Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, О многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:46:34

О многочленах, наименее уклоняющихся от нуля

В. А. Юдин

Алгебраический многочлен $h(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_qx^q$ со старшим коэффициентом a_q , равным единице, называется *наименее уклоняющимся от нуля* в пространстве $L_p(-1, 1)$, если его норма

$$\|h(x)\|_p = \left\{ \int_{-1}^1 |h(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

принимает наименьшее значение. При $p = \infty$, $p = 1$ они были построены Чебышевым [1] и в совместной работе [2] Коркиным и Золотарёвым:

$$T_q(x) = 2^{1-q} \cos q\alpha, \quad U_q(x) = 2^{-q} \frac{\sin(q+1)\alpha}{\sin \alpha}, \quad \cos \alpha = x.$$

Для любого $q \in \mathbb{N}$ доказана их единственность. Они имеют ряд замечательных свойств [1]–[3], нам потребуются следующие три.

- 1) Все нули $T_q(x)$, $U_q(x)$ расположены на $[-1, 1]$.
- 2) Коэффициенты при старших степенях $T_q(x)$, $U_q(x)$ равны единице, причем справедливы разложения

$$T_q(x) = x^q - \frac{q}{4}x^{q-2} + \dots, \quad U_q(x) = x^q - \frac{q-1}{4}x^{q-2} + \dots.$$

Многочлены $T_q(x)$, $U_q(x)$ с четными q – четные функции, а с нечетными q – нечетные.

- 3) При любых q из $\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_{-1}^1 x^j \operatorname{sgn} U_q(x) dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, q-1, \quad j = q+1.$$

Через $P_{q,q'}$, $q \leq q'$, обозначим совокупность многочленов степени q' , у которых коэффициенты при x^q равны единице. Пусть

$$E(q, q') = \inf_{h \in P_{q,q'}} \|h(x)\|, \quad (1)$$

а $H(q, q')$ есть все множество многочленов $h(x)$ из $P_{q,q'}$, реализующих нижнюю грань в (1). Как и при $q = q'$, совокупность $H(q, q')$ назовем *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля*. Равенство $E(q, q) = E(q, q+1)$ справедливо для всех $q \geq 1$. Монотонность $E(q, q') \leq E(q, q)$ очевидна, а противоположное неравенство $E(q, q+1) \geq E(q, q)$ вытекает из простых аргументов: четную функцию достаточно приближать четными многочленами, а нечетную – нечетными. Пусть $q = 2k$ четно, тогда для любого $h(x)$ из $P_{q,q+1}$ имеет место $\|h(x)\| = \|h(-x)\|$. Следовательно, по неравенству Минковского

$$\|h(x)\| = \frac{1}{2}(\|h(x)\| + \|h(-x)\|) \geq \left\| \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) \right\|.$$

Многочлен $(1/2)(h(x) + h(-x))$ четный. Следовательно, он принадлежит $P_{q,q}$; таким образом, $E(2k, 2k+1) \geq E(2k, 2k)$. Подобным образом равенство $E(q, q+1) = E(q, q)$ устанавливается и для нечетных q . При $p = \infty$, $p = 1$ получаем одно и то же значение $E(q, q+1) = 2^{1-q}$, $q \in \mathbb{N}$.

Основной целью работы является описание множеств $H_{q,q+1}$ для L_∞ и L_1 . Между $p = \infty$ и $p = 1$ наблюдаются следующие отличия:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00598).

- а) для любых $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ и $p = \infty$ многочлен наименьшего уклонения единственен, т.е. $H_{q,q+1}$ состоит всего из одного многочлена $T_q(x)$; случай $q = 1$ является исключительным, единственность отсутствует;
- б) для любых $q \in \mathbb{N}$ и $p = 1$ многочлен наилучшего приближения неединственен.

В дальнейшем будем рассматривать только действительный случай, все коэффициенты многочленов действительны. Вначале рассмотрим пространство L_∞ и разберем случай $q = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Совокупностью $H_{1,2}$ является множество многочленов

$$x + \frac{\lambda}{2}(1 - x^2), \quad |\lambda| \leq 1. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любых действительных чисел a , b и $x \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left| ax + \frac{b}{2}(1 - x^2) \right| &\leq \max\{|a|, |b|\} \cdot \left[|x| + \frac{1 - x^2}{2} \right] \\ &= \max\{|a|, |b|\} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - |x|)^2 \right\} \leq \max\{|a|, |b|\}, \end{aligned}$$

то, выбирая $a = 1$ и $b = \lambda$, получаем (2), т.е. семейство (2) принадлежит $H_{1,2}$. Установим обратное: любой многочлен из $H_{1,2}$ представим в виде (2). Предположим, что с некоторыми c , d выполнено $\max_{|x| \leq 1} |x + c + dx^2| \leq 1$ или

$$-1 \leq x + c + dx^2 \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

В левой части неравенства положим $x = -1$, а в правой $-x = 1$. Получим $c + d \geq 0$ и $c + d \leq 0$. Заменяя d на $-c$, приходим к новым неравенствам

$$c(1 + x) \leq 1, \quad -1 \leq c(1 - x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

из которых следует, что $|c| \leq 1/2$. Утверждение доказано.

Для описания $H_{q,q+1}$, $p = \infty$, $q \geq 2$, предварительно установим следующее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in \mathbb{N}$ и для некоторого тригонометрического полинома

$$t(\alpha) = \sum_{k=0, k \neq q}^{2q-1} a_k \cos k\alpha$$

с действительными коэффициентами выполнено неравенство

$$|\cos q\alpha + t(\alpha)| \leq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Тогда $t(\alpha) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\lambda_\nu = a_\nu - a_{2q-\nu}$, $\mu_\nu = a_\nu + a_{2q-\nu}$, $\nu = 1, \dots, q-1$, преобразуем $t(\alpha)$ и найдем

$$\begin{aligned} t(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{q-1} \lambda_\nu (\cos \nu\alpha - \cos(2q-\nu)\alpha) + \mu_\nu (\cos \nu\alpha + \cos(2q-\nu)\alpha) \\ &= \sin q\alpha \sum_{\nu=1}^{q-1} \lambda_\nu \sin \nu\alpha + \cos q\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{q-1} \mu_\nu \cos \nu\alpha = \sin q\alpha B(\alpha) + \cos q\alpha A(\alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

В неравенстве (3) положим $\alpha = \pi j/q$, $\alpha = [\pi(q-j)]/q$, $j = 0, 1, \dots, q-1$, получим две серии неравенств

$$\left| 1 + \sum_{\nu=1}^{q-1} \mu_{\nu} \cos \frac{\nu\pi j}{2} \right| \leq 1, \quad \left| 1 - \sum_{\nu=1}^{q-1} \mu_{\nu} \cos \frac{\nu\pi j}{2} \right| \leq 1,$$

откуда найдем

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} \mu_{\nu} \cos \frac{\nu\pi j}{q} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, q-1.$$

Следовательно, у тригонометрического полинома $A(\alpha)$ порядка $q-1$ на T ($T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) имеется по крайней мере $2q-1$ нулей, что возможно лишь при $A(\alpha) \equiv 0$. Из представления (4) находим

$$t(\alpha) = \sin q\alpha \sum_{\nu=1}^{q-1} \lambda_{\nu} \sin \nu\alpha.$$

Поскольку в точках $j\pi/q$, $j = 0, 1, \dots, 2q-1$, $\cos q\alpha$ поочередно принимает свои наибольшее и наименьшее значения ± 1 , то из (3) получим, что в этих точках производная $t'(\alpha)$ обязана обращаться в нуль. Так как

$$t'(\alpha) = q \cos q\alpha \sum_{\nu=1}^{q-1} \lambda_{\nu} \sin \nu\alpha + \sin q\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{q-1} \nu \lambda_{\nu} \cos \nu\alpha,$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} \lambda_{\nu} \sin \frac{\nu\pi}{q} j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2q-1.$$

Полином $B(\alpha)$ имеет лишний нуль. Значит, $B(\alpha) \equiv 0$ и, следовательно, $t(\alpha) \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если тригонометрический полином $t(\alpha)$ из (3) имеет порядок, больший чем $2q-1$, то $t(\alpha)$ не обязан обращаться в нуль. Положим в (2) $x = \cos q\alpha$, получим

$$\left| \cos q\alpha + \frac{\lambda}{2} \sin^2 q\alpha \right| = \left| \cos q\alpha + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} \cos 2q\alpha \right| \leq 1, \quad \alpha \in T,$$

для любого λ , $|\lambda| \leq 1$. Отметим, что в качестве λ можно взять произвольный тригонометрический полином порядка $q-1$, у которого норма в $C[T]$ не превосходит единицы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $q \geq 2$ в пространстве $C[-1, 1]$ алгебраический многочлен наименьшего уклонения из $P_{q, q+1}$ единственен.

Пусть $x^q + h(x)$ принадлежит $H_{q, q+1}$, положим $x = \cos \alpha$. Из свойства 2 находим, что $h(\cos \alpha)$ не содержит гармоники $\cos q\alpha$, а $\cos^q \alpha$ содержит ее с коэффициентом 2^{1-q} . Поэтому с некоторыми коэффициентами $\{a_{\nu}\}_0^{q+1}$, $\nu \neq q$, справедливо неравенство

$$\left| 2^{1-q} \cos q\alpha + \sum_{\nu=0, \nu \neq q}^{q+1} a_{\nu} \cos \nu\alpha \right| \leq 2^{1-q}.$$

Так как при $q \geq 2$, $q+1 \leq 2q-1$, то из (3) находим, что $x^q + h(x) = T_q(x)$.

Для описания $H_{q, q+1}$ в пространстве $L(-1, 1)$ потребуется

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть

- 1) $f(x)$, $g(x)$ – непрерывные функции с конечным числом нулей на $[-1, 1]$;

2) имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sgn} g(x) dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx. \quad (5)$$

Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки на $[-1, 1]$.

Поскольку

$$\int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sgn} g(x) dx = \int_{-1}^1 |f(x)| \operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} g(x) dx = \int_{-1}^1 |f(x)| \operatorname{sgn}[f(x)g(x)] dx,$$

то в силу второго условия (5) имеем $f(x)g(x) > 0$ на $(-1, 1)$ за исключением конечного множества точек.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Любой многочлен из $H_{q,q+1}$ в пространстве $L(-1, 1)$ имеет вид

$$(1 + \lambda x)U_q(x), \quad |\lambda| \leq 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу второго свойства $U_q(x)$ коэффициент при x^q у произведения $xU_q(x)$ равен нулю, а у $U_q(x)$ он равен единице. Значит, многочлен (6) входит в $P_{q,q+1}$. Вычислим его норму. Так как $|U_q(x)|$ есть четная функция, а $1 + \lambda x \geq 0$ на $[-1, 1]$, то

$$\int_{-1}^1 |(1 + \lambda x)U_q(x)| dx = \int_{-1}^1 (1 + \lambda x)|U_q(x)| dx = \int_{-1}^1 |U_q(x)| dx = 2^{1-q}.$$

Покажем, что любой многочлен из $H_{q,q+1}$ представим в виде (6). Допустим, что $U_q(x) + h(x) \in H_{q,q+1}$ и

$$\|U_q(x) + h(x)\|_1 = \int_{-1}^1 |U_q(x) + h(x)| dx = 2^{1-q}.$$

Из свойства 3 имеем

$$I = \int_{-1}^1 [U_q(x) + h(x)] \operatorname{sgn} U_q(x) dx = \int_{-1}^1 U_q(x) \operatorname{sgn} U_q(x) dx = 2^{1-q}.$$

В (5) положим $f(x) = U_q(x) + h(x)$, $g(x) = U_q(x)$. Получим, что за исключением конечного множества точек $U_q(x) + h(x)$ и $U_q(x)$ имеют одинаковые знаки на $[-1, 1]$. Следовательно, множество нулей $U_q(x) + h(x)$ содержит все нули $U_q(x)$. Используя первое свойство $U_q(x)$, находим представление

$$U_q(x) + h(x) = U_q(x)(ax + b),$$

где $ax + b \geq 0$ на $[-1, 1]$. Сравнивая коэффициенты при x^q в левой и правой частях равенства, получим $b = 1$. Поскольку неравенство $ax + 1 \geq 0$ на $[-1, 1]$ возможно лишь при $|a| \leq 1$, то

$$U_q(x) + h(x) = U_q(x)(1 + \lambda x), \quad |\lambda| \leq 1.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется иной способ доказательства теоремы 2. Отправляясь от точного решения [4], [5] задачи Золотарёва в пространстве $L(-1, 1)$

$$\inf_{a_j} \|x^{q+1} + \alpha x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \dots + a_0\|_1 = \begin{cases} \left\| U_{q+1} + \alpha U_q + \frac{\alpha^2}{4} U_{q-1} \right\|_1, & |\alpha| \leq 1, \\ \left\| U_{q+1} + \alpha U_q + \frac{1}{4} U_{q-1} \right\|_1, & |\alpha| \geq 1, \end{cases}$$

В. И. Иванов дал новый вывод представления (6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Чебышев, *Полное собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1947.
[2] Е. И. Золотарев, А. И. Коркин: Е. И. Золотарев, *Полное собрание сочинений*, т. 1, Изд-во АН СССР, Л., 1931, 138–153. [3] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965. [4] J. Geronimus, *Ann. of Math.* (2), **37**:2 (1936), 483–517.
[5] Э. М. Галеев, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 13–20.

В. А. Юдин

Московский энергетический институт
(технический университет)

E-mail: vlayudin@mtu-net.ru, yudin@vayudin.mccme.ru

Поступило

26.12.2009