots F_{q_k+4} \\ &\leq F_5 \cdot F_5 \cdot F_{q_1+q_2+q_3+4 \cdot 3-5 \cdot 2} \cdots F_{q_k+4} \leq \cdots \\ &\leq \underbrace{F_5 \cdots F_5}_{k-1} \cdot F_{q_1+q_2+\cdots+q_k+4k-5(k-1)} = \underbrace{F_5 \cdots F_5}_{k-1} \cdot F_{n-k+4}. \end{aligned}$$

б) По лемме 3

$$\begin{aligned} F_{q_1+4} \cdot F_{q_2+4} \cdot F_{q_3+4} \cdots F_{q_k+4} &\geq F_6 \cdot F_{q_1+q_2+4 \cdot 2-6} \cdot F_{q_3+4} \cdots F_{q_k+4} \\ &\geq F_6 \cdot F_6 \cdot F_{q_1+q_2+q_3+4 \cdot 3-6 \cdot 2} \cdots F_{q_k+4} \geq \cdots \\ &\geq \underbrace{F_6 \cdots F_6}_{k-1} \cdot F_{q_1+q_2+\cdots+q_k+4k-6(k-1)} = \underbrace{F_6 \cdots F_6}_{k-1} \cdot F_{n-2k+5}, \end{aligned}$$

если $k \leq (n-1)/2$.

В случае, когда $k > (n-1)/2$, процесс построения все меньшего произведения остановится на выражении вида

$$\underbrace{F_6 \cdots F_6 \cdot F_5 \cdots F_5}_k.$$

Лемма 4 доказана.

3. Скорость роста последовательности чисел Эйлера второго порядка.

ЛЕММА 5. При фиксированном k имеют место следующие свойства для числа Эйлера второго порядка:

а) выполнено

$$\langle\langle n \rangle\rangle_k \geq (k+1)^{n-k};$$

б) для любого k существуют константы $c_{(k)}$, $d_{(k)}$ и такое $n_{(k)}$, что для всех $n \geq n_{(k)}$ верно

$$\langle\langle n \rangle\rangle_k \leq d_{(k)} \cdot ((k+1) + \alpha_{(k)})^{n-c_{(k)}},$$

где $\alpha_{(k)} < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Воспользуемся формулой (4) для нахождения чисел Эйлера второго порядка; получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \langle\langle n \rangle\rangle_k &\geq (k+1) \langle\langle n-1 \rangle\rangle_k \geq (k+1)^2 \langle\langle n-2 \rangle\rangle_k \geq \dots \\ &\geq (k+1)^{n-k-1} \langle\langle k+1 \rangle\rangle_k = (k+1)^{n-k-1} \cdot (k+1)! \geq (k+1)^{n-k}. \end{aligned}$$

б) Доказательство проведем методом математической индукции по k . При $k=0$ все числа Эйлера второго порядка равны 1 и неравенство б), очевидно, выполняется.

Пусть $n > n_{(k-1)}$; тогда

$$\langle\langle n \rangle\rangle_k = \langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k \cdot \frac{\langle\langle n_{(k-1)}+1 \rangle\rangle_k}{\langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k} \cdot \frac{\langle\langle n_{(k-1)}+2 \rangle\rangle_k}{\langle\langle n_{(k-1)}+1 \rangle\rangle_k} \dots \frac{\langle\langle n \rangle\rangle_k}{\langle\langle n-1 \rangle\rangle_k}.$$

Обозначим $\langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k$ через некоторую промежуточную константу e , и воспользуемся (4):

$$\begin{aligned} \langle\langle n \rangle\rangle_k &= e \cdot \left((k+1) + \frac{(2n_{(k-1)} - k + 1) \cdot \langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k}{\langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k} \right) \times \dots \\ &\quad \times \left((k+1) + \frac{(2n - k - 1) \cdot \langle\langle n-1 \rangle\rangle_k}{\langle\langle n-1 \rangle\rangle_k} \right). \end{aligned}$$

Далее во всех знаменателях заменим числа Эйлера на соответствующую степень $k+1$, которая по уже доказанному пункту а) меньше. Получим большее выражение:

$$\langle\langle n \rangle\rangle_k \leq e \cdot \left((k+1) + \frac{(2n_{(k-1)} - k + 1) \cdot \langle\langle n_{(k-1)} \rangle\rangle_k}{(k+1)^{n_{(k-1)}-k}} \right) \times \dots$$

$$\times \left((k+1) + \frac{(2n-k-1) \cdot \left\langle\left\langle \frac{n-1}{k-1} \right\rangle\right\rangle}{(k+1)^{n-1-k}} \right).$$

В числителях воспользуемся предположением индукции:

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle\right\rangle &\leq e \cdot \left((k+1) + \frac{(2n_{(k-1)} - k + 1) \cdot d_{(k-1)} \cdot (k + \alpha_{(k-1)})^{n_{(k-1)} - c_{(k-1)}}}{(k+1)^{n_{(k-1)} - k}} \right) \times \dots \\ &\times \left((k+1) + \frac{(2n-k-1) \cdot d_{(k-1)} \cdot (k + \alpha_{(k-1)})^{n-1-c_{(k-1)}}}{(k+1)^{n-1-k}} \right). \end{aligned}$$

Так как $(k + \alpha_{(k-1)})/(k+1) < 1$, то величина $((k + \alpha_{(k-1)})/(k+1))^n$ экспоненциально стремится к нулю, а значит, найдется $n_{(k)} \geq n_{(k-1)}$ такое, что величина

$$(2n_{(k)} - k + 1) \cdot d_{(k-1)} \cdot \left(\frac{k + \alpha_{(k-1)}}{k+1} \right)^{n_{(k)}} \cdot \frac{(k+1)^k}{(k + \alpha_{(k-1)})^{c_{(k-1)}}}$$

меньше 1. Эту величину обозначим через $\alpha_{(k)}$. Для всех $n > n_{(k)}$ соответствующая дробь будет, очевидно, еще меньше, а потому можно, не теряя неравенства, заметить во всех сомножителях, начиная с сомножителя, соответствующего $n_{(k)}$, дроби на $\alpha_{(k)}$. Все сомножители до сомножителя, соответствующего $n_{(k)}$, и константу e объединим в один сомножитель, который обозначим через $d_{(k)}$. В итоге получим

$$\left\langle\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle\right\rangle \leq d_{(k)} \cdot ((k+1) + \alpha_{(k)})^{n-c_{(k)}}, \quad \text{где } c_{(k)} = n_{(k)} - 1.$$

Лемма 5 доказана.

Из полученных ограничений а) и б) следует, что при фиксированном k с ростом n величина $\left\langle\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle\right\rangle$ растет быстрее, чем $d_1 \cdot (k+1)^n$, и медленнее, чем $d_2 \cdot (k+2)^n$. Полученный в лемме 5 достаточно точный порядок роста чисел Эйлера второго порядка может представлять самостоятельный интерес для приложений, использующих эти числа.

4. Улучшенные оценки числа неповторных булевых функций в полном бинарном базисе.

ЛЕММА 6. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$S_n < 2^n \frac{\varphi^{n+4}}{5\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2\varphi} \right)^k \left\langle\left\langle \frac{n-1}{n-k-1} \right\rangle\right\rangle \right) \cdot (1 + \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упростим далее оценки, полученные в лемме 4.

Преобразуя наибольшее из произведений чисел Фибоначчи, получим

$$\begin{aligned} F_5^{k-1} \cdot F_{n-k+4} &= \frac{5^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-k+4} - \psi^{n-k+4}) \leq \frac{5^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-k+4} + |\psi|^{n-k+4}) \\ &= \frac{5^{k-1}}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{n-k+4} + \frac{1}{\varphi^{n-k+4}} \right) = \frac{5^{k-1}}{\sqrt{5}} \varphi^{n-k+4} \left(1 + \frac{1}{\varphi^{2(n-k+4)}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (3) вместо $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$, вынося ее за знак внутренней суммы и используя лемму 2, получаем

$$S_n < \frac{2^n}{5\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \cdot \left(1 + \frac{1}{\varphi^{2(n-k+4)}}\right) \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle.$$

Раскрывая скобки в каждом из слагаемых, группируя соответствующие слагаемые и вынося левую часть за скобки, получим

$$S_n < \frac{2^n}{5\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \right) \cdot (1 + \varepsilon'),$$

где

$$\varepsilon' = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \frac{1}{\varphi^{2(n-k+4)}}}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle}.$$

Покажем, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $n(\varepsilon)$, величина ε' не превосходит ε .

По ε найдется m такое, что $1/\varphi^{2(m+4)} < \varepsilon/2$.

По лемме 5, б) для m найдутся константы $c_{(m)}$, $d_{(m)}$ и такое $n_{(m)}$, что для всех $n > n_{(m)}$ верно

$$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \leq d_{(m)} \cdot ((m+1) + \alpha_{(m)})^{n-c_{(m)}},$$

где $\alpha_{(m)} < 1$, а значит,

$$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \leq d_{(m)} \cdot ((m+2))^n.$$

Наибольшую среди всех констант $d_{(0)}, \dots, d_{(m)}$ обозначим через $d_{(m)}^{\max}$.

На $n(\varepsilon)$ наложим следующие условия:

$$n(\varepsilon) > n_{(m)}, \quad \left\lceil \frac{n(\varepsilon)}{2} \right\rceil - 3 > m - 1, \quad \frac{3(m+2)}{\sqrt{\lceil n(\varepsilon)/2 \rceil - 2}} < \frac{\varepsilon}{2d_{(m)}^{\max}}.$$

Очевидно, что такое $n(\varepsilon)$ существует. Дальнейшие рассуждения проводим, исходя из того, что $n > n(\varepsilon)$.

Представим ε' в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \varepsilon' = & \frac{\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \frac{1}{\varphi^{2(n-k+4)}}}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle} \\ & + \frac{\sum_{k=n-m+1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \frac{1}{\varphi^{n-k+4}}}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle}. \end{aligned} \quad (6)$$

Числитель второго слагаемого оценим сверху:

$$\sum_{k=n-m+1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \frac{1}{\varphi^{n-k+4}} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{m-2} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \right\rangle\right\rangle.$$

Учитывая первое из условий на $n(\varepsilon)$, имеем

$$n > n_{(m)} \geq n_{(m-1)} \geq \dots \geq n_{(0)},$$

и тогда для всех $j \leq m$

$$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \leq d_{(m)}^{\max} (m+2)^n.$$

Продолжая оценку числителя второго слагаемого в (6), получим, что он не превосходит величины $(5/2)^{n-1} (m-1) \cdot d_{(m)}^{\max} (m+2)^n$, что, в свою очередь, не превосходит $d_{(m)}^{\max} (3 \cdot (m+2))^{n+1}$.

Знаменатель второго слагаемого в (6) оценим следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \geq \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ \lceil n/2 \rceil - 3 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle.$$

Используя лемму 5, а), получим

$$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ \lceil n/2 \rceil - 3 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle \geq \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right)^{n-1-\lceil n/2 \rceil+3} \geq \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right)^{n/2+1/2} = \left(\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - 2\right)^{n+1}.$$

Учтем, что согласно второму условию на $n(\varepsilon)$ величина $\left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ \lceil n/2 \rceil - 3 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle$ попадает в интервал для k от 1 до $n-m$, а значит, не участвует в числителе второго слагаемого.

Поделив верхнюю оценку числителя на нижнюю оценку знаменателя, получим, что второе слагаемое в (6) не превосходит величины

$$\frac{d_{(m)}^{\max} (3 \cdot (m+2))^{n+1}}{(\sqrt{\lceil n/2 \rceil} - 2)^{n+1}}.$$

Учитывая, что в $(n+1)$ -ю степень возводится величина, меньшая единицы (см. третье условие на $n(\varepsilon)$), получим

$$d_{(m)}^{\max} \cdot \left(\frac{(3 \cdot (m+2))}{\sqrt{\lceil n/2 \rceil} - 2}\right)^{n+1} \leq d_{(m)}^{\max} \cdot \left(\frac{(3 \cdot (m+2))}{\sqrt{\lceil n/2 \rceil} - 2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В первом слагаемом из (6) просто вынесем в числителе наибольшее из $1/\varphi^{2(n-k+4)}$, получим, что это слагаемое не превосходит

$$\frac{1}{\varphi^{2(m+4)}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k \varphi^{n-k+4} \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle} \leq \frac{1}{\varphi^{2(m+4)}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подводя итог, заметим, что $\varepsilon' < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$, а значит, утверждение леммы 6 верно.

ЛЕММА 7. Для любого n выполняется неравенство

$$2^n \frac{\varphi^{n+4}}{8\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{\varphi^2} \right)^k \left\langle \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle < S_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (3) разобьем внешнюю сумму на две части, в первую войдут слагаемые для k от 1 до $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$, во вторую для k от $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$ до $n-1$.

В первом случае $k \leq (n-1)/2$ и по лемме 4,б) наименьшее из произведений $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$ равно $F_6^{k-1} \cdot F_{n-2k+5}$.

При четном n получим

$$\begin{aligned} F_6^{k-1} \cdot F_{n-2k+5} &= \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-2k+5} - \psi^{n-2k+5}) = \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-2k+5} + |\psi|^{n-2k+5}) \\ &> \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \varphi^{n-2k+5} > \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \varphi^{n-2k+4}. \end{aligned}$$

При нечетном n получим

$$\begin{aligned} F_6^{k-1} \cdot F_{n-2k+5} &> F_6^{k-1} \cdot F_{n-2k+4} = \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-2k+4} - \psi^{n-2k+4}) \\ &= \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-2k+5} + |\psi|^{n-2k+4}) > \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \varphi^{n-2k+4}. \end{aligned}$$

Если $k > (n-1)/2$, то $n-1 = 2k-p$, где $p > 0$. При этом наименьшее из произведений чисел Фибоначчи имеет вид $F_6^{k-p} \cdot F_5^p$. Покажем, что в этом случае просто выполняется неравенство

$$\frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \varphi^{n-2k+4} < 8^{k-p} \cdot 5^p. \quad (7)$$

Действительно,

$$8^{k-p} \cdot 5^p = \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{5}{8} \right)^p \cdot 8\sqrt{5};$$

с другой стороны, так как $n-2k = 1-p$, то

$$\frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^{n-2k+4} = \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\varphi} \right)^p \cdot \varphi^5.$$

При наименьшем возможном p , равном 1, верно, что

$$\frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\varphi} \right) \cdot \varphi^5 < \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{5}{8} \right) \cdot 8\sqrt{5}.$$

Так как $1/\varphi < 5/8$, то и для всех больших p верно

$$\frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\varphi} \right)^p \cdot \varphi^5 < \frac{8^{k-1}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{5}{8} \right)^p \cdot 8\sqrt{5},$$

откуда и следует неравенство (7).

Подставляя полученную оценку в (3) вместо $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$, вынося ее за знак внутренней суммы и используя лемму 2, получим утверждение леммы 7.

Из лемм 6 и 7 следует основная теорема

ТЕОРЕМА. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $n(\varepsilon)$, верны следующие оценки для числа S_n неповторных булевых функций от n переменных в базисе $B_2 = \{\&, \vee, \oplus, -\}$:

$$2^n \frac{\varphi^{n+4}}{8\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{\varphi^2}\right)^k \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle < S_n < 2^n \frac{\varphi^{n+4}}{5\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2\varphi}\right)^k \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle\right) \cdot (1+\varepsilon), \tag{8}$$

где $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ – “золотое сечение” Фидия, $\left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\right\rangle$ – числа Эйлера второго порядка.

5. Вычислительные результаты по полученным оценкам для некоторых значений n . В следующей таблице приведены некоторые вычислительные результаты по полученным оценкам (8) для n от 2 до 120 при $\varepsilon = 0$. Для сравнения даны аналогичные значения по оценкам (1), а также точные значения числа S_n , вычисленные по ранее полученным рекуррентным формулам.

ТАБЛИЦА. Оценки числа неповторных булевых функций от n переменных в полном бинарном базисе $B_2 = \{\&, \vee, -\}$

n	Нижняя оценка по (1)	Нижняя оценка по (8)	Точное значение S_n (первые семь цифр)	Верхняя оценка по (8)	Верхняя оценка по (1)
2	6	6.130495	10	9.919350	10
3	54	69.98823	114	113.7961	150
4	810	1319.765	2154	2155.232	3750
5	17010	34806.79	56946	57086.67	131250
6	459270	1179866	1935210	1943433	5906250
7	$1.515591 \cdot 10^7$	$4.887491 \cdot 10^7$	$8.037112 \cdot 10^7$	$8.085109 \cdot 10^7$	$3.248438 \cdot 10^8$
8	$5.910805 \cdot 10^8$	$2.392516 \cdot 10^9$	$3.944568 \cdot 10^9$	$3.974806 \cdot 10^9$	$2.111484 \cdot 10^{10}$
9	$2.659862 \cdot 10^{10}$	$1.351296 \cdot 10^{11}$	$2.233741 \cdot 10^{11}$	$2.254611 \cdot 10^{11}$	$1.583613 \cdot 10^{12}$
10	$1.356530 \cdot 10^{12}$	$8.649483 \cdot 10^{12}$	$1.433557 \cdot 10^{13}$	$1.449341 \cdot 10^{13}$	$1.346071 \cdot 10^{14}$
12	$4.871298 \cdot 10^{15}$	$4.892367 \cdot 10^{16}$	$8.151499 \cdot 10^{16}$	$8.268318 \cdot 10^{16}$	$1.342706 \cdot 10^{18}$
15	$2.041926 \cdot 10^{21}$	$4.053679 \cdot 10^{22}$	$6.808012 \cdot 10^{22}$	$6.939403 \cdot 10^{22}$	$2.605689 \cdot 10^{24}$
20	$1.906293 \cdot 10^{31}$	$1.178095 \cdot 10^{33}$	$2.005029 \cdot 10^{33}$	$2.060356 \cdot 10^{33}$	$3.128355 \cdot 10^{35}$
30	$6.796875 \cdot 10^{52}$	$4.070086 \cdot 10^{55}$	$7.113809 \cdot 10^{55}$	$7.429163 \cdot 10^{55}$	$1.844688 \cdot 10^{59}$
40	$8.184924 \cdot 10^{75}$	$4.748807 \cdot 10^{79}$	$8.524153 \cdot 10^{79}$	$9.046780 \cdot 10^{79}$	$3.673803 \cdot 10^{84}$
50	$1.317544 \cdot 10^{100}$	$7.406277 \cdot 10^{104}$	$1.365333 \cdot 10^{105}$	$1.472591 \cdot 10^{105}$	$9.780341 \cdot 10^{110}$
60	$1.655985 \cdot 10^{125}$	$9.018840 \cdot 10^{130}$	$1.707508 \cdot 10^{131}$	$1.871567 \cdot 10^{131}$	$2.032977 \cdot 10^{138}$
80	$3.377076 \cdot 10^{177}$	$1.726422 \cdot 10^{185}$	$3.447536 \cdot 10^{185}$	$3.902530 \cdot 10^{185}$	$1.133945 \cdot 10^{195}$
100	$1.150977 \cdot 10^{232}$	$5.523053 \cdot 10^{241}$	$1.163302 \cdot 10^{242}$	$1.359950 \cdot 10^{242}$	$1.057043 \cdot 10^{254}$
120	$2.293173 \cdot 10^{288}$	$1.032889 \cdot 10^{300}$	$2.294666 \cdot 10^{300}$	$2.770395 \cdot 10^{300}$	$5.760206 \cdot 10^{314}$

Заключение. Отметим (см. таблицу), что формулы (8) оценивают числа S_n с точностью до порядка; кроме того, в силу достаточно грубого оценивания величин $\prod_{i=1}^k F_{q_i+4}$, эти оценки можно несколько улучшить.

Другое направление исследования может быть нацелено на получение оценок более удобного вида, не содержащих специальных чисел, вроде чисел Эйлера. Нужно отметить, что в данном направлении получены некоторые результаты и преобразования носят в большей степени технический характер. Действительно, задача состоит в упрощении выражений вида

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k \cdot \left\langle \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle,$$

которое при $a = 2$ уже было произведено в ряде работ [4]–[6] при построении асимптотики числа неповторных булевых функций в элементарном базисе $B_0 = \{\&, \vee, -\}$.

Заключительным шагом в этом направлении может стать получение асимптотики числа неповторных булевых функций в полном бинарном базисе $B_2 = \{\&, \vee, \oplus, -\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Зубков, “О числе неповторных булевых функций в базисе $\{\&, \vee, \oplus, -\}$ ”, *Дискретн. анализ и исслед. опер. Сер. 1*, **10**:1 (2003), 41–60.
- [2] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998.
- [3] А. С. Балюк, С. Ф. Винокуров, А. И. Гайдуков, О. В. Зубков, К. Д. Кириченко, В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев, Ю. В. Перязева, *Избранные вопросы теории булевых функций*, ред. С. Ф. Винокуров, Н. А. Перязев, Физматлит, М., 2001.
- [4] О. В. Зубков, “Нахождение числа неповторных булевых функций в элементарном базисе при помощи чисел Стирлинга второго рода”, *Вест. Бурятск. ун-та. Сер. 13. Матем., информ.*, 2005, № 2, 12–16.
- [5] О. В. Зубков, “Нахождение числа неповторных булевых функций в элементарном базисе в виде сходящегося ряда”, Труды VII Международной конференции “Дискретные модели в теории управляющих систем”, 2006, 125–129.
- [6] О. В. Зубков, “Асимптотика числа неповторных булевых функций в элементарном базисе”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 822–828.

О. В. Зубков

Иркутский государственный педагогический университет

E-mail: oleg.zubkov@mail.ru

Поступило

26.09.2008

Исправленный вариант

22.10.2009