Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О жадном алгоритме для словарей с ограниченной совокупной когерентностью, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 792–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:06:49

О жадном алгоритме для словарей с ограниченной совокупной когерентностью

Е. Д. Лившиц

Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство. Множество $\mathcal{D} \subset H$ называют *словарем*, если для любого $g \in \mathcal{D}$ выполнено $\|g\| = 1$ и $\overline{\text{span}} \mathcal{D} = H$. В последние годы большую значимость получила задача построения по элементу $f \in H$ конечной линейной комбинации элементов словаря $\sum_{k=1}^m c_k(f) g_k(f)$, $c_k(f) \in \mathbb{R}$, $g_k(f) \in \mathcal{D}$, достаточно хорошо приближающей f . Эта задача достаточно эффективно решается с помощью жадных алгоритмов [1]. Ниже приведены две наиболее известные их модификации.

Чисто жадный алгоритм (ЧЖА). Пусть задана целевая функция

$$f_0^{\text{PGA}} := f_0 := f \in H.$$

Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем вектор $g_{m+1} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$|\langle f_m, g_{m+1} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m, g \rangle|$$

и определяем

$$f_{m+1} := f_{m+1}^{\text{PGA}} := f_m - \langle f_m, g_{m+1} \rangle g_{m+1}.$$

Ортогональный жадный алгоритм (ОЖА). Пусть задана целевая функция

$$f_0^{\text{OGA}} := f \in H.$$

Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем вектор $g_{m+1}^{\text{OGA}} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$|\langle f_m^{\text{OGA}}, g_{m+1}^{\text{OGA}} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m^{\text{OGA}}, g \rangle|,$$

и определяем

$$G_{m+1}^{\text{OGA}} = \text{Proj}_{g_1^{\text{OGA}}, \dots, g_{m+1}^{\text{OGA}}}(f), \quad f_{m+1}^{\text{OGA}} := f - G_{m+1}^{\text{OGA}}.$$

Тем самым, для каждого $m \geq 1$ построены m -членные приближения к f :

$$\sum_{k=1}^m \langle f_{k-1}, g_k \rangle g_k \quad \text{и} \quad G_m^{\text{OGA}}.$$

В настоящей статье будет изучаться скорость сходимости жадных алгоритмов для функций из класса $\mathcal{A}_0(\mathcal{D})$ – конечных линейных комбинаций элемента словаря и классов $\mathcal{A}^p(\mathcal{D})$, $1 \leq p < 2$. Положим для $M \geq 0$

$$\mathcal{A}^p(\mathcal{D}, M) := \overline{\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda g^\lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^p \leq M^p, c_\lambda \in \mathbb{R}, g^\lambda \in \mathcal{D}, \#\Lambda < \infty \right\}},$$

где замыкание берется в норме пространства H . Пусть

$$\mathcal{A}^p(\mathcal{D}) := \bigcup_{M \geq 0} \mathcal{A}^p(\mathcal{D}, M),$$

$$|f|_p := |f|_{\mathcal{A}^p(\mathcal{D})} := \inf \{ M \geq 0 : f \in \mathcal{A}^p(\mathcal{D}, M) \}, \quad f \in \mathcal{A}^p(\mathcal{D}).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00799 и 09-01-12173).

Из результатов ДеВора, Темлякова и автора [2], [3] вытекает, что в классе $\mathcal{A}^1(\mathcal{D})$ ОЖА дает оптимальную (для этого класса) скорость сходимости $C|f|_1 m^{-1/2}$, а ЧЖА нет. На более узких классах, например $A_0(\mathcal{D})$, скорость сходимости ОЖА не превышает $Cm^{-1/2}$ и не является оптимальной. В то же время, если словарь $\mathcal{D}$ обладает некоторыми дополнительными свойствами, жадные алгоритмы могут сходиться значительно быстрее. Это направление, называемое *разреженными аппроксимациями* (sparse approximation), в последнее время интенсивно развивается (см. [4]–[7] и др.). Следуя Троппу [6], будем называть *совокупной когерентностью* словаря $\mathcal{D}$ величину

$$\mu_1(\mathcal{D}) := \sup_{g \in \mathcal{D}} \sum_{\tilde{g} \in \mathcal{D}, \tilde{g} \neq g} |\langle \tilde{g}, g \rangle|. \quad (1)$$

В вышеуказанных работах доказывался следующий базовый результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < 1/2$ и $f \in \mathcal{A}_0(\mathcal{D})$. Тогда

$$G_m^{\text{OGA}}(f, \mathcal{D}) = f, \quad m \geq m_0, \quad \|f_m\| \leq C \exp(-c(f)m), \quad m \geq 0, \quad c(f) > 0.$$

Для словарей с малой совокупной когерентностью ЧЖА оптимален в $\mathcal{A}^p(\mathcal{D})$, если же $\mu_1(\mathcal{D})$ велико, то оптимальная скорость может не достигаться.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < 1/3$, $p, 1 \leq p < 2$ и $f \in \mathcal{A}^p(\mathcal{D})$. Тогда

$$\|f_m^{\text{PGA}}\| \leq C(p, \mu_1(\mathcal{D})) |f|_p m^{-1/p+1/2} \quad \text{для } m \geq 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < 1/3$ и $f \in \mathcal{A}^1(\mathcal{D})$. Тогда

$$\|f_m^{\text{PGA}}\| \leq |f|_1 m^{-1/2} \quad \text{для } m \geq 1.$$

ТЕОРЕМА 4. Существует словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < \infty$, $f_0 \in \mathcal{A}_0(\mathcal{D})$, $\beta > 0$ и $C > 0$ такой, что для любого $m \geq 1$

$$\|f_m^{\text{PGA}}\| \geq C m^{-1/2+\beta}.$$

Приведем основные шаги доказательства теорем 2 и 3. Если не оговорено противное, будем считать, что $c_\lambda \in \mathbb{R}$, $g^\lambda \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \Lambda$. Следующие две леммы являются стандартными в теории разреженных аппроксимаций.

ЛЕММА 1. Пусть заданы словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < 1/2$ и конечное $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Тогда имеет место неравенство

$$(1 - 2\mu_1(\mathcal{D})) \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^2 \leq \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda g^\lambda \right\|^2 \leq (1 + 2\mu_1(\mathcal{D})) \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^2.$$

ЛЕММА 2. Пусть задано конечное множество индексов $\Lambda \subset \mathbb{N}$ и $\epsilon > 0$. Если для элемента f имеет место представление

$$f = f_\epsilon + \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda g^\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^p = |f|_p^p, \quad \|f_\epsilon\| < \epsilon, \quad (2)$$

то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\langle f, g^{\lambda_0} \rangle - c_{\lambda_0}| &< \mu_1(\mathcal{D}) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda| + \epsilon & \text{для } \lambda_0 \in \Lambda, \\ |\langle f, g^{\lambda_0} \rangle| &< \mu_1(\mathcal{D}) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda| + \epsilon & \text{для } \lambda_0 \notin \Lambda. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть задан словарь $\mathcal{D}$ с $\mu_1(\mathcal{D}) < 1/3$, $f \in \mathcal{A}^p(\mathcal{D})$ и $t \geq 1$. Предположим, что для $n = t - 1$, конечного $\Lambda \subset \mathbb{N}$ и $\epsilon > 0$ имеет место представление

$$f_n = f_n^{\text{PGA}}(f, \mathcal{D}) = f_\epsilon + \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda, n} g^\lambda, \quad c_{\lambda, n} \in \mathbb{R}, \quad g^\lambda \in \mathcal{D}, \quad \|f_\epsilon\| < \epsilon. \quad (3)$$

Если $\epsilon < (1/6)(1 - 3\mu_1(\mathcal{D})) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|$, то для $n = t$ будет иметь место представление (3) с теми же Λ и f_ϵ и будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m}|^p &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|^p - 2^{-p}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))^p \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|^p, \\ \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m}| &\leq \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. С помощью леммы 2 устанавливается, что существует $\lambda_0 \in \Lambda$ для которого

$$\begin{aligned} |\langle f, g^{\lambda_0} \rangle| &= \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f, g \rangle| > (1 - \mu_1(\mathcal{D})) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}| - \epsilon, \\ |c_{\lambda_0, m-1}| &> (1 - 2\mu_1(\mathcal{D})) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}| - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 2 выводим, что для f_m имеет место представление (3) с

$$c_{\lambda, m} = c_{\lambda, m-1}, \quad \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}, \quad c_{\lambda_0, m} = c_{\lambda_0, m-1} - \langle f, g^{\lambda_0} \rangle.$$

При этом

$$\begin{aligned} |c_{\lambda_0, m}| &\leq |c_{\lambda_0, m-1}| - (1 - 3\mu_1(\mathcal{D})) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}| + 3\epsilon \\ &\leq |c_{\lambda_0, m-1}| - 2^{-1}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D})) \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|, \\ |c_{\lambda_0, m}|^p &\leq |c_{\lambda_0, m-1}|^p - 2^{-p}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))^p \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $k \geq 1$. Для произвольного ϵ

$$0 < \epsilon < \frac{1}{6}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))k^{-1/p}|f|_p, \quad (5)$$

для элемента f найдется представление (2). Положим $c_{\lambda, 0} := c_\lambda$. Докажем, что существует n , $0 \leq n \leq k$, для которого имеют место неравенства

$$\max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, n}| \leq c_1(p)c_2(\mu_1(\mathcal{D}))k^{-1/p}|f|_p, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, n}|^p \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, 0}|^p = |f|_p^p. \quad (6)$$

Для каждого $m = 1, \dots, k$ для $n = m - 1$ имеет место представление (3) и выполнено следующее условие: или $\max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}| \leq k^{-1/p}|f|_p$, и тогда в качестве n можно взять $n = m - 1$, или $\max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}| > k^{-1/p}|f|_p$, тогда согласно (5) будет выполняться условие на ϵ в лемме 3. По лемме 3 будет иметь место представление (3) для $n = m$, и при этом с учетом (3) и (4)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m}|^p \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|^p - 2^{-p}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))^p \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m-1}|^p = \dots \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, 0}|^p - \sum_{l=1}^m 2^{-p}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))^p \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, l-1}|^p \\ &\leq |f|_p^p - m2^{-p}(1 - 3\mu_1(\mathcal{D}))^p \max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda, m}|^p, \end{aligned}$$

что гарантирует выполнение (6) для $n = k$. Используя (6), оцениваем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda,n}|^2 &= \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda,n}|^p |c_{\lambda,n}|^{2-p} = \left(\max_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda,n}| \right)^{2-p} \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_{\lambda,n}|^p \\ &\leq (c_3(p) c_4(\mu_1(\mathcal{D}))) k^{-(2-p)/p} |f|_p^{2-p} |f|_p^p = c_3(p) c_4(\mu_1(\mathcal{D})) k^{-2/p+1} |f|_p^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство треугольника, лемму 1 и (3), запишем

$$\begin{aligned} \|f_k\| &\leq \|f_n\| \leq \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda,n} g^\lambda \right\| + \|f_\epsilon\| \leq \left((1 + 2\mu_1(\mathcal{D})) \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda,n}^2 \right)^{1/2} + \epsilon \\ &\leq C(p, \mu_1(\mathcal{D})) k^{-1/p+1/2} |f|_p + \epsilon. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, с учетом того, что ϵ может быть выбран сколь угодно малым, завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из леммы 3 вытекает, что $|f_m|_1 \leq |f|_1$, $m \geq 0$. Согласно лемме 3.5 из работы [2], для $m \geq 0$ имеет место неравенство

$$|\langle f_m, g_{m+1} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m, g \rangle| \geq \frac{\|f_m\|^2}{|f_m|_1} \geq \frac{\|f_m\|^2}{|f|_1}.$$

По определению ЧЖА

$$\|f_{m+1}\|^2 = \|f_m\|^2 - \langle f_m, g_{m+1} \rangle^2 \leq \|f_m\|^2 - \left(\frac{\|f_m\|^2}{|f|_1} \right)^2 = \|f_m\|^2 \left(1 - \frac{\|f_m\|^2}{|f|_1^2} \right).$$

Применяя лемму 3.4 из работы [2] для $a_m = \|f_{m-1}\|^2$ и $A = |f|_1^2$ с учетом неравенства $a_1 = \|f_0\|^2 \leq |f|_1^2$, получаем, что для $m \geq 1$

$$\|f_{m-1}\|^2 = a_m \leq A m^{-1} = |f|_1^2 m^{-1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. N. Temlyakov, *Acta Numer.*, **17** (2008), 235–409. [2] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, *Adv. Comput. Math.*, **5**:2–3 (1996), 173–187. [3] Е. Д. Лившиц, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:6 (2009), 125–144. [4] A. C. Gilbert, M. Muthukrishnan, M. J. Strauss, *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Baltimore, MD, 2003), 2003, 243–252. [5] R. Gribonval, M. Nielsen, *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, Lect. Notes Comput. Sci., **3195**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 201–208. [6] J. A. Tropp, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **50**:10 (2004), 2231–2242. [7] D. L. Donoho, M. Elad, V. N. Temlyakov, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:1 (2006), 6–18.

Е. Д. Лившиц

Эверноут Корпорейшн, г. Москва

E-mail: livshitz@rambler.ru

Поступило

02.11.2009