Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Потапов, Спектральные задачи для вариационных неравенств с разрывными операторами, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 252–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:31:14

Спектральные задачи

для вариационных неравенств с разрывными операторами

Д. К. Потапов

Рассматриваются спектральные задачи для вариационных неравенств с разрывными нелинейными операторами. Вариационным методом устанавливается предложение о разрешимости таких задач. Общие результаты применяются к соответствующим эллиптическим вариационным неравенствам с разрывными нелинейностями.

Библиография: 18 названий.

Введение. Общие постановки задач о вариационных неравенствах приведены в монографии [1], вариационные неравенства с непрерывными нелинейностями изучались многими авторами (см., например, библиографию в работе [2]). Вариационные неравенства с разрывными операторами изучались вариационным методом в работах [3], [4], методом монотонных операторов в работе [5]. В работах [3]–[5] установлены предложения о разрешимости вариационных неравенств с разрывными нелинейными операторами, рассмотрены приложения общих теорем к эллиптическим вариационным неравенствам с дифференциальными операторами высокого порядка и разрывными нелинейностями. В работах [6], [7] рассматривались резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями, установлены результаты о существовании решения некоэрцитивного эллиптического вариационного неравенства с разрывной нелинейностью, сведением к резонансной эллиптической краевой задаче, разрешимость которой устанавливается с помощью регуляризации. Проблема существования решений вариационных неравенств с разрывными нелинейностями, ее абстрактный аналог в работах других авторов не рассматривались. Кроме того, актуальность рассмотрения проблемы об отыскании решений вариационных неравенств с разрывными операторами в рефлексивных банаховых пространствах диктуется и внутренними потребностями развития теории вариационных неравенств.

Данная работа является продолжением исследований работ [3]–[7] и посвящена изучению спектральных задач для вариационных неравенств с разрывными нелинейными операторами в рефлексивных банаховых пространствах. Вариационным методом устанавливается общий результат о существовании решений для таких

задач. Выделен класс вариационных неравенств, у которых решения являются точками радиальной непрерывности операторов, входящих в соответствующие вариационные неравенства. Абстрактная теорема применяется для доказательства существования полуправильных решений вариационных неравенств с дифференциальными операторами эллиптического типа с разрывными по фазовой переменной нелинейностями. В отличие от работ [3]–[5] в данной работе дополнительно рассмотрены эллиптические вариационные неравенства с дифференциальными операторами второго порядка, возможны резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями. В отличие от работ [6], [7] рассмотрена общая постановка задачи о вариационных неравенствах, допускаются коэрцитивные вариационные неравенства, возможны вариационные неравенства с дифференциальными операторами эллиптического типа высокого порядка. В работах [3], [6], [7] полуправильные решения не рассматривались. Кроме того, в отличие от работ [3]–[7] в данной работе рассматриваются спектральные задачи для вариационных неравенств с разрывными операторами.

1. Общие результаты. Пусть K – выпуклое замкнутое непустое множество в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E , E^* – сопряженное с E пространство. Через (z, x) будем обозначать значение линейного функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$. Рассматривается задача об отыскании $u \in K$ такого, что

$$((A - \lambda T)u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (1)$$

где A – линейный симметричный оператор из K в E^* , λ – положительный параметр, нелинейный оператор T определен на K и действует в E^* (отображение T разрывное, компактное или антимонотонное, ограниченное на K). Вариационным методом устанавливается предложение о разрешимости задачи (1) в предположении квазипотенциальности оператора T . Отметим, что если $K = E$, то (1) равносильно уравнению

$$Au = \lambda Tu, \quad (2)$$

которое ранее изучалось в работах [8]–[11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Линейный оператор $A: K \rightarrow E^*$ называется *симметричным* на K , если $(Ax, h) = (Ah, x)$ для любых $x, h \in K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор $T: K \rightarrow E^*$ называется *компактным* на K , если он ограниченные множества из K переводит в предкомпактные в E^* , т.е. множество TG предкомпактно в E^* для любого ограниченного подмножества G множества K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Отображение $T: K \rightarrow E^*$ называется *монотонным* на K , если $(Tx - Th, x - h) \geq 0$ для любых $x, h \in K$. Отображение $T: K \rightarrow E^*$ называется *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Отображение $T: K \rightarrow E^*$ называется *ограниченным* на K , если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|Tx\| \leq M \quad \forall x \in K.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Оператор $T: K \rightarrow E^*$ называется *квазипотенциальным* на K , если существует функционал $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, для которого верно равенство

$$f(x) - f(h) = \int_0^1 (T(h + t(x - h)), x - h) dt \quad \forall x, h \in K$$

(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом функционал f называется *квазипотенциалом* оператора T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Элемент $x \in K$ называется *регулярной точкой* для оператора $T: K \rightarrow E^*$ относительно K , если найдется $h \in K$ такой, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} (T(h + t(x - h)), x - h) < 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Оператор $T: K \rightarrow E^*$ называется *радиально непрерывным* в точке $h \in K$ относительно K , если для любого $x \in K$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (T(h + t(x - h)), x - h) = (Th, x - h).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Вещественный функционал f , заданный на множестве U нормированного пространства E , называется *слабо полунепрерывным снизу* в точке $x \in U$, если для любой последовательности (x_n) , слабо сходящейся к x ,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Предположим, что $0 \in K$. Оператору T сопоставим функционал

$$f(u) = \int_0^1 (T(tu), u) dt.$$

В работах [8]–[11] показано, что уравнение (2) разрешимо при $\lambda > \lambda_0 > 0$ (доказано существование ненулевых решений уравнения (2) при достаточно больших λ , причем оператор T на этих решениях радиально непрерывен). Из утверждений теоремы 2 из [8], теоремы 2 из [9], теоремы 1 из [10], теорем 1.3.1, 1.3.2 из [11] следует, что

$$f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - \lambda f(u) < 0.$$

Отсюда имеем $\lambda f(u) > (1/2)(Au, u)$. В силу условия 2) теоремы 2 из [8] (условия 2) теоремы 2 из [9], условия 2) теоремы 1 из [10], условий 2) теорем 1.3.1, 1.3.2 из [11]) для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$. Отсюда имеем

$$\lambda > \frac{(1/2)(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$

Положим $U = \{u_0 \in E : f(u_0) > 0\}$. Тогда для величины λ_0 , начиная с которой уравнение (2) разрешимо, справедлива следующая оценка сверху:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{(1/2)(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$

Из определения квазипотенциальности оператора T имеем

$$f(u_0) = \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt.$$

Таким образом, справедлива следующая оценка сверху для величины λ_0 в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{(1/2)(Au_0, u_0)}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt}, \quad \text{где } U = \left\{ u_0 \in E : \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt > 0 \right\}.$$

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) A – линейный симметричный оператор, действующий из выпуклого замкнутого непустого множества K в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E в сопряженное пространство E^* , пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств $E_1 = \ker A$ и E_2 , причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$ для любого $u \in E_2$, множество K ограничено;
- 2) отображение T – компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) отображение, ограниченное на K , $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in K$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in E_1, \|u\| \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty;$$

- 3) если отображение T компактное, то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} (T(u + t(h - u)), h - u) \geq 0 \quad \text{для всех } u, h \in K;$$

- 4) если отображение T антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$ относительно K .

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{(Au_0, u_0)/2}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt}, \quad U = \left\{ u_0 \in K : \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt > 0 \right\},$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ найдется $u_\lambda \in K$, $u_\lambda \neq 0$, для которого $f^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} f^\lambda(v)$, и любое такое u_λ удовлетворяет неравенству (1) и является точкой радиальной непрерывности оператора T относительно K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работах [8], [9], [11] показывается, что f^λ для любого $\lambda > 0$ слабо полунепрерывный снизу на K функционал. В силу условия 1) теоремы 1.1 множество K ограничено, а значит, и слабо компактно. Поэтому из обобщенной теоремы Вейерштрасса [12] вытекает существование $u_\lambda \in K$, для которого выполняется условие

$$f^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} f^\lambda(v). \quad (3)$$

Условия 3), 4) теоремы 1.1 означают регулярность точек разрыва оператора $A - \lambda T$ ($\lambda > 0$) относительно K . Отсюда получаем [4], что u_λ , удовлетворяющее (3), является решением неравенства (1) и точкой радиальной непрерывности оператора T относительно K . В силу условия 2) теоремы 1.1 найдется $u_0 \in K$, для которого $f(u_0) > 0$. Поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f^\lambda(u_0) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}(Au_0, u_0) - \lambda f(u_0) \right) = -\infty.$$

Отсюда следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $f^\lambda(u_0) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$. Поскольку $f^\lambda(0) = 0$, то u_λ , удовлетворяющее (3), отлично от нуля при $\lambda > \lambda_0$. Оценка сверху для величины бифуркационного параметра в спектральных задачах для вариационных неравенств с разрывными операторами вида

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{(Au_0, u_0)/2}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt}$$

получается так же, как это было сделано выше для уравнений. Теорема 1.1 доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 с $K = E$. Тогда утверждение теоремы 1.1 справедливо для уравнения (2), что подтверждает результаты работ [8]–[11].

2. Приложения. В качестве приложения общих результатов рассмотрим эллиптические вариационные неравенства второго порядка с разрывными нелинейностями. А именно, рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} (v - u)_{x_j} dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) (v - u)(x) dx \\ - \lambda \int_{\Omega} g(x, u(x)) (v - u)(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (4)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ [13];

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x) u(x)$$

– равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in C_{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $c \in C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$; λ – положительный параметр; функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима [14], т.е. для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω функция $g(x, u(x))$ измерима по Лебегу на Ω и для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода,

$$\begin{aligned} g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)] \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ g_-(x, u) = \varliminf_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta), \quad g_+(x, u) = \overline{\varliminf_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)}, \end{aligned}$$

$$|g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \text{где } a \in L_q(\Omega), \quad q \geq \frac{2n}{n+2},$$

фиксирована; K – выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $u \in K$, удовлетворяющая (4), называется *сильным решением* неравенства (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Сильное решение $u(x)$ неравенства (4) называется *полуправильным*, если для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Прыгающим разрывом* функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется такое $u \in \mathbb{R}$, что

$$f(u-) < f(u+), \quad \text{где } f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s).$$

Поставим в соответствие вариационному неравенству (4) эквивалентную задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью

$$Lu(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Для задач с препятствиями такой подход был предложен в работе [15], для коэрцитивных эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями – в работе [16], для резонансных эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями – в работах [6], [7]. Отметим, что при этом каждое сильное решение задачи (5), (6) является сильным решением вариационного неравенства (4) (сильным решением задачи (5), (6) называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (5) и граничному условию (6)).

Положим

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u^2(x) dx,$$

$$J_2(u) = \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds,$$

и

$$J^{\lambda}(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u), \quad U = \{u_0 \in K : J_2(u_0) > 0\}$$

(пространство $E = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, сопряженное пространство $E^* = \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$).

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $J_1(u) \geq 0$ для любого $u \in K$;
- 2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leq a(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, фиксирована;
- 3) найдется $u_0 \in K$, для которого $J_2(u_0) > 0$;

4) если пространство $N(L)$ решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \rightarrow +\infty} J_2(u) = -\infty;$$

5) множество $K \subset \mathbf{H}_o^1(\Omega)$ и ограничено.

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v \in K} J^\lambda(v) < 0$ и найдется $u_\lambda \in K$, для которого

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v). \quad (7)$$

Если дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, то любое u_λ , удовлетворяющее (7), является ненулевым полуправильным решением неравенства (4).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия 1), 3–5) теоремы 2.1 и дополнительно выполнены следующие условия:

- 1') для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$ и для некоторой $a \in L_{2n/(n+2)}(\Omega)$ выполнено $|g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$;
- 2') для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I не более чем счетно), и если $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$, то $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v \in K} J^\lambda(v) < 0$ и найдется $u_\lambda \in K$, для которого

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v), \quad (8)$$

и любое u_λ , удовлетворяющее (8), является ненулевым полуправильным решением неравенства (4).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполнены условия теорем 2.1, 2.2 с $K = \mathbf{H}_o^1(\Omega)$. Тогда утверждения теорем 2.1, 2.2 справедливы для задачи (5), (6), что подтверждает результаты работ [8], [9], [11], [17].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.1, 2.2 сводится к проверке выполнения условий теоремы 1.1. В работах [8], [9], [11] проверено выполнение данных условий. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.1. Теоремы 2.1, 2.2 доказаны.

В заключение рассматривается задача об отыскании функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u(x) D^{\beta} (v - u)(x) dx - \lambda \int_{\Omega} g(x, u(x)) (v - u)(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (9)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ ; функции $a_{\alpha\beta}$ вещественнозначны и имеют непрерывные в $\bar{\Omega}$ частные производные до порядка $|\beta|$ включительно, причем, $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$ в $\bar{\Omega}$, $1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p$ и

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = p} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq \chi |\xi|^{2p} \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянная χ положительна и не зависит от x и ξ ; λ – положительный параметр; функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода,

$$\begin{aligned} g(x, u) &\in [g_-(x, u), g_+(x, u)] \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ g_-(x, u) &= \lim_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta), \quad g_+(x, u) = \overline{\lim}_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta), \\ |g(x, u)| &\leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где

$$a \in L_q(\Omega), \quad q \geq \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\},$$

фиксирована; K – выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $\mathbf{W}_2^p(\Omega)$. Отметим, что если множество K совпадает с одним из следующих множеств:

$$\begin{aligned} \{v \in \mathbf{H}_0^p(\Omega) : v(x) \geq \varphi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\}, \\ \{v \in \mathbf{H}_0^p(\Omega) : v(x) \leq \psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\}, \\ \{v \in \mathbf{H}_0^p(\Omega) : \varphi(x) \leq v(x) \leq \psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\} \quad (\varphi, \psi \in C_2(\bar{\Omega})), \end{aligned}$$

то задача (9) приводится к задаче Дирихле с разрывной по фазовой переменной нелинейностью вида

$$\tau u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$\partial_{\nu}^r(\Gamma) u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq r \leq p-1, \quad (11)$$

где

$$\tau = \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} (-1)^{|\beta|} D^{\beta} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha}$$

– формальный дифференциальный оператор порядка $2p$ в дивергентной форме, $\partial_{\nu}^r(\Gamma)$ – производные в направлении внутренней нормали ν к границе Γ порядка r .

Положим

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u(x) D^{\beta} u(x) dx,$$

$$J_2(u) = \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds,$$

и

$$J^{\lambda}(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u), \quad U = \{u_0 \in K : J_2(u_0) > 0\}$$

(пространство $E = \mathbf{H}_0^p(\Omega)$, сопряженное пространство $E^* = \mathbf{H}^{-p}(\Omega)$).

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) для любого $u \in K$ справедливо неравенство $J_1(u) \geq 0$;
- 2) для почти всех $x \in \Omega$ выполнены соотношения

$$g(x, 0) = 0, \quad |g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

где

$$a \in L_q(\Omega), \quad q > \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\},$$

фиксирована;

- 3) найдется $u_0 \in K$, для которого имеет место неравенство $J_2(u_0) > 0$;
- 4) если пространство $N(\tau)$ решений задачи

$$\begin{cases} \tau u = 0, \\ \partial_{\nu}^r(\Gamma)u(x) = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(\tau), \|u\| \rightarrow +\infty} J_2(u) = -\infty;$$

- 5) множество $K \subset \mathbf{H}_0^p(\Omega)$ и ограничено.

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v \in K} J^{\lambda}(v) < 0$ и найдется $u_{\lambda} \in K$, для которого

$$J^{\lambda}(u_{\lambda}) = \inf_{v \in K} J^{\lambda}(v). \quad (12)$$

Если дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, то любое u_{λ} , удовлетворяющее (12), является ненулевым полуправильным решением неравенства (9).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия 1), 3)–5) теоремы 2.3 и дополнительно выполнены следующие условия:

1') для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$ и для некоторой $a \in L_q(\Omega)$,

$$q = \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}, \quad |g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R};$$

2') для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I не более чем счетно), и если $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$, то $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v \in K} J^\lambda(v) < 0$ и найдется $u_\lambda \in K$, для которого

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v), \quad (13)$$

и любое u_λ , удовлетворяющее (13), является ненулевым полуправильным решением неравенства (9).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть выполнены условия теорем 2.3, 2.4 с $K = \mathbf{H}_0^p(\Omega)$. Тогда утверждения теорем 2.3, 2.4 справедливы для задачи (10), (11), что подтверждает результаты работы [18].

Доказательство теорем 2.3, 2.4 также сводится к проверке выполнения условий теоремы 1.1. Данные условия проверяются аналогично тому, как это сделано в работах [8], [9], [11] для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными нелинейностями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [2] S. Adly, D. Goeleven, M. Théra, "Recession mappings and noncoercive variational inequalities", *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **26**:9 (1996), 1573–1603.
- [3] В.Н. Павленко, "Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами", *Дифференц. уравнения*, **24**:8 (1988), 1397–1402.
- [4] В.Н. Павленко, "Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями", *Укр. матем. журн.*, **43**:2 (1991), 230–235.
- [5] В.Н. Павленко, "О разрешимости вариационных неравенств с разрывными полумонотонными операторами", *Укр. матем. журн.*, **45**:3 (1993), 443–447.
- [6] В.Н. Павленко, Е.А. Чиж, "Сильно резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями", *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 7, 49–56.
- [7] В.Н. Павленко, М.А. Прибыль, "Резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями", *Дифференц. уравнения*, **42**:1 (2006), 120–125.
- [8] В.Н. Павленко, Д.К. Потапов, "О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами", *Сиб. матем. журн.*, **42**:4 (2001), 911–919.
- [9] Д.К. Потапов, "О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае", *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. управ.*, 2004, № 4, 125–132.
- [10] D. K. Potapov, "Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **144**:4 (2007), 4232–4233.

- [11] Д. К. Потапов, *Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью*, ИБП, СПб., 2008.
- [12] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972.
- [13] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.
- [14] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, *Системы с гистерезисом*, Наука, М., 1983.
- [15] K. C. Chang, “Free boundary problems and the set-valued mappings”, *J. Differential Equations*, **49**:1 (1983), 1–28.
- [16] В. Н. Павленко, *Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Челябинск, 1995.
- [17] Д. К. Потапов, “Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **44**:5 (2008), 715–716.
- [18] Д. К. Потапов, “О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **46**:1 (2010), 150–152.

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Поступило

01.03.2010

Исправленный вариант

28.02.2012