Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Устиновский, Гипотеза о торическом ранге
для момент-угол комплексов, *Матем. заметки*, 2011,
том 90, выпуск 2, 300–305

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:51:17

Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов

Ю. М. Устиновский

В настоящей заметке мы рассматриваем операцию $K \mapsto L(K)$ на множестве симплициальных комплексов, которую называем “операцией удвоения”. Определение этой комбинаторной операции в торической топологии дали Бахри, Бендерски, Коэн и Гитлер в своей недавней (еще неопубликованной) работе, посвященной обобщенным момент-угол комплексам (также известным как K -степени). Основное свойство операции удвоения состоит в том, что момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ может быть отождествлен с вещественным момент-угол комплексом $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}$, отвечающим удвоенному комплексу $L(K)$. В качестве приложения этой операции мы дадим доказательство гипотезы о торическом ранге для пространств $\mathcal{Z}_K$, оценив снизу ранг кольца когомологий вещественных момент-угол комплексов $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$. Эта заметка может рассматриваться как продолжение предыдущей работы автора, где для доказательства гипотезы о торическом ранге в случае момент-угол многообразий была рассмотрена операция удвоения многогранников.

Библиография: 7 названий.

1. Операция удвоения. Сначала мы дадим определение “операции удвоения” и обсудим ее основные свойства.

Об определениях, сформулированных ниже, автор узнал от авторов недавней работы [1], в которой впервые операция удвоения была рассмотрена в контексте торической топологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть K – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Удвоением K называется комплекс $L(K)$ на множестве вершин $[2m] = \{v_1, v'_1, \dots, v_m, v'_m\}$, определяемый следующим условием: $\omega \subset [2m]$ является минимальным (по включению) недостающим симплексом комплекса $L(K)$ тогда и только тогда, когда ω имеет вид $\{v_{i_1}, v'_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v'_{i_k}\}$, где $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ – недостающий симплекс комплекса K .

Отметим, что если комплекс $K = \partial P^*$ является границей многогранника, двойственного к простому многограннику P , то $L(K)$ совпадает с $L(P)^*$, см. определение 1 в [2].

Операция удвоения простых многогранников использовалась также в работе [3] Гитлера и Лопеса де Медрано.

ПРИМЕР 2. Если $K = \Delta^m$ есть $(m - 1)$ -мерный симплекс, то $L(K) = \Delta^{2m}$.

ПРИМЕР 3. Если $K = \partial\Delta^m$ – граница $(m-1)$ -мерного симплекса, то $L(K) = \partial\Delta^{2m}$.

Легко видеть, что операция удвоения согласуется с джоинном симплициальных комплексов, т.е. $L(K_1 * K_2) = L(K_1) * L(K_2)$.

Обозначим через $\text{mdim } K$ минимальную размерность максимального по включению симплекса комплекса K . Таким образом, например, комплекс K является чистым тогда и только тогда, когда $\text{mdim } K = \dim K$.

Следующая лемма напрямую следует из определений.

ЛЕММА 4. Пусть K – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, тогда

$$\dim L(K) = m + \dim K \quad \text{и} \quad \text{mdim } L(K) = m + \text{mdim } K.$$

2. K -степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Рассмотрим пару клеточных комплексов (X, A) . Для подмножества $\omega \subset [m]$ определим

$$(X, A)^\omega := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i \in A \text{ при } v_i \notin \omega\}.$$

Рассмотрим теперь симплициальный комплекс K на множестве $[m]$. K -степенью пары (X, A) называется топологическое пространство

$$(X, A)^K := \bigcup_{\omega \in K} (X, A)^\omega.$$

В этой заметке мы будем иметь дело с двумя примерами K -степеней (см. [4]):

- момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K$;
- вещественные момент-угол комплексы $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = (I^1, S^0)^K$.

Оказывается, что операция удвоения естественным образом возникает при изучении связей между момент-угол комплексами и их вещественными аналогами.

ЛЕММА 6. Пусть (X, A) – пара клеточных комплексов, а K – симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим пару пространств $(Y, B) = (X \times X, (X \times A) \cup (A \times X))$. Тогда

$$(Y, B)^K = (X, A)^{L(K)}.$$

В частности, $\mathcal{Z}_K = \mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in Y^m$ положим

$$\omega_Y(\mathbf{y}) = \{v_i \in [m] \mid y_i \in Y \setminus B\} \subset [m].$$

Для точки $\mathbf{x} = (x_1, x'_1, \dots, x_m, x'_m) \in X^{2m}$ подмножество $\omega_X(\mathbf{x}) \subset [2m]$ определяется аналогично. Пусть

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = ((x_1, x'_1), \dots, (x_m, x'_m)) \in Y^m = X^{2m}.$$

Из определения K -степеней следует, что $\mathbf{y} \notin (Y, B)^K$ тогда и только тогда, когда $\omega_Y(\mathbf{y}) \notin K$. Покажем, что последнее эквивалентно условию $\omega_X(\mathbf{x}) \notin L(K)$, где $\mathbf{x} = (x_1, x'_1, \dots, x_m, x'_m)$.

Действительно, если $\omega_Y(\mathbf{y}) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \notin K$, то $\omega_X(\mathbf{x}) \supset \{v_{i_1}, v'_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v'_{i_k}\} \notin L(K)$. Обратно, пусть $\omega_X(\mathbf{x}) \notin L(K)$, тогда по определению операции удвоения в комплексе $L(K)$ найдется недостающий симплекс вида $\{v_{i_1}, v'_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v'_{i_k}\} \subset \omega_X(\mathbf{x})$, где $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \notin K$. Следовательно $\omega_Y(\mathbf{y})$ содержит недостающий симплекс комплекса K , что и требовалось.

Итак, окончательно имеем

$$\mathbf{y} \notin (Y, B)^K \iff \mathbf{x} \notin (X, A)^{L(K)},$$

тем самым, утверждение леммы доказано.

ПРИМЕР 7. Пусть $K = \partial\Delta^2$. Тогда мы имеем стандартное разложение трехмерной сферы:

$$\mathcal{Z}_K = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 = S^3.$$

С другой стороны $L(K) = \partial\Delta^4$, поэтому $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)} = \partial I^4 = S^3$ есть граница четырехмерного куба. Таким образом, в соответствии с леммой $\mathcal{Z}_K = \mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}$.

3. Гипотеза о торическом ранге. Для топологического пространства X обозначим через $\text{trk}(X)$ максимальное число, для которого X допускает почти свободное действие тора $T^{\text{trk}(X)}$.

ГИПОТЕЗА ГАЛЬПЕРИНА О ТОРИЧЕСКОМ РАНГЕ [5]. Пусть X – конечномерный клеточный комплекс. Тогда имеет место неравенство

$$\text{hrk}(X, \mathbb{Q}) := \sum \dim H^i(X, \mathbb{Q}) \geq 2^{\text{trk}(X)}.$$

На пространстве $\mathcal{Z}_K$ имеется стандартное покоординатное действие m -мерного тора, поэтому момент-угол комплексы образуют большую серию пространств с действием тора. Это действие несвободно, но при некоторых r возможно выбрать подтор $T^r \subset T^m$, действующий на пространстве $\mathcal{Z}_K$ почти свободно. Мы хотим оценить сверху максимальный ранг r такого подтора и найти нижнюю границу для $\text{hrk}(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q})$.

ЛЕММА 8. Пусть K – $(n-1)$ -мерный симплицальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда ранг подтора $T^r \subset T^m$, действующего на $\mathcal{Z}_K$ почти свободно, не превосходит $m-n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для подмножества $\omega \subset [m]$ положим $T^\omega = (T, e)^\omega$ (см. определение K -степеней), где $e \in T$ единица группы. Легко видеть, что стабилизаторы точек в $\mathcal{Z}_K$ имеют вид T^ω , $\omega \in K$. Следовательно, $T^r \subset T^m$ действует почти свободно тогда и только тогда, когда пересечение $T^r \cap T^\omega$ конечно для каждого симплекса $\omega \in K$.

Рассмотрим симплекс σ размерности $n-1$. Так как пересечение $T^r \cap T^\sigma$ двух подторов в T^m конечно, то

$$\text{rk } T^r + \text{rk } T^\sigma \leq \text{rk } T^m,$$

поэтому $r \leq m-n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. На самом деле для каждого $(n-1)$ -мерного комплекса K найдется подтор $T^r \subset T^m$ ранга в точности $r = m-n$, действующий на $\mathcal{Z}_K$ почти свободно, [6; § 7.1].

Теперь мы можем сформулировать основной результат о когомологиях вещественных момент-угол комплексов.

ТЕОРЕМА 10. Пусть K – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ с $\text{mdim } K = n - 1$. Тогда

$$\text{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}.$$

Для начала формулируем и докажем одну общую лемму.

ЛЕММА 11. Пусть дана пара клеточных пространств (X, A) . Обозначим через $Y = X_1 \cup_A X_2$ пространство, полученное склейкой двух копий X вдоль A . Тогда для ранга кольца когомологий пространства Y имеет место следующая оценка снизу:

$$\text{hrk}(Y, \mathbb{Q}) \geq \text{hrk}(A, \mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим длинную точную последовательность Майера–Вьеториса к клеточным пространствам X_1 , X_2 , $Y = X_1 \cup X_2$ и $A = X_1 \cap X_2$ и оценим ранг кольца когомологий пространства Y :

$$\dots \xrightarrow{p_{(k-1)}^*} H^{k-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\delta_{(k)}^*} H^k(Y) \xrightarrow{g_{(k)}^*} H^k(X_1) \oplus H^k(X_2) \xrightarrow{p_{(k)}^*} \dots$$

Отображение $p_{(k)}^*$ имеет вид $(i_1^*) \oplus (-i_2^*)$, где i_1 и i_2 – вложения пространства $X_1 \cap X_2$ в X_1 и X_2 соответственно. Так как $X_1 = X_2$ и отображения i_1 и i_2 совпадают, то $\dim \ker p_{(k)}^* \geq \dim H^k(X_1) = \dim H^k(X)$. Применяя эти неравенства (напомним, что $X_1 \cap X_2 = A$), получаем

$$\begin{aligned} \dim H^k(Y) &= \dim \ker g_{(k)}^* + \dim \text{im } g_{(k)}^* = \dim \text{im } \delta_{(k)}^* + \dim \ker p_{(k)}^* \\ &\geq \dim H^{k-1}(A) - \dim \text{im } p_{(k-1)}^* + \dim H^k(X) \\ &\geq \dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X). \end{aligned}$$

Осталось лишь просуммировать эти неравенства по k :

$$\begin{aligned} \text{hrk}(Y, \mathbb{Q}) &= \sum \dim H^k(Y) \geq \sum (\dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X)) \\ &= \sum \dim H^{k-1}(A) = \text{hrk}(A, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Доказательство проведем индукцией по m . База индукции очевидна.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех комплексов с менее чем m вершинами, а комплекс K имеет m вершин.

Вещественный момент-угол комплекс естественным образом вкладывается в m -мерный куб: $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset [-1; 1]^m$. Обозначим через $(x_1, \dots, x_m)$ координаты в $[-1; 1]^m$. Без ограничения общности можно считать, что вершина v_1 принадлежит максимальному (по включению) симплексу комплекса K размерности $\text{mdim } K = n - 1$. Рассмотрим разложение $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = M_+ \cup_X M_-$, где

- $M_+ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0\}$,
- $M_- = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 \leq 0\}$,
- $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}$.

Легко видеть, что пара пространств (M_+, X) удовлетворяет предположению леммы 11, поэтому

$$\mathrm{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geq \mathrm{hrk}(X, \mathbb{Q}).$$

Опишем пространство X более подробно. Обозначим через k число вершин комплекса $\mathrm{lk} v_1$. Тогда пространство X есть объединение 2^{m-k-1} копий пространства $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\mathrm{lk} v_1}$. Более того, так как вершина v_1 принадлежит максимальному по включению симплексу размерности $n-1$, то $\mathrm{mdim} \mathrm{lk} v_1 = n-2$. Таким образом, по предположению индукции

$$\mathrm{hrk}(X, \mathbb{Q}) = 2^{m-k-1} \mathrm{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\mathrm{lk} v_1}, \mathbb{Q}) \geq 2^{m-k-1} \cdot 2^{k-(n-1)} = 2^{m-n}.$$

Переход индукции доказан.

Обратимся теперь к момент-угол комплексам.¹ Комбинируя результаты лемм 4 и 6, а также теоремы 10, мы получаем

$$\mathrm{hrk}(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) = \mathrm{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}) \geq 2^{2m - \mathrm{mdim} L(K) - 1} = 2^{m - \mathrm{mdim} K - 1} \geq 2^{m - \dim K - 1}.$$

Итак, гипотеза о торическом ранге выполнена для действия подторов в торе T^m , действующем стандартным образом на момент-угол комплексах $\mathcal{Z}_K$.

Кольцо когомологий пространства $\mathcal{Z}_K$ было вычислено в [4]. Одно из следствий этого вычисления и теоремы Хохстера утверждает (см. [4; теорема 8.7]):

ТЕОРЕМА 12. *Выполнено*

$$H^*(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m], p \geq -1} \tilde{H}^p(K_\omega, \mathbb{Q}),$$

где K_ω – ограничение комплекса K на подмножество $\omega \subset [m]$.

Здесь формально считается, что $\tilde{H}^{-1}(\emptyset, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Ввиду этой теоремы мы можем переформулировать наш основной результат исключительно в комбинаторных терминах.

СЛЕДСТВИЕ 13. *Для всякого симплицального комплекса K на множестве вершин $[m]$ с $\mathrm{mdim} K = n-1$ выполнено неравенство*

$$\dim \bigoplus_{\omega \subset [m]} \tilde{H}^*(K_\omega, \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}.$$

Автор благодарен В. М. Бухштаберу и научному руководителю Т. Е. Панову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, “On an infinite family of toric manifolds associated to a given one” (to appear).

¹Во время подготовки этой заметки автор узнал, что гипотеза о торическом ранге для момент-угол многообразий (см. [2]) была доказана (совершенно другим методом) в недавней работе [7].

- [2] Ю. М. Устиновский, “Операция удвоения многогранников и действия тора”, *УМН*, **64**:5 (2009), 181–182.
- [3] S. Gitler, S. Lopez de Medrano, *Intersections of Quadrics, Moment-Angle Manifolds and Connected Sums*, 2009, arXiv: [math.GT/0901.2580](#).
- [4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.
- [5] S. Halperin, “Rational homotopy and torus actions”, *Aspects of Topology*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 293–306.
- [6] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
- [7] X. Cao, Z. Lu, *Möbius Transform, Moment-Angle Complexes and Halperin–Carlsson Conjecture*, 2009, arXiv: [math.CO/0908.3174](#).

Ю. М. Устиновский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yura.ust@gmail.com

Поступило

27.01.2010

Исправленный вариант

24.10.2010