Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Мищенко, А. В. Попов, Многообразие йордановых алгебр, определяемое тождеством $(xy)(zt) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 877–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:19:02

Многообразие йордановых алгебр, определяемое тождеством $(xy)(zt) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост

С. П. Мищенко, А. В. Попов

В работе доказано, что в случае нулевой характеристики основного поля названное многообразие имеет почти полиномиальный рост. Построена порождающая это многообразие алгебра, а также дано полное описание структуры его полилинейной части как модуля симметрической группы.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Изучение многообразий линейных алгебр над некоторым полем, т.е. классов алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождественных соотношений, является традиционной задачей современной алгебры. В случае, когда основное поле имеет нулевую характеристику, любое тождественное соотношение эквивалентно системе полилинейных тождеств [1], поэтому вся информация о многообразии содержится в пространствах полилинейных элементов относительно свободной алгебры. В зависимости от поведения последовательности размерностей этих пространств, так называемых коразмерностей многообразия, определяют понятие роста многообразия.

В случае ассоциативных алгебр доказано, что существуют только многообразия полиномиального и экспоненциального роста. Причем, для экспоненциального роста показатель экспоненты целочисленный [2]. Для алгебр Ли построены примеры как сверх экспоненциального роста [3], так и экспоненциального с дробным показателем [4]. Но, как и для ассоциативных алгебр, доказано, что нет многообразий промежуточного между полиномиальным и экспоненциальным роста [5].

Особый интерес представляют многообразия со следующим экстремальным свойством: всякое собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост, а рост самого многообразия не является полиномиальным. В этом случае говорят, что многообразие имеет почти полиномиальный рост. Например, в упомянутой статье [5], используя многообразие почти полиномиального роста, получен удобный критерий полиномиальности роста многообразия алгебр Ли.

В этой работе доказано, что рост многообразия йордановых алгебр, определяемого тождеством

$$(xy)(zt) \equiv 0, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00080).

является почти полиномиальным. Построена порождающая это многообразие алгебра, а также дано полное описание структуры его полилинейной части как модуля симметрической группы. Отметим, что это многообразие ранее изучалось в работах [6], [7].

2. Предварительные сведения. На протяжении всей работы будем предполагать, что основное поле F имеет нулевую характеристику. Все понятия, определения которых мы здесь не приводим, можно найти в книгах [8]–[10].

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр над полем F . Обозначим через $F\{X, \mathbf{V}\}$ относительно свободную алгебру этого многообразия со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, а через $P_n(\mathbf{V})$ – подпространство в ней, образованное всеми полилинейными элементами степени n от образующих $x_1, x_2, \dots, x_n$. Одной из числовых характеристик многообразия является последовательность $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, которую, следуя традиции, будем называть *последовательностью коразмерностей*.

Скажем, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *полиномиальный* рост, если существуют неотрицательные числа C, m такие, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^m$. В случае, когда это условие выполняется для любого собственного подмногообразия, но не выполняется для самого многообразия, будем говорить, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *почти полиномиальный* рост.

Пусть

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \quad \text{где } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k, \quad n = \sum_{i=1}^k \lambda_i,$$

является разбиением числа n ; обозначим через χ_λ характер неприводимого представления S_n , соответствующего разбиению $\lambda \vdash n$, а через d_λ – его размерность, которую можно вычислить по формуле крюков (см., например, [9; с. 113]). По разбиению λ можно построить диаграмму Юнга, i -я строка которой имеет длину λ_i , а длину j -го столбца этой диаграммы договоримся обозначать через λ'_j .

Пространство $P_n(\mathbf{V})$ является модулем симметрической группы S_n , если задать действие перестановок на индексах образующих. Так как основное поле имеет нулевую характеристику, то по теореме Машке модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым и для его характера имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (2.1)$$

где m_λ – кратности неприводимых модулей.

Отметим, что для коразмерности верно равенство $c_n(\mathbf{V}) = \sum_\lambda m_\lambda d_\lambda$, и что еще одной числовой характеристикой многообразия является кодлина $l_n(\mathbf{V}) = \sum_\lambda m_\lambda$. Договоримся опускать скобки при левонормированной их расстановке, т.е., например, $abcd = ((ab)c)d$.

3. Многообразие $\mathbf{V}_1$. Напомним, что алгебра называется *йордановой*, если в ней выполняются тождества

$$xy \equiv yx, \quad y(xx)x \equiv yx(xx). \quad (3.1)$$

Рассмотрим многообразие йордановых алгебр, удовлетворяющих также тождеству (1.1). Будем обозначать это многообразие через $\mathbf{V}_1$. Соответственно, $F\{X, \mathbf{V}_1\}$ – относительно свободная алгебра данного многообразия. Выпишем очевидное следствие тождеств (3.1) и (1.1)

$$xxux \equiv 0. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что по модулю коммутативности любое слово из $F\{X, \mathbf{V}_1\}$ может быть приведено к левонормированной записи. Учитывая это обстоятельство, будем в дальнейшем считать, что все элементы из алгебры $F\{X, \mathbf{V}_1\}$ являются линейными комбинациями левонормированных мономов.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{V}_1$ – многообразие, определенное тождествами (3.1) и (1.1). Тогда для любого n выполнено следующее неравенство:

$$c_n(\mathbf{V}_1) \leq k \binom{n}{k+1},$$

где $k = [n/2]$ – целая часть числа $n/2$, а $\binom{n}{k+1}$ – биномиальный коэффициент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одна из полиоднородных компонент частичной линейаризации тождества (3.2) имеет вид $2zxux + x^2yz \equiv 0$. Подставим в это тождество вместо образующей z произведение $z_1 z_2 \cdots z_s$. Используя тождество (1.1), мы получим, что в многообразии $\mathbf{V}_1$ выполнены тождества следующего вида:

$$z_1 z_2 \cdots z_s xux \equiv 0, \quad (3.3)$$

где $s \geq 2$.

Применительно к полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_1)$ эти тождества позволяют упорядочить все буквы, стоящие на четных местах, начиная с четвертой позиции, и стоящие на нечетных местах, начиная с третьей позиции.

Полная же линейаризация тождества (3.2) имеет вид

$$x_1 x_2 u x_3 + x_1 x_3 u x_2 + x_2 x_3 u x_1 \equiv 0. \quad (3.4)$$

Теперь применим полученные тождества к оценке размерности полилинейной части. Для этого введем лексикографический порядок на мономах из $P_n(\mathbf{V}_1)$, считая что $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Тогда тождества (3.3) и (3.4) позволяют упорядочить образующие в мономах следующим образом. Образующие, которые стоят на нечетных позициях, начиная с третьей, могут быть упорядочены по возрастанию. Образующие, которые стоят на четных позициях, начиная с четвертой, также можно упорядочить по возрастанию. Кроме того, применяя тождество (3.4), мы можем на первое место переместить наименьшую из образующих среди тех, которые стоят на первой позиции или четных позициях.

То есть векторное пространство $P_n(\mathbf{V}_1)$ является линейной оболочкой следующего множества мономов:

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}, \quad (3.5)$$

в которых $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, $i_3 < i_5 < \cdots < i_{2m+1} < \cdots$, кроме того, $i_1 < i_2$ и $i_1 < i_4 < \cdots < i_{2m} < \cdots$.

Подсчитывая элементарными методами число мономов с полученными ограничениями расположения образующих, мы получаем утверждение леммы.

Следующая лемма дает ограничение на кратности m_λ в зависимости от разбиения $\lambda \vdash n$.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda \vdash n$ – разбиение числа n . Если $\lambda_1 \geq 4$ или $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 3$, то $m_\lambda = 0$ в сумме (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – разбиение, удовлетворяющее условию леммы. Элемент относительно свободной алгебры $F\{X, \mathbf{V}_1\}$, который порождает в модуле $P_n(\mathbf{V}_1)$ соответствующий разбиению λ неприводимый подмодуль M_λ , обозначим через $f_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Известно, что тождество $f_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$ эквивалентно полиоднородному тождеству от k образующих $g_\lambda(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$, в котором образующая x_i входит в g_λ в степени λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Это может быть непосредственно проверено с помощью процесса полной линейаризации, если заметить, что переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ входят в f_λ симметрическими наборами по λ_i букв (см., например, [9; с. 179]).

Теперь заметим, что если образующая x_1 входит в моном в степени не меньшей трех, то возможно два случая. Либо x_1 не встречается в первых двух позициях, тогда переставляя образующие, как мы это делали при доказательстве леммы 1, получаем, что моном тождественно равен нулю в силу (3.3). Либо x_1 встречается хотя бы один раз в первых двух позициях и тогда, пользуясь (3.4), если это необходимо, мы можем привести моном к виду, когда все образующие x_1 расположены в начале слова.

Если $\lambda_1 \geq 4$, то в силу выше сказанного и тождества (3.2) или эквивалентного ему (3.4) элемент g_λ тождественно равен нулю.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, то перемещая образующие x_1 в начало мономов, получаем, что три образующие x_2 будут расположены правее второй позиции и потому в силу (3.3) элемент g_λ снова тождественно равен нулю. Таким образом, нулевым является соответствующий модуль M_λ , поэтому в сумме (2.1) $m_\lambda = 0$. Доказательство леммы завершено.

4. Йорданова алгебра, порождающая многообразие $\mathbf{V}_1$. В этом пункте мы построим йорданову алгебру A_1 , удовлетворяющую тождеству (1.1), и покажем, что она порождает многообразие $\mathbf{V}_1$, т.е. $\mathbf{V}_1 = \text{var}(A_1)$. Положим в качестве порождающих элементов алгебры следующие буквы:

$$t, \quad a_i, \quad b_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Определяющие соотношения зададим таким образом, чтобы произведение было коммутативным. Кроме того, потребуем чтобы выполнялось тождество (1.1), т.е. произведение любых двух слов, не являющихся порождающими, равно нулю. Выпишем явно остальные определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} a_i a_j &= 0, & b_i b_j &= 0, & t^2 &= 0, & a_i b_j &= 0, & t b_i &= 0, \\ t \cdots a_i a_j &= 0, & t \cdots b_i b_j &= 0, \\ t \cdots a_i b_j a_{i+1} &= -t \cdots a_{i+1} b_j a_i, & t \cdots b_i a_j b_{i+1} &= -t \cdots b_{i+1} a_j b_i \end{aligned}$$

для всех i, j .

По определению алгебры A_1 в ней выполнено тождество коммутативности и тождество (1.1). Отдельного внимания требует только вопрос выполнения в алгебре A_1

тождества (3.2) или эквивалентного ему (3.4). Опустим непосредственную проверку выполнимости тождества (3.4) при всевозможных подстановках элементов алгебры A_1 .

ЛЕММА 3. В разложении (2.1) для многообразия $\text{var } A_1$ кратности m_λ удовлетворяют следующему условию:

$$m_\lambda \geq 1, \quad \text{если } \lambda_1 = 2, \quad \text{или } \lambda_1 = 3 \text{ и } \lambda_2 \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = (2^k, 1^{n-2k})$. Рассмотрим полиоднородный элемент относительно свободной алгебры следующего вида:

$$g_\lambda(x_1, \dots, x_{n-k}) = \bar{x}_1 \tilde{x}_1 \bar{x}_2 \tilde{x}_2 \cdots \bar{x}_k \tilde{x}_k \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_{n-k}.$$

Здесь мы использовали обозначение: пометили специальными символами, чертой или волной, кососимметрические наборы переменных, как, например, было предложено в [5]. Несложно доказать, что модуль, порожденный полной линеаризацией элемента g_λ , является неприводимым модулем, соответствующим разбиению λ .

Подставляем в $g_\lambda(x_1, \dots, x_{n-k})$ вместо переменных следующие элементы алгебры A_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= t + a_1, & x_2 &= a_2 + b_2, & \dots, & x_k &= a_k + b_k, \\ x_{k+1} &= b_{k+1}, & x_{k+2} &= a_{k+2}, & x_{k+3} &= b_{k+3}, & \dots \end{aligned}$$

Результат подстановки обозначим через g'_λ .

По определению алгебры A_1 ненулевыми могут быть только те мономы g_λ , у которых на первом или втором месте стоит x_1 . При перестановке элементов, стоящих на четных (нечетных) позициях, в силу соотношений, определяющих умножение алгебры A_1 , появляется знак минус, а так как в g_λ соответствующие наборы переменных кососимметрические, получаем, что коэффициенты при значениях всех мономов будут положительными. Производя подсчет окончательно получаем

$$g'_\lambda = \left(k + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)(k-1)! \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)! \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - k\right)! t a_1 b_2 a_2 \cdots b_k a_k b_{k+1} a_{k+2} \cdots$$

Таким образом, тождество $g_\lambda(x_1, \dots, x_{n-k}) \equiv 0$ не выполняется в алгебре A_1 и соответствующая кратность $m_\lambda \geq 1$.

В случае $\lambda = (3, 2^{k-1}, 1^{n-2k-1})$ проводим аналогичные рассуждения с той лишь разницей, что в качестве элемента из относительно свободной алгебры берем

$$g_\lambda(x_1, \dots, x_{n-k}) = x_1 \bar{x}_1 \tilde{x}_1 \bar{x}_2 \tilde{x}_2 \cdots \bar{x}_k \tilde{x}_k \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_{n-k}$$

и производим в него подстановку

$$\begin{aligned} x_1 &= t + a_1 + b_1, & x_2 &= a_2 + b_2, & \dots, & x_k &= a_k + b_k, \\ x_{k+1} &= a_{k+1}, & x_{k+2} &= b_{k+2}, & x_{k+3} &= a_{k+3}, & \dots \end{aligned}$$

В результате получаем ненулевой элемент алгебры

$$g'_\lambda = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) k! \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)! \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - k\right)! t a_1 b_1 \cdots a_k b_k a_{k+1} b_{k+2} \cdots$$

Из чего также следует, что соответствующие кратности $m_\lambda \geq 1$. Что и завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Многообразие $\mathbf{V}_1$ порождается алгеброй A_1 , т.е. $\mathbf{V}_1 = \text{var}(A_1)$. В сумме (2.1) для многообразия $\mathbf{V}_1$

$$m_\lambda = 0, \quad \text{если } \lambda = (1^n), \quad \text{или } \lambda_1 \geq 4, \quad \text{или } \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

в остальных случаях кратности равны 1. Кроме того, для последовательности коразмерностей и кодлинны многообразия выполняются следующие равенства:

$$c_n(\mathbf{V}_1) = k \binom{n}{k+1}, \quad l_n(\mathbf{V}_1) = n - 1,$$

где $k = [n/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебра A_1 принадлежит многообразию $\mathbf{V}_1$, справедливо включение $\text{var}(A_1) \subseteq \mathbf{V}_1$. Поэтому $c_n(A_1) \leq c_n(\mathbf{V}_1)$. Причем, равенство достигается только при совпадении многообразий.

Оценим снизу коразмерности $c_n(A_1)$. По лемме 3 кратности m_λ больше или равны единицы, если $\lambda = (2^k, 1^{n-2k})$ или $\lambda = (3, 2^{k-1}, 1^{n-2k-1})$. Пользуясь формулой крюков, получаем

$$c_n(A_1) \geq \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n-2k+1}{n-k+1} + \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \frac{k(n-2k)}{n-k+1}.$$

Положим $n = 2r$, тогда сумма примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^r \binom{2r}{k} \frac{2r-2k+1}{2r-k+1} + \sum_{k=1}^{r-1} \binom{2r}{k+1} \frac{k(2r-2k)}{2r-k+1} \\ &= \frac{2r-1}{2r} \binom{2r}{1} + \sum_{k=2}^r k \left(\frac{2r-k}{2r-k+1} - \frac{k-1}{2r-k+2} \right) \binom{2r}{k} \\ &= 2r-1 + \sum_{k=2}^r \binom{2r}{k-1} (2r-k) - \binom{2r}{k-2} (2r-k+1) = r \binom{2r}{r-1}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для $n = 2r + 1$, также получаем, что

$$c_n(A_1) \geq r \binom{2r}{r-1}.$$

Теперь, с учетом леммы 1, немедленно заключаем, что

$$c_n(A_1) = c_n(\mathbf{V}_1) = k \binom{n}{k+1},$$

где $k = [n/2]$. Откуда вытекает совпадение многообразий $\mathbf{V}_1 = \text{var } A_1$ и условия на кратности, а также непосредственными вычислениями формула для кодлинны.

Теорема полностью доказана.

Теперь легко видеть, что рост многообразия не является полиномиальным, так как для биномиального коэффициента выполняется очевидное неравенство $\binom{n}{k+1} \geq 2^n/(n+1)$. Таким образом, получаем, что так называемая экспонента многообразия $\mathbf{V}_1$ равна двум.

5. Подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_1$. В предыдущих пунктах нами была описана структура полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_1)$ многообразия $\mathbf{V}_1$. Было показано, при каких условиях на разбиение кратность равна 1 или 0. Отсюда сразу же следует, что во всяком собственном подмногообразии должно выполняться тождество вида, соответствующего разбиению λ с условием, что $m_\lambda = 1$. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_1$ имеет полиномиальный рост.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbf{U}$ собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_1$. Допустим, что в $\mathbf{U}$ выполнено тождество, соответствующее разбиению $\lambda \vdash m$ с $\lambda_1 = 3$:

$$x_1 \bar{x}_1 \tilde{x}_1 \bar{x}_2 \tilde{x}_2 \cdots \bar{x}_k \tilde{x}_k \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_{m-k-1} \equiv 0.$$

Подставим вместо образующей x_1 сумму $z_1 z_2 + x_1$ и рассмотрим линейную компоненту по z_1 и z_2 . Домножая ее последовательно на элементы $x_{k+1}, \dots, x_{m-k-1}$ и применяя тождества (3.3) и (3.4), получаем такое тождество:

$$z_1 z_2 x_1 x_1 x_2 x_2 \cdots x_{m-k-1} x_{m-k-1} \equiv 0. \quad (5.1)$$

Из этого тождества немедленно следует, что равны нулю кратности всех неприводимых подмодулей в модуле $P_n(\mathbf{U})$, соответствующих диаграммам с условием $\lambda_1 = 3$ и $\lambda'_2 \geq m - k - 1$, а также условием $\lambda_1 = 2$ и $\lambda'_2 > m - k - 1$.

Поэтому в случае ненулевой кратности вне первого столбца диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda \vdash n$, находится не более $m - k - 1$ клеток. Используя формулу крюков и полученные в теореме 1 значения кратностей для многообразия $\mathbf{V}_1$, можно провести вычисления, аналогичные вычислениям в доказательстве теоремы 1, и получить верхнюю оценку размерности полилинейной компоненты $P_n(\mathbf{U})$:

$$c_n(\mathbf{V}) \leq (m - k - 1) \binom{n}{m - k - 2}.$$

Таким образом, последовательность коразмерностей многообразия $\mathbf{U}$ ограничена сверху полиномом от n степени $m - k - 1$.

Если же в $\mathbf{U}$ выполнено тождество, соответствующее разбиению с $\lambda_1 = 2$:

$$\bar{x}_1 \tilde{x}_1 \bar{x}_2 \tilde{x}_2 \cdots \bar{x}_k \tilde{x}_k \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_{m-k} \equiv 0,$$

то домножая левую часть на образующую x_1 и применяя тождества (3.3) и (3.4), мы получим тождество, аналогичное рассмотренному случаю.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Мальцев, "Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями", *Матем. сб.*, **26:1** (1950), 19–33.
- [2] A. Giambruno, M. Zaicev, "Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate", *Adv. Math.*, **142:2** (1999), 221–243.
- [3] И. Б. Воличенко, "Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль", *Сиб. матем. журн.*, **25:3** (1984), 40–54.

- [4] M. V. Zaitcev, S. P. Mishchenko, “An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent”, *J. Math. Sci. (New York)*, **93**:6 (1999), 977–982.
- [5] С. П. Мищенко, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль”, *Матем. заметки*, **40**:6 (1986), 713–721.
- [6] С. Р. Сверчков, “О разрешимых индекса 2 йордановых алгебрах”, *Матем. сб.*, **121**:1 (1983), 40–47.
- [7] V. S. Drensky, T. G. Rashkova, “Varieties of metabelian Jordan algebras”, *Serdica*, **15**:4 (1989), 293–301.
- [8] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [9] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [10] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

С. П. Мищенко

Ульяновский государственный университет

E-mail: mishchenkosp@mail.ru

А. В. Попов

Ульяновский государственный университет

E-mail: klever176@rambler.ru

Поступило

29.06.2009

Исправленный вариант

09.10.2009