Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Болсинов, А. Ю. Коняев, Алгебраические и геометрические свойства квадратичных гамильтонианов, задаваемых секционными операторами, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 689–702

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:43:33

Алгебраические и геометрические свойства квадратичных гамильтонианов, задаваемых секционными операторами

А. В. Болсинов, А. Ю. Коняев

Следуя терминологии, введенной В. В. Трофимовым и А. Т. Фоменко, мы называем самосопряженный оператор $\phi: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ *секционным*, если он удовлетворяет тождеству $\text{ad}_{\phi x}^* a = \text{ad}_\beta^* x$, $x \in \mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in \mathfrak{g}$ – некоторые фиксированные элементы. В случае полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ приведенное выше тождество принимает вид $[\phi x, a] = [\beta, x]$ и естественным образом возникает в теории интегрируемых систем и дифференциальной геометрии (динамика n -мерного твердого тела, метод сдвига аргумента, классификация проективно эквивалентных римановых метрик). Цель настоящей работы – изучение общих свойств секционных операторов, в частности, интегрируемости и бигамильтоновости соответствующего уравнения Эйлера $\dot{x} = \text{ad}_{\phi x}^* x$.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Термин “секционный оператор” был предложен Трофимовым и Фоменко [1] для явного описания специального класса операторов, задающих динамические системы с большим запасом первых интегралов. Операторы такого типа впервые появились в работе Манакова [2], где было показано, что отображение $\phi: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$, заданное формулой $(\phi X)_{ij} = (b_i - b_j)/(a_i - a_j)X_{ij}$, т.е. удовлетворяющее тождеству

$$[\phi X, A] = [X, B], \quad X = (X_{ij}) \in \mathfrak{so}(n), \quad (1.1)$$

где A и B – диагональные матрицы, обладает замечательным свойством: уравнения Эйлера $\dot{X} = [\phi X, X]$, обобщающие классические уравнения динамики твердого тела на n -мерный случай, допускают представление Лакса со спектральным параметром и потому интегрируются в θ -функциях.

Мищенко и Фоменко [3]–[7] предложили общую конструкцию, названную методом сдвига аргумента, позволяющую построить вполне интегрируемые системы, аналогичные случаю Манакова, на произвольной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Квадратичные гамильтонианы таких систем $H(x) = \langle \phi x, x \rangle / 2$ задавались несколькими сериями самосопряженных операторов $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, основным алгебраическим свойством которых было по-прежнему тождество вида

$$[\phi x, a] = [x, b], \quad a, b \in \mathfrak{h}, \quad (1.2)$$

где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, и $a \in \mathfrak{h}$ – регулярный элемент. В [5] была получена удобная явная формула для ϕ в терминах естественного ортогонального разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств:

$$\phi(x) = \phi_{a,b,D}x = \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b x_1 + Dx_2, \quad (1.3)$$

где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{h}^\perp$, $x_2 \in \mathfrak{h}^\parallel$, $\text{ad}_a^{-1}: \mathfrak{h}^\perp \rightarrow \mathfrak{h}^\perp$ и $D: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ – произвольный самосопряженный оператор.

В последующих работах Фоменко и Трофимов (см. [1], [8], [9]) построили аналоги операторов $\phi_{a,b,D}$ на произвольном симметрическом пространстве, которые оказались тесно связаны с тензором кривизны этих пространств.

В свою очередь в полупростом случае Винбергу удалось “поднять” квадратичные гамильтонианы, задаваемые секционными операторами, в универсальную обертывающую алгебру [10], получив квантовый аналог коммутирующих гамильтонианов $H(x)$, а Мещеряковым [11] было показано, что тождество (1.2) является характеристическим свойством операторов $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, для которых соответствующие уравнения Эйлера $\dot{x} = [\phi x, x]$ являются гамильтоновыми относительно пучка скобок $\mu\{\cdot, \cdot\} + \lambda\{\cdot, \cdot\}_a$ (см. ниже).

Наконец, совсем недавно выяснилось, что тождество (1.1) неожиданным образом возникает совсем в других областях геометрии. В работе [12] было показано, что этому тождеству удовлетворяют тензоры кривизны на римановых многообразиях, допускающих нетривиальные проективно эквивалентные метрики, причем именно оно приводит к некоторым замечательным геометрическим свойствам таких многообразий¹.

Цель настоящей работы – изучение общих свойств секционных операторов, определяемых тождеством типа (1.2), в случае произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и произвольных параметров a, b : обсуждается вопрос существования и явного описания секционных операторов, а также вопрос интегрируемости и бигамильтоновости соответствующего уравнения Эйлера. Подчеркнем, что естественная переформулировка (1.2) связана не с присоединенным, а с коприсоединенным представлением алгебры, в силу того, что уравнение Эйлера записывается на коалгебре и переносится на алгебру только в случае наличия невырожденной инвариантной формы. Такая постановка является вполне естественной, и обобщение на неполупростой случай уже было проведено в [9], [13] при некоторых дополнительных ограничениях на параметры a, b . Здесь никаких априорных ограничений на них не накладывается. В значительной степени такая постановка связана с тем, что в упомянутых выше задачах римановой геометрии наибольший интерес представляют как раз сингулярные значения параметров.

Все рассуждения проводятся над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, но большинство доказательств применимо к произвольному полю нулевой характеристики.

2. Определение, теорема существования и явная формула для секционных операторов. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная конечномерная алгебра Ли и $\mathfrak{g}^*$ – ее двойственное пространство. Их элементы мы будем обозначать малыми греческими

¹Термин “секционный”, разумеется, не был никак связан с тензором кривизны, однако, интересно отметить, что в описанной ситуации секционный оператор ϕ , ассоциированный с тензором кривизны, описывает в точности секционную кривизну многообразия.

и латинскими буквами соответственно, а спаривание между элементами алгебры и коалгебры – скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Билинейные формы на $\mathfrak{g}$ (соответственно на $\mathfrak{g}^*$) нам будет удобно рассматривать как операторы из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$ (соответственно из $\mathfrak{g}^*$ в $\mathfrak{g}$). При этом, допуская вольность речи, мы будем говорить о самосопряженности таких операторов, имея в виду их самосопряженность относительно спаривания, т.е. симметричность соответствующей билинейной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Секционным оператором* называется самосопряженный оператор $\phi: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, который для некоторых фиксированных $\beta \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathfrak{g}^*$ удовлетворяет тождеству

$$\mathrm{ad}_{\phi x}^* a = \mathrm{ad}_\beta^* x, \quad x \in \mathfrak{g}^*. \quad (2.1)$$

В этом случае мы будем говорить о *секционном операторе с параметрами* a, β .

Легко видеть, что тождество (2.1) может быть переписано одним из следующих эквивалентных способов:

$$\langle a, [\phi x, \nu] \rangle = \langle x, [\beta, \nu] \rangle \quad \text{для любых } \nu \in \mathfrak{g}, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad (2.2)$$

или

$$\phi(\mathrm{ad}_\nu^* a) = -[\beta, \nu] \quad \text{для любых } \nu \in \mathfrak{g}. \quad (2.3)$$

Ясно, что в полупростом случае при отождествлении $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью формы Киллинга тождество (2.1) переходит в точности в (1.2) (если поменять обозначение β на $-b$) при условии $\mathrm{ad}_x y = [y, x]$.

Так как в данном определении никаких априорных ограничений на a и β мы не накладываем, то возникает естественный вопрос о существовании операторов с данными параметрами. Обозначим через $\mathrm{Ann} a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_\xi^* a = 0\}$ стационарную подалгебру точки $a \in \mathfrak{g}^*$ относительно коприсоединенного действия (будем называть ее *аннулятором*). Определим еще две подалгебры:

1) содержащую аннулятор подалгебру вида

$$\mathfrak{b}_a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \mathrm{ad}_\xi^* a, \eta \rangle = 0 \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

(тот факт, что $\mathfrak{b}_a$ действительно является подалгеброй сразу следует из того, что коммутант $\mathfrak{g}'$ – идеал в $\mathfrak{g}$);

2) $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann} a} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathrm{Ann} a] = 0\}$ – централизатор аннулятора $\mathrm{Ann} a$.

Сопоставим теперь элементу $a \in \mathfrak{g}^*$ подалгебру $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{b}_a \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{Ann} a}$, являющуюся пересечением этих двух подалгебр.

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием существования секционного оператора ϕ с заданными параметрами $a \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in \mathfrak{g}$, является включение $\beta \in \mathfrak{g}_a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством (2.3), эквивалентным определению секционного оператора. Этим тождеством оператор ϕ сразу задается на множестве ковекторов вида $y = \mathrm{ad}_\nu^* a$, которое очевидным образом совпадает с касательным пространством к орбите коприсоединенного представления, проходящей через a :

$$T_a \mathcal{O}(a) = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid y = \mathrm{ad}_\nu^* a \text{ для некоторого } \nu \in \mathfrak{g}\}.$$

А именно, для произвольного $y \in T_a \mathcal{O}(a)$ согласно (2.3) мы просто полагаем $\phi(y) = -[\beta, \nu]$, где ν – вектор, удовлетворяющий условию $y = \text{ad}_\nu^* a$. Поскольку вектор ν определен по модулю $\text{Ann } a$, корректность такого определения в точности эквивалентно условию $[\beta, \text{Ann } a] = 0$, т.е. $\beta \in \mathfrak{g}^{\text{Ann } a}$.

Итак, у нас имеется подпространство $T_a \mathcal{O}(a) \subset \mathfrak{g}^*$, на котором оператор уже задан. Вопрос заключается в том, можно ли этот оператор распространить на все пространство так, чтобы полученный оператор оказался самосопряженным.

Ясно, что это можно сделать тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $y, z \in T_a \mathcal{O}(a)$ имеем

$$\langle \phi(y), z \rangle = \langle y, \phi(z) \rangle. \quad (2.4)$$

На языке матриц данная ситуация описывается следующим образом. Нам дана матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & * \\ A_2 & * \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где A_1 обозначает диагональный блок, а звездочки – неопределенные компоненты. Спрашивается, можно ли вместо звездочек поставить числа так, чтобы матрица стала симметричной? Ответ очевиден: это можно сделать тогда и только тогда, когда диагональный блок A_1 симметричен, что в точности эквивалентно (2.4).

Полагая $y = \text{ad}_\eta^* a$, $z = \text{ad}_\zeta^* a$, мы можем переписать (2.4) в виде

$$\langle \phi(\text{ad}_\eta^* a), \text{ad}_\zeta^* a \rangle = \langle \text{ad}_\eta^* a, \phi(\text{ad}_\zeta^* a) \rangle$$

или, снова используя (2.3),

$$\langle [\eta, \beta], \text{ad}_\zeta^* a \rangle = \langle \text{ad}_\eta^* a, [\zeta, \beta] \rangle,$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [\eta, \beta], \text{ad}_\zeta^* a \rangle - \langle \text{ad}_\eta^* a, [\zeta, \beta] \rangle \\ &= \langle a, [[\eta, \beta], \zeta] - [[\zeta, \beta], \eta] \rangle = \langle a, [[\zeta, \eta], \beta] \rangle = \langle \text{ad}_\beta^* a, [\zeta, \eta] \rangle, \end{aligned}$$

которое в точности означает включение $\beta \in \mathfrak{b}_a$.

Итак, необходимым и достаточным для существования секционного оператора является одновременное выполнение двух условий $\beta \in \mathfrak{g}^{\text{Ann } a}$ и $\beta \in \mathfrak{b}_a$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы дает довольно естественную явную формулу для секционного оператора ϕ . Чтобы сделать ее смысл прозрачным, снова воспользуемся матричной интерпретацией. Симметричная матрица, полученная из (2.5) восстановлением недостающих компонент, выглядит так:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2^\top \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_2^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где A_3 – произвольная симметричная матрица.

Проделаем то же самое в нашем конкретном случае. Выберем произвольное подпространство $N \subset \mathfrak{g}^*$, дополнительное к $T_a \mathcal{O}(a)$ (с геометрической точки зрения N представляет собой трансверсальное пространство к орбите коприсоединенного представления в точке $a \in \mathfrak{g}^*$, и его выбор, разумеется, неоднозначен). Тогда

мы имеем разложение в прямую сумму $\mathfrak{g}^* = T_a\mathcal{O}(a) \oplus N$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ автоматически возникает двойственное разложение $\mathfrak{g} = N^\perp \oplus \text{Ann } a$.

Обозначим $\mathcal{A}_a: \mathfrak{g} \rightarrow T_a\mathcal{O}(a)$ линейный оператор, заданный формулой $\mathcal{A}_a(\xi) = \text{ad}_\xi^* a$. Поскольку его ядро совпадает с $\text{Ann}(a)$, корректно определено обратное отображение $\mathcal{A}_a^{-1}: T_a\mathcal{O}(a) \rightarrow N^\perp$.

В этих обозначениях та часть секционного оператора, которая жестко определена тождеством (2.3), записывается в виде $-\text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi$ (в матричных обозначениях выше – это первый, известный нам столбец), где $\pi: \mathfrak{g}^* \rightarrow T_a\mathcal{O}(a)$ – естественная проекция, связанная с фиксированным разложением.

ЛЕММА 1. *Оператор, сопряженный $\kappa - \text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi$, имеет вид $\mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $\beta \in \text{Ann } a$ гарантирует, что $\text{ad}_\beta^* y \in T_a\mathcal{O}_a$ для любого $y \in \mathfrak{g}^*$, поэтому выражение $\mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^*$ имеет смысл. Если мы теперь положим $\mathcal{A}_a^{-1}(\pi x) = \xi$ и $\mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^* y = \eta$, то получим

$$\begin{aligned} \langle -\text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi x, y \rangle &= \langle -\text{ad}_\beta \xi, y \rangle = \langle \xi, \text{ad}_\beta^* y \rangle = \langle \xi, \text{ad}_\eta^* a \rangle \\ &= -\langle \eta, \text{ad}_\xi^* a \rangle = \langle \pi x, \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^* y \rangle = \langle x, \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^* y \rangle, \end{aligned}$$

т.е. $(-\text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi)^* = \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^*$.

Вторая матрица в правой части (2.6) тем самым означает оператор $\mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^*$, который применяется лишь к элементам из N , а на $T_a\mathcal{O}(a)$ обращается в нуль. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}^*$ – разложение произвольного элемента x такое, что $x_1 \in T_a\mathcal{O}(a)$, $x_2 \in N$. Тогда*

$$\phi(x) = -\text{ad}_b \mathcal{A}_a^{-1}x_1 + \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^* x_2 + Dx,$$

где D – произвольный самосопряженный оператор, образ которого содержится в $\text{Ann}(a)$.

Отметим, что ядро D автоматически совпадает с $T_a\mathcal{O}(a)$, так что $Dx = Dx_2$. В частности, D можно записать как $D = \tilde{D} \circ \text{pr}$, где $\tilde{D}: (\text{Ann } a)^* \rightarrow \text{Ann } a$ – произвольный самосопряженный оператор, а $\text{pr}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \text{Ann } a$ – естественная проекция. Другими словами, секционный оператор ϕ с заданными параметрами a и β определен с точностью до произвольного самосопряженного оператора $\tilde{D}: (\text{Ann } a)^* \rightarrow \text{Ann } a$. Этот факт, впрочем, сразу следует из определения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если ввести обозначения $B = -\text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}: T_a\mathcal{O}(a) \rightarrow \mathfrak{g}$ и $C = \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow N^\perp$ и учесть, что $(B\pi)^* = C$, то формулу для ϕ можно переписать еще и так:

- (a) $\phi = B\pi + C(\text{id} - \pi) + D$;
- (b) $\phi = C + (\text{id} - \pi^*)B\pi + D$;
- (c) $\phi = B\pi + (B\pi)^* - \pi^*B\pi + D$;
- (d) $\phi = C + C^* - \pi^*C + D$.

С формулой Мищенко–Фоменко (1.3) наиболее близка формула (b): члены C и D совпадают по виду с двумя членами из формулы Мищенко–Фоменко, но возникает дополнительный член, который необходим для того, чтобы оператор стал самосопряженным.

Следующие несколько примеров помогут прояснить устройство алгебр $\mathfrak{g}_a$ и $\mathfrak{b}_a$.

ПРИМЕР 1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает невырожденной инвариантной билинейной формой (например, если $\mathfrak{g}$ полупроста, то это просто форма Киллинга). С помощью данной формы мы можем отождествить алгебру и коалгебру. Тогда $\text{Ann } a$ совпадает с централизатором элемента $a \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$. Отсюда сразу следует, что $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a} = \mathfrak{z}(\text{Ann } a)$, т.е. центр централизатора. Учитывая, что $\mathfrak{b}_a$ содержит $\text{Ann } a$, получаем, что в данном случае $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{z}(\text{Ann } a)$.

ПРИМЕР 2. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что ее коммутант совпадает со всей алгеброй. К таким, например, относятся полупрямые суммы $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} +_{\rho} V$, где $\rho: \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – линейное представление полупростой алгебры Ли $\mathfrak{k}$ (не содержащее тривиальных компонент). Из того, что коммутант совпадает со всей алгеброй, сразу вытекает, что $\mathfrak{b}_a = \text{Ann } a$ и, следовательно, $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{z}(\text{Ann } a)$, т.е. как и в предыдущем примере, совпадает с центром аннулятора.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли $A_{4,7}$ (обозначение взято из [14], см. также [15]), задаваемая в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3.$$

Остальные коммутаторы считаются равными нулю.

Рассмотрим элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, задаваемый в двойственном базисе $\{e^i\}$ координатами $a = (0, 0, 1, 0)$, т.е. $a = e^3$. Легко видеть, что коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ натянут на e_1, e_2, e_3 и является максимальным изотропным подпространством относительно 2-формы $\mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k)$, т.е. $\mathfrak{b}_a = \mathfrak{g}'$. В свою очередь $\text{Ann } a$ – это коммутативная подалгебра, натянутая на e_1, e_2 и являющаяся максимальной. Поэтому $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a} = \text{Ann } a = \mathfrak{g}_a$.

ПРИМЕР 4. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли $A_{4,9}$ (обозначение из [13], [14]), задаваемая в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2.$$

Остальные коммутаторы считаем равными нулю.

Положим $a = (1, 0, 0, 0)$ в двойственном базисе, т.е. $a = e^1$. Коммутант в данном случае натянут на e_1, e_2 и снова является максимальным изотропным подпространством для формы $\mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k)$. Поэтому $\mathfrak{b}_a = \mathfrak{g}'$. Поскольку $\text{Ann } a$ состоит в данном случае только из нуля, то $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_a$ совпадает с $\mathfrak{b}_a$.

В полупростом случае секционные операторы задавали левоинвариантные метрики на группе Ли (см. [3], [5]). В общем случае они определяют квадратичные по импульсам левоинвариантные гамильтонианы на кокасательном расслоении к группе. В связи с такой интерпретацией интересно понять, существуют ли невырожденные и положительно определенные (в вещественном случае) секционные операторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a} \not\subseteq \text{Ann } a$, то секционный оператор ϕ вырожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим централизатор $\mathfrak{g}^{\beta}$ элемента $\beta \in \mathfrak{g}$. Покажем, что имеет место строгое включение $\text{Ann } a \subset \mathfrak{g}^{\beta}$. Во-первых, сам $\text{Ann } a$ содержится в $\mathfrak{g}^{\beta}$, поскольку, как мы знаем, $[\beta, \text{Ann } a] = 0$. Далее возможны два случая:

- 1) $\beta \notin \text{Ann } a$; тогда помимо $\text{Ann } a$ подалгебра $\mathfrak{g}^\beta$ содержит сам элемент β и поэтому $\mathfrak{g}^\beta$ строго больше, чем $\text{Ann } a$;
- 2) $\beta \in \text{Ann } a$, но тогда $\mathfrak{g}^\beta$ содержит весь централизатор $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a}$, который в $\text{Ann } a$ по нашему предположению не содержится, т.е. и в этом случае $\mathfrak{g}^\beta$ содержит $\text{Ann } a$ как собственное подпространство.

Отсюда следует, что $\dim \ker \text{ad}_\beta^* = \dim \mathfrak{g}^\beta > \dim \text{Ann } a$. С другой стороны, из соотношения (2.1) сразу следует, что секционный оператор ϕ переводит $\ker \text{ad}_\beta^*$ в $\text{Ann } a$. Оценка на размерности показывает, что ядро ϕ нетривиально.

Предположим теперь, что рассматривается вещественный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\text{Ann } a + [\mathfrak{g}, \text{Ann } a] \neq \mathfrak{g}$. Тогда секционный оператор ϕ не может быть положительно определенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\beta \in \text{Ann } a$. В противном случае оператор ϕ вырожден в силу предложения 1 и утверждение выполнено автоматически.

Условие $\text{Ann } a + [\mathfrak{g}, \text{Ann } a] \neq \mathfrak{g}$ означает, что найдется ненулевой элемент $y \in \mathfrak{g}^*$, который одновременно принадлежит $(\text{Ann } a)^\perp = T_a \mathcal{O}(a)$ и $[\mathfrak{g}, \text{Ann } a]^\perp$. Первое условие означает, что y может быть представлен в виде $\text{ad}_\nu^* a$ для некоторого $\nu \in \mathfrak{g}$. Тогда $\phi y = -[\beta, \nu]$ и мы имеем

$$\langle \phi y, y \rangle = \langle -[\beta, \nu], y \rangle = 0,$$

поскольку $[\beta, \nu] \in [\text{Ann } a, \mathfrak{g}]$, а $y \in [\text{Ann } a, \mathfrak{g}]^\perp$. Итак, y – нетривиальный изотропный вектор и, следовательно, ϕ не является положительно определенным.

В заключение этого раздела сделаем еще одно важное замечание. В практических задачах возникает естественный вопрос: является ли конкретный оператор ϕ секционным? Например, именно такой вопрос возникает, если мы хотим выяснить, существует ли для заданной римановой метрики g отличная от нее метрика g' с теми же самыми геодезическими. Необходимое условие состоит в том, что тензор кривизны метрики g является секционным оператором в смысле исходного тождества (1.1) для алгебры $\mathfrak{so}(n)$ (см. [12]). Важным также бывает знать, сколько различных секционных представлений имеет данный оператор ϕ , т.е. сколько существует пар a, β , удовлетворяющих тождеству (2.3)? Эти вопросы сводятся к довольно стандартной задаче из линейной алгебры.

Пусть задан некоторый оператор $\phi: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, про который нужно выяснить, секционный он или нет. Подчеркнем, что нас интересует лишь случай $a \neq 0$. Что касается β , то ясно, что он всегда определен по модулю центра алгебры и мы не будем им далее интересоваться. Естественно выделить два случая. Мы скажем, что оператор ϕ имеет *тривиальное секционное представление с параметрами* $a \neq 0$ и β , если он удовлетворяет тождеству (2.3), т.е. $\phi \mathcal{A}_a = -\text{ad}_\beta$, обе части которого тривиальны, т.е. $\phi \mathcal{A}_a = 0$ и $-\text{ad}_\beta = 0$. В обозначениях теоремы 2 это означает, что оператор ϕ состоит лишь из тривиальной части D . Такую возможность следует иметь в виду, но она вряд ли представляет интерес.

Понять, может ли заданный оператор иметь тривиальное секционное представление, довольно просто. Нужно рассмотреть отображение $a \mapsto \phi \mathcal{A}_a$ как линейный

оператор $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. Оператор ϕ допускает тривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда ядро этого отображения нетривиально, причем размерность ядра указывает на число независимых тривиализующих параметров $a \in \mathfrak{g}^*$.

Геометрически нетривиальность ядра означает, что образ ϕ как подпространство в $\mathfrak{g}$ содержится в аннуляторе какого-то элемента $a \neq 0$ (здесь удобнее использовать тождество (2.1)). Это заведомо так вообще для любого ϕ , если коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ строго меньше самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае достаточно взять $a \in (\mathfrak{g}')^\perp$, поскольку такие элементы характеризуются тем, что $\text{Ann } a = \mathfrak{g}$, или, что то же самое, $\mathcal{A}_a = 0$.

Чтобы выяснить вопрос о нетривиальных секционных представлениях, рассмотрим образ отображения $a \mapsto \phi \mathcal{A}_a$ как подпространство $P_1 \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. Аналогичным образом, если β пробегает алгебру Ли $\mathfrak{g}$, то все операторы вида $-\text{ad}_\beta$ в совокупности образуют подпространство $P_2 \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. Заметим, что P_2 — это в точности присоединенная алгебра Ли.

Оба подпространства описываются совершенно явно, и ответ на поставленные выше вопросы может быть сформулирован как

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Оператор ϕ допускает тривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда $\dim P_1 \leq \dim \mathfrak{g}$. Размерность пространства тривиализующих параметров $a \in \mathfrak{g}$ равна $\dim \mathfrak{g} - \dim P_1$.

2) Оператор ϕ допускает нетривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда $P_1 \cap P_2 \neq \{0\}$. Размерность этого пересечения указывает на число независимых нетривиальных секционных представлений для ϕ (по модулю тривиальных).

3. Интегралы и бигамильтоновость систем, задаваемых секционными операторами I: метод сдвига аргумента. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = \langle \phi x, x \rangle / 2$, ассоциированную с секционным оператором $\phi: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, и соответствующую гамильтонову систему на $\mathfrak{g}^*$:

$$\dot{x} = \text{ad}_{\phi x}^* x \quad (3.1)$$

в смысле стандартной скобки Пуассона–Ли $\{, \}$ на $\mathfrak{g}^*$. Напомним, что эта скобка Пуассона задается формулой $\{f, g\}(x) = \langle x, [df, dg] \rangle = \mathcal{A}(df, dg)$, где $\mathcal{A} = (c_{ij}^k x_k)$ — соответствующий тензор Пуассона, который рассматривается как кососимметрическая форма на $\mathfrak{g}$, или как оператор $\mathcal{A}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Отметим прежде всего, что система (3.1) всегда допускает, по крайней мере, один линейный интеграл.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть ϕ — секционный оператор с параметрами a, β . Тогда линейная функция $\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$ является интегралом гамильтоновой системы (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ϕ — секционный, то, используя (2.2), имеем

$$\{\beta(x), f(x)\} = \langle x, [\beta, \phi x] \rangle = \langle a, [\phi x, \phi x] \rangle = 0,$$

и предложение доказано.

Существование других интегралов связано с методом сдвига аргумента (см. [3], [5], [9], [8]) и наличием на $\mathfrak{g}^*$ пучка согласованных скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\} + \lambda\{\cdot, \cdot\}_a$, где вторая скобка $\{\cdot, \cdot\}_a$ задается формой $\mathcal{A}_a$, рассматриваемой как постоянный тензор Пуассона:

$$\{f, g\}_a(x) = \langle a, [df(x), dg(x)] \rangle = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x)).$$

Напомним вкратце эту конструкцию.

Пусть $I(x)$ – инвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что в точке $a \in \mathfrak{g}^*$ эта функция допускает разложение в ряд:

$$I(a + \lambda x) = f_0 + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \lambda^3 f_3 + \dots \quad (3.2)$$

Отметим, что в общем случае инварианты не обязаны быть полиномами и могут быть даже не определены в точке a , но для наших целей подходит любой *локальный* (и даже *формальный*, см. [16]) инвариант, определенный в точке a . Рассмотрим всевозможные гладкие локальные инварианты в окрестности точки a и их разложения (3.2). Подалгебра полиномов $\mathcal{F}_a$, порожденная коэффициентами этих разложений, называется *алгеброй Мищенко–Фоменко* или *алгеброй полиномиальных сдвигов*. Главное свойство $\mathcal{F}_a$ состоит в том, что она коммутативна относительно обеих скобок $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$ (см. [3], [5], [8], [9]). Следующее утверждение является естественным переносом конструкции Мищенко–Фоменко на случай произвольной алгебры Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть для параметров a и β секционного оператора ϕ выполнено $\text{ad}_\beta^* a = 0$, т.е. $\beta \in \text{Ann}(a)$. Тогда уравнение (3.1) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}(x + \lambda a) = \text{ad}_{\phi x - \lambda \beta}^*(x + \lambda a),$$

т.е. является гамильтоновым относительно скобки вида $\{\cdot, \cdot\} + \lambda\{\cdot, \cdot\}_a$ с гамильтонианом $f_\lambda(x) = \langle \phi x, x \rangle / 2 - \lambda \beta(x)$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Алгебра Мищенко–Фоменко $\mathcal{F}_a$ состоит из первых интегралов этих уравнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение (аналог представления Лакса) сразу следует из определения секционного оператора и предположения $\beta \in \text{Ann}(a)$. Второе – из того факта, что $I(a + \lambda x)$ – функция Казимира скобки $\{\cdot, \cdot\}_a + \lambda\{\cdot, \cdot\}$ ($\lambda \neq 0$), относительно которой система (3.1) гамильтонова. Эта функция поэтому является первым интегралом при любом $\lambda \neq 0$ и, следовательно, то же самое верно для всех коэффициентов разложения (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $\beta \in \text{Ann } a$ довольно естественно и заведомо выполняется в следующих случаях:

- 1) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает невырожденную инвариантную билинейную форму (см. пример 1);
- 2) коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{g}$ (см. пример 2);
- 3) $\text{Ann } a$ содержит свой централизатор $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a}$ (например, если $\text{Ann } a$ является максимальной коммутативной подалгеброй).

Отметим, что условие $\beta \in \text{Ann } a$ гарантирует гамильтоновость (3.1) относительно любой линейной комбинации вида $\{\cdot, \cdot\} + \lambda\{\cdot, \cdot\}_a$, однако ничего не говорит относительно гамильтоновости в смысле скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$. В общем случае этого может и не быть, однако существует естественный класс операторов, связанный с методом сдвига аргумента, для которых гамильтоновость относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$ имеется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $f = \langle \phi x, x \rangle / 2$ – однородный квадратичный полином, лежащий в алгебре Миценко–Фоменко $\mathcal{F}_a$. Тогда ϕ – секционный оператор и отвечающие ему уравнения (3.1) гамильтоновы относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения алгебры Миценко–Фоменко легко следует, что любой однородный квадратичный многочлен $f = \langle \phi x, x \rangle / 2 \in \mathcal{F}_a$ может быть представлен как второй коэффициент f_2 разложения (3.2) для некоторого инварианта $I(x)$. Поскольку $I(a + \lambda x)$ является функцией Казимира скобки $\{\cdot, \cdot\}_a + \lambda\{\cdot, \cdot\}$, т.е. $(\mathcal{A}_a + \lambda \mathcal{A})dI(a + \lambda x) = 0$, коэффициенты разложения f_i удовлетворяют хорошо известным рекуррентным соотношениям ([3], [9]):

$$\mathcal{A}_a df_1 = 0, \quad \mathcal{A}_a df_2 = -\mathcal{A} df_1, \quad \mathcal{A}_a df_3 = -\mathcal{A} df_2, \quad \dots$$

Отметим, что $df_1 = dI(a)$ представляет собой некоторый элемент $\beta \in \mathfrak{g}$, который в силу первого соотношения лежит в аннуляторе $\text{Ann } a$. Второе соотношение эквивалентно тому, что дифференциал $df_2(x) = \phi x$ представляет собой секционный оператор с параметрами a и $-\beta$. Наконец, третье соотношение в точности означает, что уравнения (3.1) для $f_2 = f = \langle \phi x, x \rangle / 2$ гамильтоновы относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$.

Отметим, что из этого рассуждения и теоремы 1 сразу вытекает, что дифференциал инварианта коприсоединенного представления в произвольной (необязательно регулярной) точке $a \in \mathfrak{g}^*$ всегда лежит в центре аннулятора $\text{Ann } a$. Это утверждение является обобщением теоремы Костанта [17] на случай произвольной алгебры Ли.

Итак, гамильтоновость уравнений (3.1) относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$ гарантируется включением

$$f = \frac{1}{2} \langle \phi x, x \rangle \in \mathcal{F}_a.$$

Оно автоматически имеет место, если a регулярен и $\beta \in \text{Ann } a$, что легко следует из того факта, что $\text{Ann } a$ порождается дифференциалами инвариантов в точке a , если a регулярен. Тем самым мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ – регулярный элемент и $\beta \in \text{Ann } a$. Тогда система (3.1) гамильтонова относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$.

ПРИМЕР 5. Отказ от регулярности a приводит к тому, что предложение 7 становится неверным. Рассмотрим четырехмерную фробениусову алгебру из примера 3 и элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, задаваемый в двойственном базисе координатами $a = (0, 0, 1, 0)$. Тензоры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 & -x_1 & -x_2 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_2 - x_3 \\ -2x_1 & x_2 & x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Мы показали, что $\mathfrak{g}_a = \text{span}\{e_1, e_2\}$.

Положим $\beta = e_1$. Легко видеть, что оператор ϕ , задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

является секционным, т.е. $\mathcal{A}\beta = -2x_1e^4 = \mathcal{A}_a\phi x$. С другой стороны,

$$\text{ad}_{\phi x}^* x = \mathcal{A}\phi x = (0, -2x_1^2, 0, -2x_1x_3 + 2x_1x_2).$$

Так как вторая координата не равна нулю, поле не касается симплектических слов $\mathcal{A}_a$, а значит не является гамильтоновым относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$.

Естественно задать обратный вопрос. Пусть имеется квадратичный гамильтониан $g(x) = \langle \psi x, x \rangle / 2$ такой, что соответствующие уравнения Эйлера

$$\dot{x} = \text{ad}_{\psi x}^* x \quad (3.3)$$

гамильтоновы не только относительно стандартной скобки Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$, но и относительно постоянной скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$. Является ли оператор ψ секционным?

Мещеряковым было показано, что в случае полупростой алгебры Ли ответ положительный. На самом деле его рассуждение дословно переносится на случай произвольной алгебры Ли, а именно имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого самосопряженного оператора ψ уравнения $\dot{x} = \text{ad}_{\psi x}^* x$ гамильтоновы относительно $\{\cdot, \cdot\}_a$, т.е. существует функция H такая, что $\text{ad}_{\psi x}^* x = \text{ad}_{dH}^* a$. Тогда отображение $\psi\mathcal{A}_a: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, если все дифференцирования алгебры Ли внутренние, то ψ – секционный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из согласованности $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{A}$ вытекает, что для $g(x) = \langle \psi x, x \rangle / 2$ и координатных функций $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ выполнено тождество

$$\{g, \{\xi, \eta\}\}_a + \{\eta, \{g, \xi\}\}_a + \{\xi, \{\eta, g\}\}_a + \{g, \{\xi, \eta\}_a\} + \{\eta, \{g, \xi\}_a\} + \{\xi, \{\eta, g\}_a\} = 0.$$

Нам известно, что $\mathcal{A}dg = \mathcal{A}_a dH$, т.е. $\{g, \cdot\} = \{H, \cdot\}_a$. Делая соответствующую замену во втором, третьем и четвертом слагаемых, получаем, что их сумма равна нулю в силу тождества Якоби для H, ξ, η в смысле скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$. Заметим теперь, что первое слагаемое можно переписать в виде

$$\langle a, [\psi x, [\xi, \eta]] \rangle = -\langle \psi \text{ad}_{[\xi, \eta]}^* a, x \rangle = \langle \psi \mathcal{A}_a[\xi, \eta], x \rangle.$$

Аналогично переписывая пятое и шестое слагаемые и учитывая произвольность x , получаем

$$\psi \mathcal{A}_a[\xi, \eta] = [\psi \mathcal{A}_a \xi, \eta] + [\xi, \psi \mathcal{A}_a \eta].$$

Таким образом, $\psi\mathcal{A}_a: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ является дифференцированием. Если все дифференцирования внутренние, то $\psi\mathcal{A}_a = -\text{ad}_\beta$ для некоторого $\beta \in \mathfrak{g}$, что совпадает с определением секционного оператора (2.3). Теорема доказана.

4. Интегралы и бигамильтоновость систем, задаваемых секционными операторами II: случай фробениусовой алгебры Ли. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *фробениусовой* (см. [18]), если ее индекс равен нулю. Эквивалентным образом можно сказать, что аннулятор $\text{Ann } a$ элемента $a \in \mathfrak{g}^*$ общего положения тривиален или, что то же самое, форма $\mathcal{A}_a$ невырождена и задает (постоянную) симплектическую структуру на $\mathfrak{g}^*$.

Метод сдвига аргумента в этом случае не работает, поскольку алгебра Миценко–Фоменко тривиальна из-за отсутствия инвариантов. Однако и здесь бигамильтонова конструкция может быть успешно применена, приводя к большому числу коммутирующих интегралов.

В этом разделе мы будем считать $a \in \mathfrak{g}^*$ элементом общего положения, а алгебру Ли $\mathfrak{g}$ фробениусовой. Посмотрим, как в этом случае устроены секционные операторы.

ЛЕММА 2. *При сделанных предположениях подалгебра $\mathfrak{g}_a$ нетривиальна, и ее размерность равна коразмерности коммутанта $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Ann } a = \{0\}$, то $\mathfrak{g}^{\text{Ann } a} = \mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{g}_a$ совпадает с подалгеброй $\mathfrak{b}_a$, которая по определению является “косоортогональным дополнением” к коммутанту $\mathfrak{g}'$ относительно формы $\mathcal{A}_a$. Поскольку эта форма невырождена, то $\dim \mathfrak{g}_a = \text{codim } \mathfrak{g}'$. Остается воспользоваться тем фактом (см. [18]), что в случае фробениусовой алгебры Ли $\text{codim } \mathfrak{g}' \geq 1$.

Таким образом, мы можем построить нетривиальные секционные операторы ϕ . В данном случае они будут определены очень простой явной формулой: $\phi x = \mathcal{A}_a^{-1} \text{ad}_\beta^* x$ или, что то же самое, $\phi x = -\text{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}(x)$.

Напомним хорошо известную общую бигамильтонову конструкцию, взяв в качестве примера двойственное пространство фробениусовой алгебры Ли. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ согласованные скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$, отвечающие пуассоновым тензорам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$. В силу невырожденности $\mathcal{A}_a$ мы можем корректно определить оператор рекурсии $R = \mathcal{A}\mathcal{A}_a^{-1}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Отметим, что в рассматриваемом случае R зависит линейно от $x \in \mathfrak{g}^*$ и является невырожденным почти всюду.

Пусть имеется векторное поле v_0 , являющееся гамильтоновым относительно обеих скобок Пуассона, т.е.

$$v_0 = \mathcal{A}df_0 = \mathcal{A}_a df_1.$$

Тогда все векторные поля вида $v_k = R^k v_0$ тоже бигамильтоновы, т.е.

$$v_k = \mathcal{A}df_k = \mathcal{A}_a df_{k-1},$$

причем все функции f_k коммутируют между собой в смысле обеих пуассоновых структур. Отметим, что $df_k = (R^*)^k df_0$, где $R^* = \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ – оператор, сопряженный к R .

Более того, все эти функции f_i коммутируют с функциями вида $g_m(x) = \text{tr } R^m(x)$ (которые в свою очередь тоже попарно коммутируют относительно обеих скобок).

Заметим теперь, что соотношение (2.1), определяющее секционный оператор ϕ , можно записать в виде

$$\mathcal{A}\beta = \mathcal{A}_a \phi x \quad \text{или} \quad \mathcal{A}df_0 = \mathcal{A}_a df_1,$$

где $f_0(x) = \langle \beta, x \rangle$ – линейная функция, задаваемая элементом $\beta \in \mathfrak{g}_a$, а $f_1(x) = \langle \phi x, x \rangle / 2$ – квадратичная функция, задаваемая секционным оператором. Таким образом, мы находимся в точности в ситуации, описанной выше и, тем самым, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{g}$ – фробениусова алгебра Ли, и ϕ – секционный оператор с параметрами a и $\beta \in \mathfrak{g}_a$, причем $a \in \mathfrak{g}^*$ – элемент общего положения. Тогда система уравнений Эйлера

$$\dot{x} = \text{ad}_{\phi x}^* x$$

является гамильтоновой относительно двух скобок $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$ и имеет коммутирующие интегралы вида $g_k(x) = \text{tr } R^m(x)$ и $f_k(x)$, где $f_k(x)$ – однородный полином степени $k+1$, который однозначно определяется равенством $df_k(x) = R^{*k}\beta$. Сам оператор ϕ определяется равенством $\phi x = R^*\beta$.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ из примера 4. Пара пуассоновых структур на $\mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор рекурсии $R^* = \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}$ задается матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь в качестве β элемент $e_1 + e_2$. Вычисляя $df_1(x) = \phi x = R^*\beta$, получаем $f_1 = \langle \phi x, x \rangle / 2 = x_1^2 / 2 + x_1 x_2$. Соответствующая гамильтонова система имеет два независимых коммутирующих интеграла.

Отметим, что оператор рекурсии имеет лишь одно нетривиальное собственное значение, поэтому функции вида $g_m(x) = \text{tr } R^m(x)$ полного набора коммутирующих функций не дают, их приходится дополнять функциями вида f_k .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Групповые инвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах”, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, **21**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 23–83.
- [2] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, Функци. анализ и его прил., **10:4** (1976), 93–94.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, Докл. АН СССР, **231:3** (1976), 536–538.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, Функци. анализ и его прил., **12:2** (1978), 46–56.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **42:2** (1978), 396–415.

- [6] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 3–94.
- [7] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями”, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, **20**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1981, 5–54.
- [8] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М., 1995.
- [9] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [10] Э. В. Винберг, “О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:1 (1990), 3–25.
- [11] М. В. Мещеряков, “О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела”, *УМН*, **38**:5 (1983), 201–202.
- [12] A. V. Bolsinov, V. Kiosak, V. S. Matveev, “A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics”, *J. London Math. Soc.* (2), **80**:2 (2009), 341–356.
- [13] А. В. Болсинов, “Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92.
- [14] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, “Invariants of real low dimension Lie algebras”, *J. Mathematical Phys.*, **17**:6 (1976), 986–994.
- [15] А. А. Короткевич, “Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 3–40.
- [16] А. В. Болсинов, К. М. Зуев, “Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 3–13.
- [17] B. Kostant, “Lie Group Representations on Polynomial Rings”, *Amer. J. Math.*, **85**:3 (1963), 327–404.
- [18] А. Г. Элашвили, “Фробениусовы алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 94–95.

А. В. Болсинов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bolsinov@mail.ru

Поступило

13.10.2010

А. Ю. Коняев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: maodzund@yandex.ru