Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Попов, Неразрешимость проблемы равенства в относительно свободных кольцах, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 582–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm873>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 09:43:36

УДК 512.519.4

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА В ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ КОЛЬЦАХ

В. Ю. Попов

Построен пример серии конечно базируемых многообразий колец $\mathfrak{X}_p$ таких, что проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}_p$ ранга n , свободном в многообразии $\mathfrak{X}_p$, разрешима тогда и только тогда, когда $n < p$.

Библиография: 2 названия.

В многообразиях колец с неразрешимой эквациональной теорией, построенных в работе [1], проблема равенства в свободном кольце ранга p неразрешима для любого натурального p . Очевидно, что не существует многообразия колец такого, что $p > q$ и проблема равенства в свободном кольце ранга p разрешима, а проблема равенства в свободном кольце ранга q неразрешима. Теорема 1 дает пример серии конечно базируемых многообразий колец $\mathfrak{X}_p$ таких, что проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}_p$ ранга n , свободном в многообразии $\mathfrak{X}_p$, разрешима тогда и только тогда, когда $n < p$. В теореме 2 строится пример бесконечно базируемого многообразия колец с неразрешимой эквациональной теорией такого, что проблема равенства в свободном кольце ранга p разрешима для любого натурального p . Заметим, что аналогичный пример конечно базируемого многообразия колец автору неизвестен.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого натурального p существует конечно базируемое многообразие колец $\mathfrak{X}_p$ такое, что проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}_p$ ранга n , свободном в многообразии $\mathfrak{X}_p$, разрешима тогда и только тогда, когда $n < p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} s_1(x_1, \dots, x_k) &= (((((\dots(((x_1x_2)x_3)(x_4x_5))x_6 \dots)x_{k-5})((x_{k-4}x_{k-3})(x_{k-2}x_{k-1})))x_k), \\ s_2(x_1, \dots, x_{k+30}) &= s_1(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{k+30}), \\ s_3(x_1, \dots, x_p) &= x_p((x_{p-2}(\dots(x_5((x_3(x_1x_2))x_4))x_6 \dots))x_{p-1}), \\ t_k^p(x_1, \dots, x_{p+k+60}) &= s_2(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{p+30}), x_{p+31}, \dots, x_{p+k+60}). \end{aligned}$$

Если $x_i = x$ при $1 \leq i \leq 33$ и $p + 29 \leq i \leq p + k + 60$, то $t_k^p(x_1, \dots, x_{p+k+60})$ будем

обозначать через $t_k^p(x_{34}, \dots, x_{p+28}|x)$. Пусть

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{p-6}, y) &= A(\vec{x}, y) = t_{20}^p(x_{34}, \dots, x_{p-6}|y), \\ B(x_1, \dots, x_{p-6}, y) &= B(\vec{x}, y) = t_{24}^p(x_{34}, \dots, x_{p-6}|y), \\ C(x_1, \dots, x_{p-6}, y) &= C(\vec{x}, y) = t_{28}^p(x_{34}, \dots, x_{p-6}|y), \\ D(x_1, \dots, x_{p-6}, y) &= D(\vec{x}, y) = t_{32}^p(x_{34}, \dots, x_{p-6}|y), \\ Q_i(x_1, \dots, x_{p-6}, y) &= Q_i(\vec{x}, y) = t_{36+4i}^p(x_{34}, \dots, x_{p-6}|y); \\ W &= \{A(\vec{x}, y), B(\vec{x}, y), C(\vec{x}, y), D(\vec{x}, y), Q_i(\vec{x}, y) \mid i \in \{0, 1, \dots, m\}\}. \end{aligned}$$

Если не оговорено противное, то будем считать, что

$$w_1 \dots w_n = (((((w_1 w_2) w_3) \dots) w_n), \quad w_1 w_2^n = (((((w_1 w_2) w_2) \dots) w_2)).$$

Зафиксируем некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел P . Через M обозначим двухленточную машину Минского, вычисляющую частичную характеристическую функцию множества P . Будем считать, что число внутренних состояний машины M равно $m + 1$.

Произвольной команде $q_i \delta_1 \delta_2 \rightarrow q_j \varepsilon_1 \varepsilon_2$ машины M поставим в соответствие некоторое кольцевое тождество:

$$\begin{aligned} Q_i(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \\ Q_i(\vec{x}, y) A(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1+1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2}(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \\ Q_i(\vec{x}, y) B(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2+1}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \\ Q_i(\vec{x}, y) A(\vec{x}, y) B(\vec{x}, y) &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1+1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2+1}(\vec{x}, y), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^p$ многообразие колец, заданное тождествами, кодирующими команды машины M ; через $\mathfrak{B}^p$ – многообразие колец, заданное тождествами:

$$\begin{aligned} z A(\vec{x}, y) B(\vec{x}, y) &= z B(\vec{x}, y) A(\vec{x}, y), & z C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) &= z D(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y), \\ z A(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) &= z D(\vec{x}, y) A(\vec{x}, y), & z B(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) &= z C(\vec{x}, y) B(\vec{x}, y); \end{aligned}$$

через $\mathfrak{R}_2$ – многообразие всех колец характеристики 2. Пусть, наконец, $\mathfrak{D}^p$ – многообразие, заданное тождествами: $t_k^p(x_1, \dots, x_{p+k+60}) = 0$, если $x_i = x_j$ при $34 \leq i \leq j \leq p + 28$ или $x_i = y_1 y_2$ при $34 \leq i \leq p + 28$, где $k \in \{20 + 4i \mid i \in \{0, 1, \dots, m + 4\}\}$. Обозначим через $\mathfrak{X}_p$ многообразие $\mathfrak{M}^{p+6} \cap \mathfrak{B}^{p+6} \cap \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$.

ЛЕММА 1. *Если $n < p$, то проблема равенства в кольце $F_n \mathfrak{X}_p$ разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_n \mathfrak{D}^k \cap \mathfrak{R}_2$ – кольцо ранга n , свободное в многообразии $\mathfrak{D}^k \cap \mathfrak{R}_2$. Покажем, что кольцо $F_n \mathfrak{X}_p$ изоморфно кольцу $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ принадлежит многообразию $\mathfrak{X}_p$. Пусть $f(\vec{x}) = 0$ – одно из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{M}^{p+6} \cap \mathfrak{B}^{p+6}$. Тогда каждый одночлен многочлена $f(\vec{x})$ содержит подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Покажем, что для любых $x_1, \dots, x_{p+k+66}$ в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ выполняется соотношение

$t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60}) = 0$. Представим многочлен $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$ в виде суммы одночленов $\sum_i t_k^{p+6}(u_1^i, \dots, u_{(p+6)+k+60}^i)$. Рассмотрим слова u_j^i при $34 \leq j \leq p+34$ и произвольном, но фиксированном i . Из тождеств многообразия $\mathfrak{D}^{p+6}$ очевидным образом вытекает, что $t_k^{p+6}(u_1^i, \dots, u_{(p+6)+k+60}^i) = 0$, если $u_{j_1}^i = u_{j_2}^i$ при $j_1 \neq j_2$ или если $u_j^i = v_1 v_2$ для некоторых слов v_1 и v_2 . Поэтому либо для любого $j_1, j_2 \in \{34, \dots, p+34\}$ $u_{j_1}^i \neq u_{j_2}^i$ – свободные образующие кольца $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$, либо $t_k^{p+6}(u_1^i, \dots, u_{(p+6)+k+60}^i) = 0$. По условию леммы $n < p$. Следовательно, кольцо $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ не имеет p попарно различных свободных образующих, а значит, $t_k^{p+6}(u_1^i, \dots, u_{(p+6)+k+60}^i) = 0$. В силу произвольности i отсюда вытекает, что

$$t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60}) = \sum_i t_k^{p+6}(u_1^i, \dots, u_{(p+6)+k+60}^i) = 0.$$

Таким образом, тождество $f(\vec{x}) = 0$ действительно выполняется в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$.

Итак, мы показали, что кольца $F_n \mathfrak{X}_p$ и $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ изоморфны. Следовательно, нам достаточно убедиться в разрешимости проблемы равенства в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$.

Пусть S – множество многочленов $f(\vec{e})$, полученных подстановкой конкретных элементов кольца $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ в тождества, определяющие многообразие $\mathfrak{D}^{p+6}$, где $\{e_1, \dots, e_n\}$ – множество свободных образующих кольца $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$. Обозначим через I идеал кольца $F_n \mathfrak{R}_2$ ранга n , свободного в многообразии $\mathfrak{R}_2$, порожденный множеством S . Соотношение $g(\vec{e}) = 0$ выполняется в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ тогда и только тогда, когда многочлен $g(\vec{e})$ принадлежит идеалу I . Соотношение $F_n \mathfrak{R}_2 \models g(\vec{e}) \in I$ равносильно выполнению в кольце $F_n \mathfrak{R}_2$ равенства вида $g(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$, где $h_j \in S$, $u_{i_1} h_j u_{i_2}$ – некоторое произведение конечного числа многочленов, одним из сомножителей которого является многочлен h_j . В силу дистрибутивности можно считать, что все многочлены, входящие в произведение $u_{i_1} h_j u_{i_2}$, кроме многочлена h_j , являются одночленами. Заметим, что так как многочлен h_j принадлежит множеству S , то каждый одночлен многочлена h_j содержит подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Отсюда непосредственно вытекает, что каждый одночлен многочлена $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ содержит подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Следовательно, для того чтобы выполнялось равенство $g(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$, необходимо, чтобы каждый одночлен многочлена $g(\vec{e})$ содержал подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Так как проблема равенства в кольце $F_n \mathfrak{R}_2$ разрешима, то существует алгоритм, определяющий по произвольному многочлену $g(\vec{e})$ содержат ли его одночлены подслова вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Итак, если какой-либо одночлен многочлена $g(\vec{e})$ не содержит подслова вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$, то в кольце $F_n \mathfrak{R}_2$ не выполняется равенство $g(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ ни для какого многочлена $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$, а значит, в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ не выполняется равенство $g(\vec{e}) = 0$. Пусть теперь каждый одночлен многочлена $g(\vec{e})$ содержит подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Индукцией по числу d одночленов многочлена $g(\vec{e})$ покажем, что для многочлена $g(\vec{e})$ существует многочлен $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ такой, что $g(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ – истинное равенство в кольце $F_n \mathfrak{R}_2$. Пусть $d = 1$. Рассмотрим подслова x_i при $34 \leq i \leq p+34$ слова $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$, являющегося подсловом одночлена многочлена $g(\vec{e})$. Допустим, что существуют i и l такие, что $34 \leq i < l \leq p+34$ и $x_i = x_l$. Тогда по построению многообразия $\mathfrak{D}^{p+6}$ слово $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$ принадлежит множеству S , и, следовательно, многочлен

$\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ существует. Предположим теперь, что для любых i, l таких, что $34 \leq i < l \leq p + 34$, $x_i \neq x_l$. Так как $n < p$, то существует i такое, что x_i не является свободным образующим кольца $F_n \mathfrak{R}_2$. Поэтому x_i можно представить в виде $y_{i_1} y_{i_2}$. Отсюда вытекает, что $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$ принадлежит множеству S , а значит, многочлен $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ существует. База индукции доказана. Допустим, что утверждение справедливо для всех d меньших d_0 . Покажем, что оно выполняется и для d_0 . В самом деле, пусть многочлен $g(\vec{e})$ имеет ровно d_0 одночленов. Тогда многочлен $g(\vec{e})$ представим в виде суммы двух многочленов $g_1(\vec{e}) + g_2(\vec{e})$, где число одночленов многочлена $g_i(\vec{e})$ равно d_i , $d_1 + d_2 = d_0$, $d_i \neq 0$. Так как $d_0 > d_i$, то для многочленов $g_1(\vec{e})$ и $g_2(\vec{e})$ справедливо предположение индукции. Следовательно, $g_1(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$, $g_2(\vec{e}) = \sum_{i,j} v_{i_1} h_j v_{i_2}$ и $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2} + \sum_{i,j} v_{i_1} h_j v_{i_2}$ — требуемый многочлен для $g(\vec{e})$.

Таким образом, $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2 \models g(\vec{e}) = 0$ тогда и только тогда, когда каждый одночлен многочлена $g(\vec{e})$ содержит подслово вида $t_k^{p+6}(x_1, \dots, x_{(p+6)+k+60})$. Следовательно, проблема равенства в кольце $F_n \mathfrak{D}^{p+6} \cap \mathfrak{R}_2$ разрешима. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если машина M через конечное число тактов работы переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{X}_p$ выполняется тождество

$$Q_i(\vec{x}, y) A^{\xi_1}(\vec{x}, y) B^{\xi_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) = Q_j(\vec{x}, y) A^{\eta_1}(\vec{x}, y) B^{\eta_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу r тактов работы машины M . Пусть $r = 0$. Тогда утверждение очевидно. Предположим, что утверждение леммы справедливо для некоторого r . Покажем, что оно выполняется и для $r + 1$. Пусть через r тактов машина M переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_l \tau_1 \tau_2$ и на $(r + 1)$ -м шаге выполняется команда $q_l \delta_1 \delta_2 \rightarrow q_j \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Следует рассмотреть четыре случая в зависимости от значений δ_1 и δ_2 . Допустим, что $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Тогда по определению машины M $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$, и в многообразии $\mathfrak{X}_p$ выполняется тождество

$$Q_i(\vec{x}, y) A^{\xi_1}(\vec{x}, y) B^{\xi_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) = Q_l(\vec{x}, y) A^{\tau_1}(\vec{x}, y) B^{\tau_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & Q_i(\vec{x}, y) A^{\xi_1}(\vec{x}, y) B^{\xi_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) \\ &= Q_l(\vec{x}, y) B^{\tau_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) = Q_l(\vec{x}, y) B(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) B^{\tau_2-1}(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) \\ &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2+1}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) B^{\tau_2-1}(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) \\ &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\varepsilon_1}(\vec{x}, y) B^{\varepsilon_2+\tau_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) \\ &= Q_j(\vec{x}, y) A^{\eta_1}(\vec{x}, y) B^{\eta_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y). \end{aligned}$$

В данной цепочке равенств первое равенство выполняется в силу тождества

$$Q_i(\vec{x}, y) A^{\xi_1}(\vec{x}, y) B^{\xi_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y) = Q_l(\vec{x}, y) A^{\tau_1}(\vec{x}, y) B^{\tau_2}(\vec{x}, y) C(\vec{x}, y) D(\vec{x}, y)$$

и равенства $\tau_1 = 0$, второе и четвертое – в силу тождества

$$zB(\vec{x}, y)C(\vec{x}, y) = zC(\vec{x}, y)B(\vec{x}, y),$$

третье – в силу тождества

$$Q_l(\vec{x}, y)B(\vec{x}, y)C(\vec{x}, y) = Q_j(\vec{x}, y)A^{\varepsilon_1}(\vec{x}, y)B^{\varepsilon_2+1}(\vec{x}, y)C(\vec{x}, y),$$

пятое – поскольку $\tau_1 = 0$ и по определению машины M $\eta_i = \tau_i + \varepsilon_i$. Лемма 2 доказана.

Предположим, что многообразие $\mathfrak{X}_p$ удовлетворяет тождеству

$$Q_i(\vec{x}, y)A^{\xi_1}(\vec{x}, y)B^{\xi_2}(\vec{x}, y)C(\vec{x}, y)D(\vec{x}, y) = Q_j(\vec{x}, y)A^{\eta_1}(\vec{x}, y)B^{\eta_2}(\vec{x}, y)C(\vec{x}, y)D(\vec{x}, y).$$

Тогда и кольцо счетного ранга $F\mathfrak{X}_p$, свободное в многообразии $\mathfrak{X}_p$, удовлетворяет этому тождеству, а значит, и соотношению

$$\begin{aligned} & Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ & = Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1), \end{aligned}$$

где $\vec{e} = (e_1, \dots, e_s)$.

Обозначим через S множество многочленов $f(\vec{e})$ таких, что $f(\vec{e}) = 0$ – соотношение в кольце $F\mathfrak{X}_p$, полученное подстановкой конкретных значений вместо переменных в одно из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{M}^{p+6} \cap \mathfrak{B}^{p+6} \cap \mathfrak{D}^{p+6}$. Пусть I – идеал, порожденный множеством S в кольце $F\mathfrak{X}_2$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} F\mathfrak{X}_p & \models Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ & = Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ \iff F\mathfrak{X}_2 & \models Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ & + Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \in I. \end{aligned}$$

Вхождение многочлена

$$\begin{aligned} & Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ & + Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \end{aligned}$$

в идеал I равносильно в кольце $F\mathfrak{X}_2$ равенству вида

$$\begin{aligned} & Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \\ & + Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}, \end{aligned}$$

где $u_{i_1} h_j u_{i_2}$ – некоторое произведение многочленов, одним из сомножителей которого является многочлен h_j , $h_j \in S$.

Индукцией по числу d одночленов в сумме $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ убедимся в том, что выполняется равенство $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2} = f_1 + f_2$, где f_1 — многочлен, каждый одночлен которого может быть получен конечным числом перестановок вида

$$\begin{aligned} A(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow B(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), & C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1), \\ A(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), & B(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow C(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1) \end{aligned}$$

из одночлена вида $Q_i(\vec{e}, e_1)A^{r_1}(\vec{e}, e_1)B^{r_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1)$, $f_1 = \sum_{i,j} v_{i1} h_j v_{i2}$, f_2 — многочлен, ни один одночлен которого не удовлетворяет условиям, наложенным на одночлены многочлена f_1 . Пусть $d = 0$. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого d . Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Пусть в сумме $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ не более $d + 1$ одночленов. Очевидно, что число одночленов в сумме $\sum_{i>1,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ не больше d . Следовательно, по предположению индукции сумма $\sum_{i>1,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ представима в виде $f_1 + f_2$. Поэтому нам достаточно показать, что многочлен $u_{11} h_1 u_{12}$ можно представить в виде $f_1 + f_2$. В зависимости от того, получили ли многочлен h_1 из тождества многообразия $\mathfrak{M}^{p+6}$, $\mathfrak{B}^{p+6}$ или $\mathfrak{D}^{p+6}$, следует рассмотреть три случая.

В дальнейшем нам потребуется следующая

ЛЕММА 3. Слово $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$, где $w_i(\vec{e}, e_1) \in W$, содержит подслово $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ при $u \geq 20$ тогда и только тогда, когда $w_i(\vec{e}, e_1) = t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если существует i такое, что $w_i(\vec{e}, e_1) = t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$, то слово $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ будет подсловом слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$. Пусть теперь $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ — подслово слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$. Докажем индукцией по n , что $w_i(\vec{e}, e_1) = t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ для некоторого i . Пусть $n = 1$. Тогда $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ — подслово слова $w_1(\vec{e}, e_1)$. Заметим, что $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ представимо в виде $(z_1(z_2 z_3))z_4$, где

$$\begin{aligned} z_1 &= (\dots((s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60})x_{v+61})x_{v+62}) \\ &\quad (x_{v+63}x_{v+64}))x_{v+65} \dots)x_{u+v+55}, \\ z_2 &= x_{u+v+56}x_{u+v+57}, \quad z_3 = x_{u+v+58}x_{u+v+59}, \quad z_4 = x_{u+v+60}. \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующее подслово слова $w_1(\vec{e}, e_1)$ должно быть представимо в виде $(z_1(z_2 z_3))z_4$. Как нетрудно убедиться, подслов слова $w_1(\vec{e}, e_1)$, имеющих такой вид, возможно только девять:

- 1) $((e)e)(ee)e$;
- 2) $s_1(e, \dots, e)$;
- 3) $(e(s_1(e, \dots, e)e))e$;
- 4) $(\underbrace{e(\dots(e((e(s_1(e, \dots, e)e))e))\dots)}_{p-6 \text{ раз}}))e$;
- 5) $s_3(s_1(e, \dots, e), e, \dots, e)e$;
- 6) $((s_3(s_1(e, \dots, e), e, \dots, e)e)(ee))e$;
- 7) $s_1(s_3(s_1(e, \dots, e), \dots, e), e, \dots, e)$;
- 8) $((s_1(s_3(s_1(e, \dots, e), \dots, e), e, \dots, e)e)(ee))e$;
- 9) $w_1(\vec{e}, e_1)$, где $e \in \{e_1, e_2, \dots\}$.

Заметим, что длина слова $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ больше 60, а длины слов 1), 2) и 3) равны 6, 30 и 33, соответственно. Следовательно, случаи 1)–3) невозможны. Предположим, что имеет место случай 4). Тогда должны выполняться следующие равенства:

$$z_1 = e, \quad z_2 = e, \quad z_3 = \underbrace{e(\dots(e((e(s_1(e, \dots, e)e))e))\dots)}_{p-8 \text{ раз}}, \quad z_4 = e.$$

Отсюда вытекает равенство $e = x_{u+v+56}x_{u+v+57}$, что невозможно. В случае 5) получаем

$$z_1 = e, \quad z_2 = \underbrace{e(\dots(e((e(s_1(e, \dots, e)e))e))\dots)}_{p-6 \text{ раз}}, \quad z_3 = e, \quad z_4 = e.$$

Отсюда следует ложное равенство $e = x_{u+v+58}x_{u+v+59}$. Если выполняется случай 6), то должны иметь место следующие равенства:

$$z_1 = (s_3(s_1(e, \dots, e), e, \dots, e)e)e, \quad z_2 = e, \quad z_3 = e, \quad z_4 = e.$$

Следовательно, $e = x_{u+v+56}x_{u+v+57}$, что невозможно. Предположим, что имеет место случай 7). Тогда

$$z_1 = (\dots(((s_3(s_1(e, \dots, e), e, \dots, e)e)e)(ee))\underbrace{e}_{20 \text{ раз}})\dots)e, \quad z_2 = ee, \quad z_3 = ee, \quad z_4 = 4.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} & (\dots(((s_3(s_1(e, \dots, e), e, \dots, e)e)e)(ee))\underbrace{e}_{20 \text{ раз}})\dots)e \\ &= (\dots(((s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60})x_{v+61})x_{v+62}) \\ & \quad (x_{v+63}x_{v+64}))x_{v+65} \dots)x_{u+v+55}). \end{aligned}$$

Легко понять, что последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u-9=20$, $x_i = e$ при $i \in \{v+61, \dots, u+v+55\}$ и справедливо равенство

$$s_3(s_1(e, \dots, e), \dots, e) = s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60}).$$

Из последнего равенства очевидным образом вытекает

$$\begin{aligned} e &= ((\dots(((s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30})x_{v+31})x_{v+32}) \\ & \quad (x_{v+33}x_{v+34}))x_{v+35} \dots)x_{v+55})((x_{v+56}x_{v+57})(x_{v+58}x_{v+59}))), \end{aligned}$$

что невозможно. Если подслово $(z_1(z_2z_3))z_4$ слова $w(\vec{e}, e_1)$ имеет вид 8), то должно выполняться ложное равенство $x_{u+v+58}x_{u+v+59} = e$. Итак, мы показали, что случаи 1)–8) невозможны. Следовательно, $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60}) = w_1(\vec{e}, e_1)$. База индукции доказана.

Допустим, что утверждение леммы справедливо для некоторого n . Покажем, что оно выполняется и для $n + 1$. В самом деле, пусть $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ является подсловом слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$. Заметим, что всякое собственное подслово слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$ должно быть также и подсловом слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$ или слова $w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$. Следовательно, по предположению индукции слово $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ является собственным подсловом слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$ тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ такое, что $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60}) = w_i(\vec{e}, e_1)$. Пусть теперь $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60}) = w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{u+v+60} &= w_{n+1}(\vec{e}, e_1), \\ ((\dots(((s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60})x_{v+61})x_{v+62}) \\ (x_{v+63}x_{v+64}))x_{v+65} \dots)x_{u+v+55})((x_{u+v+56}x_{u+v+57})(x_{u+v+58}x_{u+v+59})) \\ &= w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1). \end{aligned}$$

Пусть $n = 1$. Тогда из равенства

$$\begin{aligned} ((\dots(((s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60})x_{v+61})x_{v+62}) \\ (x_{v+63}x_{v+64}))x_{v+65} \dots)x_{u+v+55})((x_{u+v+56}x_{u+v+57})(x_{u+v+58}x_{u+v+59})) \\ &= w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \end{aligned}$$

получаем $(x_{u+v+56}x_{u+v+57})(x_{u+v+58}x_{u+v+59}) = e$, что невозможно. Допустим, что $n > 1$. Тогда из равенства

$$\begin{aligned} ((\dots(((s_1(s_3(s_1(x_1, \dots, x_{30}), x_{31}, \dots, x_{v+30}), x_{v+31}, \dots, x_{v+60})x_{v+61})x_{v+62}) \\ (x_{v+63}x_{v+64}))x_{v+65} \dots)x_{u+v+55})((x_{u+v+56}x_{u+v+57})(x_{u+v+58}x_{u+v+59})) \\ &= w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \end{aligned}$$

вытекает, что $(x_{u+v+56}x_{u+v+57})(x_{u+v+58}x_{u+v+59}) = w_n(\vec{e}, e_1)$, а значит, должно выполняться ложное равенство $x_{u+v+58}x_{u+v+59} = e$. Поэтому $t_u^v(x_1, \dots, x_{u+v+60})$ не равно $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+1}(\vec{e}, e_1)$. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим случай многообразия $\mathfrak{M}^{p+6}$. Многообразия $\mathfrak{B}^{p+6}$ и $\mathfrak{D}^{p+6}$ рассматриваются аналогично. Так как многочлен h_1 получен из тождества многообразия $\mathfrak{M}^{p+6}$, то

$$h_1 = w_1(\vec{x}, x_1) \dots w_n(\vec{x}, x_1) + w_{n+1}(\vec{x}, x_1) \dots w_{n+k}(\vec{x}, x_1).$$

Поэтому в силу леммы 3 одночлен многочлена h_1 является подсловом слова вида $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$ тогда и только тогда, когда это $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$ или $w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1)$. Следовательно, если существует i такое, что x_i не содержит одночлена e , то $f_1 = 0$, $f_2 = u_{11}h_1u_{12}$. Пусть теперь для любого i $x_i = e + x_i^*$, где x_i^* — многочлен, не содержащий одночлена e . Тогда представим многочлен h_1 в виде

$$w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1) + w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1) + f(\vec{x}^*).$$

Легко понять, что $u_{11}f(\vec{x}^*)u_{12}$ — подмногочлен многочлена f_2 . Рассмотрим многочлен $u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1) + w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1))u_{12}$.

ЛЕММА 4. Если для некоторого слова $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$ при $n > 1$ существует слово $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$ такое, что

$$u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1))u_{12} = w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1),$$

то для любого слова $w_{a_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{a_r}(\vec{e}, e_1)$ найдется слово $w_{b_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{b_q}(\vec{e}, e_1)$ такое, что выполняется равенство

$$w_{b_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{b_q}(\vec{e}, e_1) = u_{11}(w_{a_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{a_r}(\vec{e}, e_1))u_{12}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1))u_{12} = w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$$

получаем, что слово $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$ является собственным подсловом слова $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$. Легко понять, что произвольное собственное подслово слова $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$ либо является подсловом слова $w_{l_j}(\vec{e}, e_1)$ для некоторого $j \in \{1, \dots, p\}$, либо имеет вид $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_{p_0}}(\vec{e}, e_1)$, где $p_0 < p$. Из леммы 3 очевидным образом вытекает, что $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)$ не является подсловом слова $w_{l_j}(\vec{e}, e_1)$. Следовательно,

$$w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1) = w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_{p_0}}(\vec{e}, e_1),$$

а значит, для любого слова $w_{a_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{a_r}(\vec{e}, e_1)$ имеем

$$u_{11}(w_{a_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{a_r}(\vec{e}, e_1))u_{12} = w_{a_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{a_r}(\vec{e}, e_1)w_{l_{p_0+1}}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1).$$

Лемма 4 доказана.

Предположим, что слово $u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1))u_{12}$ представимо в виде $w_{l_1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_{p_0}}(\vec{e}, e_1)$. Тогда и слово $u_{11}(w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1))u_{12}$ в силу леммы 4 представимо в аналогичном виде. При этом, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} & u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1))u_{12} \\ &= w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)w_{l_{p_0+1}}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1), \\ & u_{11}(w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1))u_{12} \\ &= w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1)w_{l_{p_0+1}}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1). \end{aligned}$$

Допустим, что одночлен $w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1)w_{l_{p_0+1}}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$ может быть получен конечным числом перестановок вида

$$\begin{aligned} A(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow B(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), & C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1), \\ A(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), & B(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1) &\leftrightarrow C(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1) \end{aligned}$$

из одночлена вида $Q_l(\vec{e}, e_1)A^{r_1}(\vec{e}, e_1)B^{r_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1)$. Легко убедиться, что тогда и одночлен $w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1)w_{l_{p_0+1}}(\vec{e}, e_1) \dots w_{l_p}(\vec{e}, e_1)$ может быть получен аналогичным образом. Следовательно, либо $f_1 = 0$, $f_2 = u_{11}h_1u_{12}$, либо $f_1 = u_{11}(w_1(\vec{e}, e_1) \dots w_n(\vec{e}, e_1))u_{12} + u_{11}(w_{n+1}(\vec{e}, e_1) \dots w_{n+k}(\vec{e}, e_1))u_{12}$, $f_2 = u_{11}(f(x^*))u_{12}$.

Легко понять, что из равенства

$$Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) + Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) = f_1 + f_2$$

вытекает $f_2 = 0$. Пусть h – многочлен, полученный из многочлена

$$Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) + Q_j(\vec{e}, e_1)A^{\eta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\eta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1)$$

при помощи перестановок вида

$$A(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1) \leftrightarrow B(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), \quad C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1), \\ A(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) \leftrightarrow D(\vec{e}, e_1)A(\vec{e}, e_1), \quad B(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1) \leftrightarrow C(\vec{e}, e_1)B(\vec{e}, e_1),$$

а h^1, h^2 – его одночлены. Индукцией по числу d одночленов в многочлене f_1 покажем, что если выполняется равенство $h = f_1$, то существует конечное вычисление на машине M , при помощи которого она переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, или наоборот. Предположим, что $d = 0$. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d . Покажем, что оно выполняется и для $d + 1$. Равенство $h = f_1$ можно представить в виде $h^1 + h^2 = \sum_{i,j} v_{i,j} h_{i,j} v_{i,j}$. В силу свободы кольца $F\mathfrak{R}_2$ существуют i, j такие, что h^1 – одночлен многочлена $v_{i,j} h_{i,j} v_{i,j}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = j = 1$. В зависимости от того, из тождества какого многообразия получен многочлен h_1 , следует рассмотреть три случая. Допустим, что многочлен h_1 получен из тождества многообразия $\mathfrak{M}^{p+6}$. Тогда, как замечено выше, многочлен h_1 является суммой двух одночленов. Обозначим их через h_1^1 и h_1^2 . Поскольку h^1 – одночлен многочлена $v_{1,1} h_1 v_{1,1}$, то можно считать, что $h^1 = v_{1,1} h_1^1 v_{1,1}$. Поэтому из равенства $h^1 + h^2 = \sum_{i,j} v_{i,j} h_{i,j} v_{i,j}$ получаем

$$h^2 + v_{1,1} h_1^2 v_{1,1} = h^1 + h^2 + v_{1,1} h_1^1 v_{1,1} + v_{1,1} h_1^2 v_{1,1} \\ = \sum_{i,j} v_{i,j} h_{i,j} v_{i,j} + v_{1,1} h_1^1 v_{1,1} + v_{1,1} h_1^2 v_{1,1} = \sum_{i>1,j} v_{i,j} h_{i,j} v_{i,j}.$$

Покажем, что многочлен $h^2 + v_{1,1} h_1^2 v_{1,1}$ может быть получен при помощи указанных выше перестановок из многочлена

$$Q_a(\vec{e}, e_1)A^{\alpha_1}(\vec{e}, e_1)B^{\alpha_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1) + Q_b(\vec{e}, e_1)A^{\beta_1}(\vec{e}, e_1)B^{\beta_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1)$$

для некоторых $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Предположим, что одночлен h^1 получен из одночлена $Q_i(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1}(\vec{e}, e_1)B^{\xi_2}(\vec{e}, e_1)C(\vec{e}, e_1)D(\vec{e}, e_1)$. Следует рассмотреть четыре случая в зависимости от конкретного вида тождества многообразия $\mathfrak{M}^{p+6}$. Рассмотрение их аналогично. Поэтому мы ограничимся тождеством

$$Q_i(\vec{x}, x_1)A(\vec{x}, x_1)B(\vec{x}, x_1) = Q_l(\vec{x}, x_1)A^{\varepsilon_1+1}(\vec{x}, x_1)B^{\varepsilon_2+1}(\vec{x}, x_1).$$

Так как h_1 соответствует этому тождеству, то слово $v_{1_1}h_1^2v_{1_2}$ может быть получено только из слова $Q_l(\vec{e}, e_1)A^{\xi_1+\varepsilon_1}(\vec{x}, x_1)B^{\xi_2+\varepsilon_2}(\vec{x}, x_1)$. Следовательно, $a = j$, $b = l$, $\alpha_1 = \eta_1$, $\alpha_2 = \eta_2$, $\beta_1 = \xi_1 + \varepsilon_1$, $\beta_2 = \xi_2 + \varepsilon_2$. Таким образом, к равенству $h^2 + v_{1_1}h_1^2v_{1_2}$ можно применить предположение индукции.

Итак, мы убедились, что при $n \geq p$ тождество

$$\begin{aligned} Q_i(\vec{x}, x_1)A^{\xi_1}(\vec{x}, x_1)B^{\xi_2}(\vec{x}, x_1)C(\vec{x}, x_1)D(\vec{x}, x_1) \\ = Q_j(\vec{x}, x_1)A^{\eta_1}(\vec{x}, x_1)B^{\eta_2}(\vec{x}, x_1)C(\vec{x}, x_1)D(\vec{x}, x_1) \end{aligned}$$

выполняется в кольце $F_n\mathfrak{X}_p$ тогда и только тогда, когда существует конечное вычисление на машине M , при помощи которого она переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, или наоборот. Поэтому тождество

$$Q_1(\vec{x}, x_1)A^{2^k}(\vec{x}, x_1)C(\vec{x}, x_1)D(\vec{x}, x_1) = Q_0(\vec{x}, x_1)A(\vec{x}, x_1)C(\vec{x}, x_1)D(\vec{x}, x_1)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $k \in P$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Существует многообразие колец $\mathfrak{X}$ с неразрешимой эквациональной теорией такое, что для любого натурального n проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}$ ранга n , свободном в многообразии $\mathfrak{X}$, разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = x_{r+4}((\dots((x_3(x_1x_2))x_4)\dots)x_{r+3}),$$

P – некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел. Обозначим через $\mathfrak{X}_1$ многообразие колец, заданное тождествами $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$, где $r \in P$. Пусть $\mathfrak{X}_2$ – многообразие колец, заданное тождествами

$$2x = 0, \quad Y_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0 \quad \text{и} \quad Z_r(x_1, \dots, x_{r+5}) = 0,$$

где r – произвольное натуральное число и для некоторых $i, j \in \{4, \dots, r\}$ слово $Y_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ может быть получено из слова $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ заменой x_i на x_j , а слово $Z_r(x_1, \dots, x_{r+5})$ получено из $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ заменой x_i на x_ix_{r+5} . Обозначим через $\mathfrak{X}$ многообразие колец $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$.

Покажем, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ неразрешима. Для этого достаточно убедиться в том, что многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$ тогда и только тогда, когда $r \in P$. Допустим, что $r \in P$. Тогда многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$ по построению. Пусть теперь многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$ и $r \notin P$. Так как многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$, то этому тождеству удовлетворяет и кольцо $F\mathfrak{X}$ счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{X}$. Следовательно, в кольце $F\mathfrak{X}$ выполняется соотношение $X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) = 0$, где $e_1, \dots, e_{r+4}$ – свободные образующие кольца $F\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ многообразие всех колец характеристики 2. Пусть $F\mathfrak{A}$ – кольцо счетного ранга свободное в многообразии $\mathfrak{A}$.

Обозначим через S множество многочленов $f(\vec{e})$ таких, что $f(\vec{e}) = 0$ – соотношение в кольце $F\mathfrak{X}$, полученное подстановкой конкретных значений вместо переменных в одно из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}$. Пусть I – идеал, порожденный множеством S в кольце $F\mathfrak{X}$. Тогда очевидно, что

$$F\mathfrak{X} \models X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) = 0 \iff F\mathfrak{X} \models X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) \in I.$$

Вхождение многочлена $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ в идеал I равносильно в кольце $F\mathfrak{X}$ равенству вида $X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$, где $u_{i1} h_j u_{i2}$ – некоторое произведение многочленов, одним из сомножителей в котором является многочлен h_j , $h_j \in S$. В силу дистрибутивности можно считать, что все сомножители, кроме h_j , в произведении $u_{i1} h_j u_{i2}$ являются одночленами. Так как в кольце $F\mathfrak{X}$ выполняется равенство $X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$, то существуют i, j такие, что слово $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ является одночленом многочлена $u_{i1} h_j u_{i2}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = j = 1$. В зависимости от того, из какого тождества получен многочлен h_1 , следует рассмотреть три случая. Допустим, что многочлен h_1 получен из тождества вида $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = 0$. Тогда слово $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ должно содержать подслово вида $X_p(x_1, \dots, x_{p+4})$. Предположим теперь, что $X_p(x_1, \dots, x_{p+4})$ является собственным подсловом слова $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$. Тогда должно выполняться одно из следующих равенств:

- 1) $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = (\dots((e_3(e_1 e_2))e_4) \dots) e_{k+3}$, где $k \leq r$;
- 2) $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = e_3(e_1 e_2)$;
- 3) $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = e_1 e_2$;
- 4) $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = e_i$, где $i \in \{1, \dots, r+4\}$.

Заметим, что длина слова $X_p(x_1, \dots, x_{p+4})$ не меньше 4. Следовательно, равенства 2)–4) невозможны. Допустим, что имеет место равенство 1). Тогда должны выполняться следующие два равенства:

$$x_{r+4} = (\dots((e_3(e_1 e_2))e_4) \dots) e_{k+2}, \quad (\dots((x_3(x_1 x_2))x_4) \dots) x_{r+3} = e_{k+3}.$$

Заметим, что длина $(\dots((x_3(x_1 x_2))x_4) \dots) x_{r+3}$ не меньше 3. Следовательно, равенство $(\dots((x_3(x_1 x_2))x_4) \dots) x_{r+3} = e_{k+3}$ ложно. Полученное противоречие доказывает, что слово $X_p(x_1, \dots, x_{p+4})$ не является собственным подсловом слова $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$. Предположим теперь, что выполняется равенство $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$. По предположению $p \neq r$. Допустим, что $p > r$. Тогда равенство $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ очевидно ложно. Пусть теперь $p < r$. Тогда, как нетрудно убедиться, должны выполняться следующие равенства:

- 1) $x_{p+4-i} = e_{r+4-i}$, где $i \in \{0, 1, \dots, p\}$;
- 2) $x_3(x_1 x_2) = (\dots((e_3(e_1 e_2))e_4) \dots) e_{r+3-p}$.

Из равенства $x_3(x_1 x_2) = (\dots((e_3(e_1 e_2))e_4) \dots) e_{r+3-p}$ очевидным образом вытекает равенство $x_1 x_2 = e_{r+3-p}$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что слово $X_p(x_1, \dots, x_{p+4})$ не является подсловом слова $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ и, следовательно, слово $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$ не является одночленом многочлена h_1 , полученного из тождества вида $X_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = 0$. Случай, когда многочлен h_1 получен из тождества вида $Y_p(x_1, \dots, x_{p+4}) = 0$ или $Z_p(x_1, \dots, x_{p+5}) = 0$, рассматривается совершенно аналогично. Поэтому мы его опустим. Итак, мы убедились в том, что слово $X_r(e_1, \dots, e_{r+4})$

не является одночленом многочлена $\sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$. Отсюда в силу свободы кольца $F\mathfrak{X}$ вытекает, что равенство $X_r(e_1, \dots, e_{r+4}) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2}$ ложно. Следовательно, многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $X_r(x_1, \dots, x_{r+4}) = 0$ тогда и только тогда, когда $r \in P$. Отсюда в силу нерекурсивности множества P получаем, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ неразрешима.

Для завершения доказательства теоремы 2 нам осталось показать, что для любого натурального n проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}$ ранга n свободном в многообразии $\mathfrak{X}$ разрешима. Для этого достаточно показать, что существует алгоритм, определяющий по произвольному многочлену $f(\vec{e})$ выполняется в кольце $F_n\mathfrak{X}$ равенство $f(\vec{e}) = 0$ или нет. В силу разрешимости проблемы равенства в кольце $F\mathfrak{X}$ (см. [2]) существует алгоритм, определяющий по произвольному одночлену многочлена $f(\vec{e})$, содержит он подслово вида $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ или нет. Допустим, что некоторый одночлен многочлена $f(\vec{e})$ не содержит подслова вида $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$. Тогда очевидно, что $f(\vec{e}) \neq 0$. Пусть теперь произвольный одночлен многочлена $f(\vec{e})$ содержит подслово вида $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$. Тогда, как нетрудно убедиться, равенство $f(\vec{e}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда в каждом одночлене многочлена $f(\vec{e})$ подслово $X_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ имеет вид $Y_r(x_1, \dots, x_{r+4})$ или $Z_r(x_1, \dots, x_{r+5})$, или $r + 4 \geq n$, или $r \in P \cap \{1, \dots, n - 5\}$. Каждое из этих четырех условий алгоритмически распознаваемо. Следовательно, проблема равенства в кольце $F_n\mathfrak{X}$ действительно разрешима. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Попов В. Ю. Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 3. С. 347–361.
- [2] Жуков А. И. Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах // Матем. сб. 1950. Т. 27. № 2. С. 267–280.

Уральский государственный технический университет

Поступило

16.12.1997

Исправленный вариант

26.04.1999