Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Об одной лемме Ф. А. Березина, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 787–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:52:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об одной лемме Ф. А. Березина

А. М. Бикчентаев

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, E – тождественный оператор в $\mathcal{H}$.

Пусть A, B – самосопряженные операторы в $\mathcal{H}$, $B - A$ рассматривается как возмущение оператора A , функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Одна из задач теории возмущений состоит в оценке малости $f(B) - f(A)$ (в том или ином смысле) в зависимости от возмущения $B - A$. В [1], [2] методами двойных операторных интегралов Стильбеса эта задача изучалась для функций f , производная которых принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ при некотором $\alpha > 0$ и сепарабельного $\mathcal{H}$. С помощью трансформаторов была получена оценка $\|f(B) - f(A)\|_J \leq c_\alpha \|B - A\|_J$; здесь $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, J – идеал Шэрттена–фон Неймана S_p , $1 \leq p < \infty$, или идеал компактных операторов $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ с равномерной нормой.

В [3; гл. 3] исследованы операторы в пространстве состояний (бозевском или фермиевском) $\mathcal{H}$, выражающиеся через операторы рождения и уничтожения с помощью многочленов не выше второй степени. При нахождении канонического вида квадратичных операторов использована следующая

ЛЕММА 1 [3; гл. 3, с. 146]. Пусть C, K – самосопряженные операторы, причем $C \geq \mu E$, $C^2 + K \geq \mu_1^2 E$, $\mu, \mu_1 > 0$. Рассмотрим оператор $X = \sqrt{C^2 + K} - C$.

- 1) Если $K \in S_1$, то $X \in S_1$.
- 2) Если $K \in S_2$, то $X \in S_2$.

При доказательстве утверждения 2) Березин применил оригинальный трюк с трансформатором на операторах Гильберта–Шмидта и использовал утверждение 1) (см. [3; с. 146–148]. В этой заметке получено усиление и обобщение (на все идеалы с унитарно-инвариантной нормой [4; гл. 3, § 2]) этой леммы в случае, когда оператор C ограничен.

Пусть $|T| = \sqrt{T^*T}$ для $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $C = C^+ - C^-$ – разложение самосопряженного оператора $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ на положительную и отрицательную части. Через $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ обозначим решетку проекторов в $\mathcal{H}$.

ЛЕММА 2. Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $p, q \geq 0$. Если $A + B$ обратим, то $|A|^p + |B|^q$ также обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что оператор $T_n = |A|^{2n} + |B|^{2n}$ обратим. Поскольку $(A + B)^*$ также обратим, оператор $C = (A + B)^*(A + B) \geq 0$ и обратим как произведение обратимых операторов. Поэтому $C \geq \mu E$ для некоторого $\mu > 0$. Поскольку $D = (A - B)^*(A - B) \geq 0$, имеем

$$\mu E \leq C + D = 2A^*A + 2B^*B = 2T_1.$$

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Поэтому T_1 обратим. Далее, для $A_1 = |A|^2$, $B_1 = |B|^2$ положим $C_1 = (A_1 + B_1)^2$, $D_1 = (A_1 - B_1)^2$. Тогда $4C_1 \geq \mu^2 E$, $D_1 \geq 0$ и

$$\frac{\mu^2}{4} E \leq C_1 + D_1 = 2|A|^4 + 2|B|^4 = 2T_2.$$

Поэтому T_2 обратим. Продолжение процесса дает нужный результат.

Шаг 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\max\{p, q\} \leq 2^n$. Из шага 1 имеем $T_n \geq \alpha_n E$ для некоторого $\alpha_n > 0$. Не ограничивая общности считаем, что $\max\{\|A\|, \|B\|\} \leq 1$. Если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ неотрицателен и $\|T\| \leq 1$, то $T^\beta \geq T$ для всех $0 \leq \beta \leq 1$. Поэтому

$$\alpha_n E \leq T_n \leq (|A|^{2^n})^{p/2^n} + (|B|^{2^n})^{q/2^n} = |A|^p + |B|^q.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ неотрицательны и $A - B$ обратим, то $A + B$ обратим.

В частности, если $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ и $P - Q$ обратим, то и $P + Q$ обратим [5; следствие 3.2, (v)].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть самосопряженные операторы $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X \geq 0$ и $-X \leq Y \leq X$. Если Y обратим, то и X обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применить следствие 1 к операторам

$$A = \frac{X + Y}{2}, \quad B = \frac{X - Y}{2}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, самосопряженные операторы $C, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причем $C^{2^m} + K \geq 0$, оператор $C + \sqrt[2^m]{C^{2^m} + K} \geq 0$ и обратим. Рассмотрим оператор

$$X = \sqrt[2^m]{C^{2^m} + K} - C. \quad (1)$$

Пусть J – идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с унитарно-инвариантной нормой. Имеем

- 1) $K \in J \Leftrightarrow X \in J$;
- 2) $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. Пусть $m = 1$.

- 1) Пусть $K \in J$. Заметим, что оператор

$$Z = C + \frac{X}{2} = \frac{C + \sqrt{C^2 + K}}{2} \geq 0$$

и обратим. Из (1) имеем

$$X^2 + XC + CX = XZ + ZX = K \in J. \quad (2)$$

Если операторы $A, B, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ и $AT + TB \in J$, то

$$\sqrt{A}T\sqrt{B} \in J, \quad 2\|\sqrt{A}T\sqrt{B}\|_J \leq \|AT + TB\|_J$$

(см. [6; с. 54]). Из (2) имеем $Y = \sqrt{Z}X\sqrt{Z} \in J$, поэтому $X = Z^{-1/2}YZ^{-1/2} \in J$.

- 2) Для самосопряженного $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ имеет место спектральное представление

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k, \quad (3)$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $\dim P_k \mathcal{H} < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $P_k P_l = 0$ при $k \neq l$ и ряд сходится по норме [7; гл. 5, теорема 2.10]. Пусть

$$K_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим два частных случая.

I) Пусть $K \geq 0$, т.е. в (3) все $\lambda_k > 0$. В силу [8; гл. 6, задача 14] имеем $\sqrt{C^2 + K_n} \rightarrow \sqrt{C^2 + K}$ по равномерной норме при $n \rightarrow \infty$, поэтому существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что операторы $C + \sqrt{C^2 + K_n} \geq 0$ и обратимы для всех $n \geq N$. Конечномерные операторы K_n являются ядерными, поэтому операторы $X_n = \sqrt{C^2 + K_n} - C$ ($n \geq N$) ядерные в силу утверждения 1) теоремы. Поскольку $X_n \rightarrow X$ по равномерной норме при $n \rightarrow \infty$, имеем $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

II) Пусть $K \leq 0$, т.е. в (3) все $\lambda_k < 0$. Тогда $K_n \geq K$ и $\sqrt{C^2 + K_n} \geq \sqrt{C^2 + K}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ в силу операторной монотонности функции $t \mapsto \sqrt{t}$ ($t \geq 0$). Для каждой пары C, K_n ($n \in \mathbb{N}$) выполнены условия утверждения 1) теоремы. Как и в случае I) получаем, что X_n ядерные и $X_n \rightarrow X$ по равномерной норме при $n \rightarrow \infty$. Итак, $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Общий случай. Пусть $K = K^+ - K^-$; тогда (см. (3))

$$K^+ = \sum_{\{k \in \mathbb{N}: \lambda_k > 0\}} \lambda_k P_k, \quad K^- = K^+ - K, \quad K^+, K^- \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Положим $C_1 = \sqrt{C^2 + K^+}$, и пусть $Y = \sqrt{C_1^2 - K^-} - C_1$. Тогда $C_1^2 - K^- = C^2 + K \geq 0$, оператор $C_1 + \sqrt{C_1^2 - K^-} \geq 0$ и обратим в силу предположения и операторной монотонности функции $t \mapsto \sqrt{t}$ ($t \geq 0$). Оператор $Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ в силу II). Оператор $W = \sqrt{C^2 + K^+} - C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ в силу I). Следовательно, $X = Y + W \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Пусть утверждение теоремы верно для всех $l = 1, 2, \dots, m-1$. Перепишем (1) в виде

$$X = {}^{2^{m-1}}\sqrt{\sqrt{C^{2^m} + K} - C}.$$

Поскольку $C + {}^{2^m}\sqrt{C^{2^m} + K}$ обратим, из леммы 2 следует, что $C^{2^{m-1}} + \sqrt{C^{2^m} + K} \geq 0$ и обратим.

Пусть $K \in J$ (для $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ проверка аналогична). В силу установленного для $l = 1$ и операторов $C_1 = C^{2^{m-1}}$, K утверждения имеем $\sqrt{C^{2^m} + K} - C^{2^{m-1}} = X_1 \in J$, т.е. $\sqrt{C^{2^m} + K} = C^{2^{m-1}} + X_1$ с $X_1 \in J$. Теперь $X = {}^{2^{m-1}}\sqrt{C^{2^{m-1}} + X_1} - C \in J$ по предположению индукции.

Импликации “ $\Leftarrow$ ” в утверждениях 1) и 2) очевидны. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $m, q \in \mathbb{N}$, q нечетно, $p = 2^m/q > 1$, самосопряженные операторы $C, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причем $C^p + K \geq 0$, оператор $C^{1/q} + \sqrt[p]{C^p + K} \geq 0$ и обратим. Рассмотрим оператор $X = \sqrt[p]{C^p + K} - C$.

- 1) Если $K \in J$, то $X, C^- \in J$.
- 2) Если $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, то $X, C^- \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \in J$. Имеем

$$X = \sqrt[p]{C^p + K} - C = ({}^{2^m}\sqrt{C^p + K})^q - C.$$

В силу вышедоказанного ${}^{2^m}\sqrt{C^p + K} = C^{1/q} + K_1$ с некоторым $K_1 \in J$. Поэтому $X = (C^{1/q} + K_1)^q - C \in J$.

Если $C = C^+ - C^-$, то $|C| = C^+ + C^-$ и $C^2 = |C|^2$. Пусть $V = \sqrt[p]{C^p + K} - |C|$; тогда $2C^- = X - V$. Для $|C|$ и K условия следствия также выполнены, поэтому $X, V \in J$. Остальное очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия, накладываемые на операторы $C, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ в теореме, более мягкие, чем в лемме Березина. Для ненулевого конечномерного $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ положим $K = P$ (соответственно $K = -P$) и $C = E - 2P$ (соответственно $C = E$). В этом тривиальном случае $X = (1 + \sqrt{2})K$ (соответственно $X = -K$) и условия теоремы выполнены, но первое (соответственно второе) неравенство в условиях леммы 1 не выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существование ограниченной производной f' является необходимым для справедливости формулы следов Крейна (см., например, [9], [10; теорема 1.14])

$$\mathrm{Tr}(f(B) - f(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \xi_{B,A}(x) dx, \quad (4)$$

где $\xi_{B,A} \in L_1(\mathbb{R})$ – функция спектрального сдвига операторов A и B , не зависящая от f .

Для функции $f(t) = \sqrt{t}$ ($t \geq 0$) и оператора $C \geq 0$ имеем в теореме $X = f(C^2 + K) - f(C^2)$, но производная $f' \notin \mathrm{Lip} \alpha$ при любом $\alpha > 0$ и не ограничена на $(0, 1)$. Поэтому даже в этом частном случае теорема не перекрывается результатами [1], [2], [9].

Утверждение 1) леммы 1 можно получить и из (4). Для этого нужно положить $f(t) = 0$ для $t \leq -\varepsilon$, $f(t) = \sqrt{t}$ для $t \geq \varepsilon$ и доопределить f в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ надлежащим образом; здесь $\varepsilon = \varepsilon(C, K) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с $A - B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ имеем $|A| - |B| \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (см. [11; с. 312]). Приведем новое доказательство этого факта. Если $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $A - B \in S_p$ для некоторого $1 < p < \infty$, то $\| |A| - |B| \|_p \leq \beta_p \|A - B\|_p$, где β_p зависит только от p [12]. По спектральной теореме для $\mathrm{Re}(A - B), \mathrm{Im}(A - B) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (см. (3)) получаем

$$A - B = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k + i \sum_{k=1}^{\infty} b_k Q_k;$$

здесь $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, конечномерные $P_k, Q_k \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A_n = B + \sum_{k=1}^n a_k P_k + i \sum_{k=1}^n b_k Q_k \rightarrow A$$

при $n \rightarrow \infty$ по равномерной норме. Так как $A_n^* \rightarrow A^*$, имеем $A_n^* A_n \rightarrow A^* A$; тем самым, $|A_n| \rightarrow |A|$ при $n \rightarrow \infty$ по равномерной норме. Поскольку $A_n - B \in S_2$, имеем $|A_n| - |B| \in S_2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $|A| - |B| \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $|A| + |B|$ обратим, J – идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с унитарно-инвариантной нормой. Если $A - B \in J$, то $|A| - |B| \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $K = A - B$, $K_1 = B^* K + K^* B + K^* K \in J$ имеем $|A| - |B| = \sqrt{|B|^2 + K_1} - |B|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обратима, $f(0) = 0$ и самосопряженные операторы $C, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Имеем

$$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff X = f(f^{-1}(C) + K) - C \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Действительно, пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ – алгебра Калкина и $\pi: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ – естественная проекция. Поскольку π является гомоморфизмом C^* -алгебр, для $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ имеем

$$\pi(f(f^{-1}(C) + K)) = f(\pi(f^{-1}(C) + K)) = f(\pi(f^{-1}(C))) = \pi(C).$$

Если $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, то

$$\begin{aligned} \pi(C) &= \pi(f(f^{-1}(C) + K)) = f(\pi(f^{-1}(C) + K)), \\ \pi(f^{-1}(C) + K) &= f^{-1}(\pi(C)) = \pi(f^{-1}(C)). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Проблемы математической физики, **1**, Изд-во ЛГУ, Л., 1966, 33–67. [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Проблемы математической физики, **2**, Изд-во ЛГУ, Л., 1967, 26–60. [3] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, 2-е изд., доп., Наука, М., 1986. [4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965. [5] J. J. Koliha, V. Rakočević, *Integral Equations Operator Theory*, **52**:1 (2005), 125–134. [6] F. Hiai, H. Kosaki, *Means of Hilbert Space Operators*, Lecture Notes in Math., **1820**, Springer-Verlag, Berlin, 2003. [7] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [8] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1, Функциональный анализ, Мир, М., 1977. [9] М. Г. Крейн, *Первая летняя математическая школа*, Ч. I, Наукова думка, Киев, 1964, 103–187. [10] B. Simon, *Mathematical Quantum Theory*, v. II (Vancouver, BC, 1993), CRM Proc. Lecture Notes, **8**, Schrödinger operators, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 109–149. [11] H. Kosaki, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **28**:2 (1992), 299–313. [12] E. B. Davies, *J. London Math. Soc.* (2), **37**:1 (1988), 148–157.

А. М. Бикчентаев

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета
E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило

30.12.2009