Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Потапов, Бифуркационные задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 280–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 09:37:42

Бифуркационные задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями

Д. К. Потапов

Рассматривается проблема существования полуправильных решений основных краевых задач для уравнений эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывными нелинейностями. Вариационным методом получена теорема о существовании решений и свойствах “разделяющего” множества для исследуемых задач. Полученные результаты применены к задаче Гольдштика.

Библиография: 10 названий.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, рассматривается краевая задача

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$Bu|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь L – равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in C_{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $c \in C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, λ – положительный параметр, функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана следующим образом:

$$g(x, u) = \begin{cases} g_1(x, u), & \text{если } u < \varphi(x), \\ 0, & \text{если } u \geq \varphi(x), \end{cases}$$

где $g_1(x, u)$ – каратеодориева функция на $\Omega \times \mathbb{R}$, отрицательная на множестве

$$\{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, u < \varphi(x)\},$$

функция $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ отрицательна в области Ω и на части границы Γ . Предположим, что для почти всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство $|g(x, u)| \leq a(x)$ для всех $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, фиксирована. Граничное условие (2) имеет вид

- либо условие Дирихле $u(x)|_{\Gamma} = 0$;
- либо условие Неймана $\partial u / \partial \mathbf{n}_L(x)|_{\Gamma} = 0$ с кономальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L(x)} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j),$$

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе Γ , $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$;

- либо третье краевое условие $\partial u / \partial \mathbf{n}_L(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$, функция $\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сильным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in W_r^2(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Полуправильным решением задачи (1), (2) называется такое сильное ее решение u , значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число λ называется собственным значением задачи (1), (2), если существует сильное решение u_λ задачи (1), (2), отличное от нулевого. При этом u_λ называют собственной функцией задачи (1), (2), соответствующей λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Назовем $u \in \mathbb{R}$ прыгающим разрывом функции f , если

$$f(u-) < f(u+), \quad \text{где} \quad f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s).$$

При каждом $x \in \Omega$ состояние системы (1), (2) может находиться в одной из двух фаз: $u < \varphi(x)$ или $u \geq \varphi(x)$. Для любого $\lambda > 0$ задача (1), (2) имеет тривиальное полуправильное решение $u_\lambda(x) \equiv 0$, целиком находящееся в одной из указанных фаз. Рассматривается задача о существовании такого полуправильного решения $u_\lambda(x)$ задачи (1), (2), для которого

$$\text{mes}\{x \in \Omega : u_\lambda(x) < \varphi(x)\} \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{mes}\{x \in \Omega : u_\lambda(x) \geq \varphi(x)\} \neq 0.$$

Данная задача изучалась для однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными по фазовой переменной нелинейностями в работах [2], [3], где и указано на актуальность данной тематики и необходимость исследований в этом направлении. В работе автора [3], в отличие от работы [2], дополнительно получена оценка сверху величины бифуркационного параметра для исследуемой задачи, а также допускается, что уравнение состояния может определять и резонансную краевую задачу. Данная работа является продолжением этого исследования. В данной работе рассмотрим вопрос о “разделяющем” множестве основных краевых задач для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными нелинейностями, а также приложение полученных результатов к задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости Гольдштика [4]. В отличие от работ [2], [3] в данной работе рассматриваются уравнения второго порядка и все краевые условия, а не только условие Дирихле.

В зависимости от вида граничного условия (2) определим пространство X . Пусть $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, если (2) – граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (2) – граничное условие Неймана или третье краевое условие. Краевой задаче (1), (2) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на пространстве X , следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds = J_1(u) - \lambda J_2(u),$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega c(x) u^2(x) dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sigma(s) u^2(s) ds$$

в случае третьего краевого условия. Положим

$$U = \{u_0 \in X : J_2(u_0) > 0\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $J_1(u) \geq 0$ для всех $u \in X$;
- 2) для почти всех $x \in \Omega$ выполнены соотношения $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leq a(x)$ для всех $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, фиксирована;
- 3) найдется $u_0 \in X$, для которого $J_2(u_0) > 0$;
- 4) если пространство $N(L)$ решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \rightarrow +\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ задача (1), (2) имеет полуправильное решение $u_{\lambda} \in W_q^2(\Omega)$, для которого

$$\text{mes}\{x \in \Omega : u_{\lambda}(x) < \varphi(x)\} \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{mes}\{x \in \Omega : u_{\lambda}(x) \geq \varphi(x)\} \neq 0,$$

а граница раздела фаз

$$\Gamma_{\lambda} = \{x \in \Omega : u_{\lambda}(x) = \varphi(x)\}$$

для состояния $u_{\lambda}(x)$ имеет меру нуль и замкнута относительно Ω .

В работах [5], [6] доказано, что при выполнении условий 1)–4) данной теоремы существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\inf_{v \in X} J^{\lambda}(v) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$ и найдется $u_{\lambda} \in X$, для которого

$$J^{\lambda}(u_{\lambda}) = \inf_{v \in X} J^{\lambda}(v). \quad (3)$$

Кроме того, если u – точка разрыва функции $g(x, \cdot)$, то $g(x, u-) < g(x, u+)$ (так как $g_1(x, u) < 0$), т.е. функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы для почти всех $x \in \Omega$. Поэтому согласно результатам работ [5], [6] любое u_{λ} , удовлетворяющее (3), является ненулевым полуправильным решением задачи (1), (2). В работе [7] при выполнении условий искомой теоремы доказано, что для величины бифуркационного параметра λ_0 , начиная с которой задача на собственные значения (1), (2) разрешима, справедлива следующая оценка сверху:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}.$$

Оставшаяся часть утверждения данной теоремы о существовании решения и свойствах “разделяющего” множества получается также вариационным методом [2], [3], [5]–[7] и развивает результаты, представленные в этих работах.

Отметим, что наиболее общие результаты по нелинейным задачам на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями были получены Марано в работе [8] топологическими методами. Однако, в работе [8] автор на разрывы нелинейности g в уравнении (1) накладывает следующее достаточно жесткое ограничение: существует множество $\Omega_0 \subset \Omega$ меры нуль, для которого объединение

$$\bigcup_{x \in \Omega \setminus \Omega_0} \{u \in \mathbb{R} : g(x, \cdot) \text{ разрывна в точке } u\}$$

имеет меру нуль. В данной работе, а также в работах [5]–[7] установлены теоремы о существовании полуправильных решений задачи (1), (2) при более слабых условиях на разрывы g по сравнению с условиями в работе [8]. В отличие от результатов работы [8] не предполагается, что функция $g: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, проекция множества точек разрыва $g(x, u)$ по u на ось фазовой переменной u имеет меру нуль в $\mathbb{R}$; допускается, что исследуемые краевые задачи могут быть резонансными.

В заключение рассмотрим приложение полученных результатов к задаче Гольдштика [4], [6], [9], [10]. Как показано в работах [6], [9], [10], математическая модель задачи Гольдштика сводится к следующей бифуркационной задаче для уравнения эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью:

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, ω – завихренность, Γ – кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω , функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta \psi_0 = 0, \\ \psi_0|_{\Gamma} = \phi(s), \end{cases}$$

ϕ – непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция (из принципа максимума следует, что функция $\psi_0(x)$ положительна в области Ω).

Проверим, что для задачи Гольдштика (4), (5) выполнены все условия теоремы данной работы. Имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 \geq 0 \quad \text{для всех } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Выполнено условие 1) теоремы. В работах [6], [9], [10] проверено выполнение условий 2), 3) теоремы для задачи Гольдштика (4), (5). Поскольку пространство $N(-\Delta)$ решений задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

нулевое (коэрцитивный случай), дополнительное предположение в условии 4) теоремы не требуется. Итак, все условия теоремы для задачи Гольдштика (4), (5) выполнены. Поэтому существует

$$0 < \omega_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)},$$

$$U = \left\{ u_0 \in \mathbf{H}_o^1(\Omega) : J_2(u_0) = \int_{\Omega} dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s) ds > 0 \right\},$$

такое, что для любого $\omega > \omega_0$ задача (4), (5) имеет полуправильное решение $u_{\omega} \in W_q^2(\Omega)$, для которого

$$\text{mes}\{x \in \Omega : u_{\omega}(x) < -\psi_0(x)\} \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{mes}\{x \in \Omega : u_{\omega}(x) \geq -\psi_0(x)\} \neq 0,$$

а граница раздела фаз

$$\Gamma_{\omega} = \{x \in \Omega : u_{\omega}(x) = -\psi_0(x)\}$$

для состояния $u_{\omega}(x)$ имеет меру нуль и замкнута относительно Ω .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, “Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями”, *Докл. АН СССР*, **226**:3 (1976), 506–509.
- [2] В. Н. Павленко, *Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Челябинск, 1995.
- [3] Д. К. Потапов, “О “разделяющем” множестве для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **46**:3 (2010), 451–453.
- [4] М. А. Гольдштик, “Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости”, *Докл. АН СССР. Сер. физич.*, **147**:6 (1962), 1310–1313.
- [5] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, “О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:4 (2001), 911–919.
- [6] Д. К. Потапов, *Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью*, ИБП, СПб., 2008.
- [7] Д. К. Потапов, “Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **44**:5 (2008), 715–716.
- [8] S. A. Marano, “Elliptic eigenvalue problems with highly discontinuous nonlinearities”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:10 (1997), 2953–2961.
- [9] Д. К. Потапов, “Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости”, *Изв. РАН. Сер. МММИУ*, **8**:3-4 (2004), 163–170.
- [10] Д. К. Потапов, “Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 262–266.

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Поступило

15.03.2010