Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Потапов, Аппроксимация однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями в резонансном случае, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 467–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:38:21

Аппроксимация однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями в резонансном случае

Д. К. Потапов

В ряде случаев важен анализ близости решений модели с разрывной нелинейностью и ее аппроксимирующей с непрерывной нелинейностью. Данная проблема была поставлена в работе [1], для коэрцитивных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями изучалась в работах [2], [3] и в работе [4] для резонансных краевых задач. В работах [5]–[7] рассматривались аппроксимации краевых задач для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью, а в работе [8] был рассмотрен практический пример – непрерывные аппроксимации задачи об отрывных течениях несжимаемой жидкости Гольдштика. Данная работа является продолжением этих исследований.

В данной работе рассматривается вопрос об аппроксимации задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в резонансном случае, т.е. случае, когда ядро дифференциального оператора с соответствующим краевым условием ненулевое. Аппроксимирующая задача получается возмущением спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом устанавливается результат о сходимости в равномерной метрике решений аппроксимирующей задачи к решениям исходной задачи. В отличие от работ [2]–[6], [8] в данной работе рассматриваются уравнения высокого порядка, а в отличие от работ [2], [3], [6]–[8] исследуется резонансный случай. Кроме того, в отличие от работ [2]–[4] изучаемые задачи содержат спектральный параметр, в работах [3], [4] рассматривался другой вид аппроксимаций нелинейности.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ рассматривается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью вида

$$\tau u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq r \leq p-1. \quad (2)$$

Здесь $\tau = \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha$ – равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2p$ в дивергентной форме, функции $a_{\alpha\beta}$ вещественнозначны и имеют непрерывные в $\bar{\Omega}$ частные производные до порядка $|\beta|$ включительно; λ – положительный параметр; для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, u) = g_i(x, u)$, если $\varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, m-1$, $g(x, u) = g_0(x, u)$ при $u < \varphi_1(x)$ и $g(x, u) = g_m(x, u)$ при $u > \varphi_m(x)$, где $g_i(x, u)$ – каратеодориевы функции на $\Omega \times \mathbb{R}$, функции $\varphi_i \in C_2(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ на $\bar{\Omega}$ для любого $i = 1, \dots, m-1$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ множества $U_i(\varepsilon) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : |u - \varphi_i(x)| < \varepsilon\}$, $i = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются, $g(x, \varphi_i(x)) \in [g_{i-1}(x, \varphi_i(x)), g_i(x, \varphi_i(x))]$, $i = 1, \dots, m$; $\partial_\nu^r(\Gamma)$ – производные в направлении внутренней нормали ν к границе Γ порядка r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Сильным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in W_q^{2p}(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1) и граничным условиям (2).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Полуправильным решением задачи (1), (2) называется такое сильное ее решение u , значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Прыгающим разрывом функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется такое $u \in \mathbb{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s)$.*

Предположим, что пространство $N(\tau)$ решений задачи

$$\begin{cases} \tau u = 0, \\ \partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

одномерно, $\psi(x)$ – базисная функция этого подпространства. Так как пространство $N(\tau)$ решений задачи (3) ненулевое, имеет место резонансный случай. Пусть для базисной функции ψ пространства $N(\tau)$ верны условия Ландесмана–Лазера

$$\int_{\psi < 0} g_+(x)\psi(x) dx + \int_{\psi > 0} g_-(x)\psi(x) dx > 0 > \int_{\psi > 0} g_+(x)\psi(x) dx + \int_{\psi < 0} g_-(x)\psi(x) dx,$$

где $g_\pm(x) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(x, u)$. Известно [9], что условия Ландесмана–Лазера влекут равенство

$$\lim_{u \in N(\tau), \|u\| \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds = -\infty.$$

Если дополнительно потребовать, что для любого $u \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx \geq 0;$$

для почти всех $x \in \Omega$ выполнены соотношения $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leq a(x)$ для всех $u \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbb{L}_q(\Omega)$, $q > \max\{2n/(n+2p), n/(2p)\}$, фиксирована; найдется $u_0 \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)$, для которого имеет место неравенство $\int_{\Omega} dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s) ds > 0$, то из теоремы 1 из работы [10] следует существование

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_0(x) D^\beta u_0(x) dx}{\int_{\Omega} dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s) ds},$$

$$U = \left\{ u_0 \in \mathbb{H}_0^p(\Omega) : \int_{\Omega} dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s) ds > 0 \right\}$$

такого, что для любого $\lambda > \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\inf_{v \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)} J^\lambda(v) = \inf_{v \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx - \lambda \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds \right) < 0,$$

и найдется $u_\lambda \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)$, для которого

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)} J^\lambda(v), \quad (4)$$

и так как для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы (по построению $g(x, \varphi_i(x)-) = g_{i-1}(x, \varphi_i(x)) < g_i(x, \varphi_i(x)) = g(x, \varphi_i(x)+)$), любое u_λ , удовлетворяющее (4), является ненулевым полуправильным решением задачи (1), (2).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$ и пусть числовая последовательность (λ_k) , $\lambda_k > 0$, сходится к λ . Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$\tau u(x) = \lambda_k g^k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq r \leq p-1, \quad (6)$$

где $g^k(x, u)$ – каратеодориева функция на $\Omega \times \mathbb{R}$, равная $g(x, u)$ вне $\bigcup_{i=1}^m U_i(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$: $k > 1/\varepsilon$. С каждой задачей (5), (6) свяжем функционал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u(x) D^{\beta} u(x) dx - \lambda_k \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g^k(x, s) ds$$

на пространстве $\mathbb{H}_0^p(\Omega)$. Предположим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|g^k(x, u)| \leq a(x)$ для всех $u \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{L}_q(\Omega)$, $q > \max\{2n/(n+2p), n/(2p)\}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $u_k \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)$ такие, что $J_k(u_k) = \inf_{v \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)} J_k(v)$, и любое такое u_k принадлежит пространству $\mathbb{W}_q^{2p}(\Omega)$ и является сильным решением задачи (5), (6).

Основным результатом данной работы является теорема о близости решений аппроксимирующей задачи (5), (6) к решениям исходной задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть для $\tau, \lambda, g, \lambda_k, g^k$ выполнены перечисленные выше предположения. Тогда последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (5), (6), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J^{λ} на $\mathbb{H}_0^p(\Omega)$ и содержит подпоследовательность (u_{k_l}) , сходящуюся в $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ к полуправильному решению $\tilde{u}_0$ предельной задачи (1), (2), для которого $J^{\lambda}(\tilde{u}_0) = \inf_{v \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)} J^{\lambda}(v)$. Если $\tilde{u}_0 \in \mathbb{H}_0^p(\Omega)$, удовлетворяющая последнему равенству, единственная, то $u_k \rightarrow \tilde{u}_0$ в равномерной метрике $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$.

Сформулированная теорема 1 доказывается вариационным методом аналогично теореме 2.1 из работы [5] для резонансных краевых задач эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью и обобщает результаты работы [5] на уравнения высокого порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, *Докл. АН СССР*, **248**:5 (1979), 1056–1059.
 [2] В. Н. Павленко, Р. С. Исаков, *Укр. матем. журн.*, **51**:2 (1999), 224–233. [3] М. Г. Лепчинский, В. Н. Павленко, *Алгебра и анализ*, **17**:3 (2005), 124–138. [4] М. Г. Лепчинский, В. Н. Павленко, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 139–148. [5] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 4, 49–55. [6] Д. К. Потапов, *Изв. РАЕН. Сер. МММИУ*, **9**:1-2 (2005), 159–165. [7] Д. К. Потапов, *Дифференц. уравнения*, **43**:7 (2007), 1002–1003. [8] Д. К. Потапов, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 262–266. [9] В. Н. Павленко, В. В. Винокур, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 5, 43–58. [10] Д. К. Потапов, *Дифференц. уравнения*, **46**:1 (2010), 150–152.

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Поступило

01.03.2010