Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко, Контактнo-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 643–658

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:53:40

Контактно-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий

А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко

В работе строится контактно-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий. А именно, внутренним образом определено понятие контактно конформно полуплоских (т.е. контактно-автодуальных либо контактно-антиавтодуальных) 5-мерных почти контактных метрических многообразий, а также получен ряд результатов, касающихся контактно конформно полуплоских 5-мерных квази-сасакиевых многообразий. Наиболее существенные результаты, относящиеся к сасакиевым и косимплектическим многообразиям, раскрывают интересные связи между такими характеристиками этих многообразий, как контактная автодуальность и постоянство Φ -голоморфной секционной кривизны, как контактная антиавтодуальность и риччи-плоскость, и др.

Библиография: 19 названий.

Конформно полуплоские, т.е. автодуальные либо антиавтодуальные, многообразия играют достаточно значимую роль в современной науке в силу связи их геометрии с геометрией эйнштейновых многообразий [1] и с твисторной геометрией [2]. Так, например, известная теорема Пенроуза–Атти–Хитчина–Сингера [3] утверждает, что каноническая почти комплексная структура пространства твисторов 4-мерного ориентированного риманова многообразия интегрируема тогда и только тогда, когда это многообразие конформно полуплоско. Чен [4], Бургиньон [5] и Дердзински [6] получили классификацию компактных автодуальных келеровых многообразий, а Ито [7] – классификацию автодуальных многообразий Келера–Эйнштейна. Полные классификации автодуальных обобщенных келеровых многообразий постоянной скалярной кривизны и компактных автодуальных эрмитовых RK -поверхностей, являющихся обобщенными многообразиями Хопфа, содержатся в недавних исследованиях Арсеньевой [8] и Арсеньевой, Кириченко [9] соответственно. В работе Апостолова, Давидова и Мушкарова [10] получена полная классификация компактных автодуальных эрмитовых поверхностей.

Важнейшей особенностью 4-мерного ориентированного риманова многообразия M является специфическое строение структурной группы главного расслоения ориентированных ортонормированных реперов над таким многообразием – группы Ли

$$SO(4, \mathbb{R}) = (SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$$

(с точностью до соответствующего изоморфизма) [11]. Индуцированное действие этой группы на расслоении кососимметричных 2-форм над многообразием M разлагает $C^\infty(M)$ -модуль $\Lambda_2(M)$ дифференциальных 2-форм на этом многообразии в прямую сумму двух 3-мерных подмодулей:

$$\Lambda_2(M) = \Lambda^+(M) \oplus \Lambda^-(M)$$

– подмодулей автодуальных 2-форм и антиавтодуальных 2-форм, соответственно (здесь размерность модулей сечений понимается как размерность слоев соответствующих расслоений). На этой основе с помощью тензора Вейля конформной кривизны, рассматриваемого как симметричный автоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$, как известно, и строится теория конформно полуплоских многообразий [1], называемая *автодуальной геометрией* [8], [9].

В настоящей работе подобная конструкция распространяется на 5-мерные римановы многообразия, снабженные почти контактной структурой (согласованной с метрикой), а следовательно, и 4-мерным гиперраспределением. На этой основе, опять же с помощью тензора Вейля, введен контактный аналог конформно полуплоских многообразий. Эта конструкция оказалась богатой геометрическим содержанием. Мы демонстрируем это на примере квази-сасакиевых многообразий, которые были введены в рассмотрение Блэром [12] и включают в себя два наиболее изученных класса почти контактных метрических структур – класса косимплектических и класса сасакиевых структур, являющихся контактными аналогами келевых структур в эрмитовой геометрии. Именно для этих двух классов в работе получены наиболее исчерпывающие результаты. Установлены критерий контактной автодуальности квази-сасакиевых многообразий и необходимое условие их контактной антиавтодуальности. Результаты, касающиеся сасакиевых и косимплектических многообразий, вскрыли интересные связи между такими характеристиками этих многообразий, как контактная автодуальность и постоянство голоморфной секционной кривизны, как контактная антиавтодуальность и Риччи-плоскость, и др.

1. Понятия контактно-автодуальных и контактно-антиавтодуальных 5-мерных почти контактных метрических многообразий. Рассмотрим модуль $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей и алгебру $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком 5-мерном многообразии M . Напомним [13], что *почти контактной метрической* (короче, *АС-)* *структурой* на M называется четверка $(\Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ тензорных полей на M , где Φ – эндоморфизм $C^\infty(M)$ -модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, ξ и η – векторное и ковекторное поля, называемые *характеристическим вектором* и *контактной формой* соответственно, g – билинейная симметричная положительно определенная форма на $\mathfrak{X}(M)$, называемая *римановой структурой*. При этом

- 1) $\eta(\xi) = 1$;
- 2) $\Phi(\xi) = 0$;
- 3) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$;
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Многообразие, на котором фиксирована AC -структура, называется *почти контактным метрическим* (короче, AC -) *многообразием*. Хорошо известно [14], что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ является кососимметричным; он называется *фундаментальной формой структуры*. При этом, если $d\eta = \Omega$, то AC -структура называется *контактной метрической структурой*. Важно отметить, что необходимыми условиями существования AC -структуры на многообразии является его нечетномерность и ориентируемость.

Пусть $(M, \eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть 5-мерное ориентированное AC -многообразие. В $C^\infty(M)$ -модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на M внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{l} = -\Phi^2$ и $\mathfrak{m} = \text{id} + \Phi^2$ на 4-мерное фундаментальное распределение $\mathfrak{L} = \text{Im } \Phi = \text{Ker } \eta$, называемое *контактным распределением*, и на 1-мерное фундаментальное распределение $\mathfrak{M} = \text{Ker } \Phi$ соответственно, причем $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$.

Задавая сужения $\Phi|_{\mathfrak{L}} = \tilde{\Phi}$ и $g|_{\mathfrak{L}} = \tilde{g}$, легко видеть, что $\tilde{\Phi}^2 = -\text{id}$ и $\langle \tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ для любой пары векторных полей $X, Y \in \mathfrak{L}$. Рассмотрим алгебру Грассмана $\Lambda(\mathfrak{L}) = \bigoplus_{r=0}^4 \Lambda_r(\mathfrak{L})$ дифференциальных форм на 4-мерном фундаментальном распределении $\mathfrak{L}$ и оператор Ходжа $*$: $\Lambda_r(\mathfrak{L}) \rightarrow \Lambda_{4-r}(\mathfrak{L})$, однозначно определяемый для любых форм $\omega, \theta \in \Lambda_r(\mathfrak{L})$ тождеством $\omega \wedge (*\theta) = \langle \omega, \theta \rangle \tau$, где $\tau(X_1, X_2, X_3, X_4) = \tilde{\tau}(\xi, X_1, X_2, X_3, X_4)$, $\tilde{\tau}$ – форма объема на M , $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{L}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – метрика на $\Lambda_r(\mathfrak{L})$, индуцированная метрикой $\tilde{g}$. Так как во введенных условиях $*^2 = (-1)^{r(4-r)}\text{id}$ [8], то оператор $*$: $\Lambda_2(\mathfrak{L}) \rightarrow \Lambda_2(\mathfrak{L})$ является инволюцией, т.е. $*^2 = \text{id}$. В этом случае, $\Lambda_2(\mathfrak{L}) = \Lambda^+(\mathfrak{L}) \oplus \Lambda^-(\mathfrak{L})$, где $\Lambda^+(\mathfrak{L})$, $\Lambda^-(\mathfrak{L})$ – собственные подмодули эндоморфизма $*$, соответствующие собственным значениям 1 и -1 .

Располагая оператором $*$: $\Lambda_2(\mathfrak{L}) \rightarrow \Lambda_2(\mathfrak{L})$, можно стандартным образом [9] определить автодуальные и антиавтодуальные 2-формы на контактном распределении $\mathfrak{L}$. В самом деле, если $*(\omega) = \omega$ для $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$, то 2-форма ω называется *автодуальной формой*; если же $*(\omega) = -\omega$, то 2-форма ω называется *антиавтодуальной формой*.

Если $p \in M$, то в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить согласованный со структурным эндоморфизмом Φ ортонормированный репер $(p, e_0, e_1, e_2, \Phi e_1, \Phi e_2)$, где $e_0 = \xi_p$, $\|e_1\|^2 = 1$, $\|e_2\|^2 = 1$. Такой репер называется *вещественно адаптированным* (короче, RA -) *репером*. С другой стороны, можно рассмотреть $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{L} \otimes \mathbb{C}$ – комплексификацию распределения $\mathfrak{L}$, в которой внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = (\text{id} - \sqrt{-1} \cdot \Phi)/2$ и $\bar{\sigma} = (\text{id} + \sqrt{-1} \cdot \Phi)/2$ на собственные подмодули $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ эндоморфизма Φ , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, где $\sqrt{-1}$ – мнимая единица поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Построим репер $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}})$ в $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$, положив

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \xi_p, & \varepsilon_a &= \sqrt{2}\sigma(e_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a - \sqrt{-1}\Phi(e_a)), \\ \varepsilon_{\hat{a}} &= \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a + \sqrt{-1}\Phi(e_a)), \end{aligned}$$

где $a = 1, 2$, $\hat{a} = a + 2$, $\hat{0} = 0$. Учитывая сказанное, вполне очевидно, что $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_{\hat{a}}$, $\Phi\varepsilon_a = \sqrt{-1}\varepsilon_a$, $\Phi\varepsilon_{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}$, где $X \rightarrow \bar{X}$ – оператор сопряжения в $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Построенный репер называется A -репером. Хорошо известно [14], что совокупность таких реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $\{e\} \times U(2)$. Такая G -структура называется *присоединенной G -структурой*.

Везде далее условимся считать, что индексы a, b, c, d, h, f пробегает значения от 1 до 2, полагая, например, что $\widehat{a} = a + 2$, где $\widehat{\widehat{a}} = a$. Кроме того, пусть индексы i, j, k, l, m, n пробегает значения 0, 1, 2, $\widehat{1}, \widehat{2}$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – значения 1, 2, $\widehat{1}, \widehat{2}$.

ЛЕММА 1 [14]. В A -репере матрицы компонент метрического тензора g и структурного эндоморфизма Φ имеют следующий вид:

$$(g_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c|c} g_{00} & g_{0a} & g_{0\widehat{a}} \\ \hline g_{a0} & g_{ab} & g_{a\widehat{b}} \\ \hline g_{\widehat{a}0} & g_{\widehat{a}b} & g_{\widehat{a}\widehat{b}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_2 \\ \hline & I_2 & 0 \end{array} \right),$$

$$(\Phi_j^i) = \left(\begin{array}{c|c|c} \Phi_0^0 & \Phi_a^0 & \Phi_{\widehat{a}}^0 \\ \hline \Phi_0^a & \Phi_b^a & \Phi_{\widehat{b}}^a \\ \hline \Phi_0^{\widehat{a}} & \Phi_b^{\widehat{a}} & \Phi_{\widehat{b}}^{\widehat{a}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{-1} \cdot I_2 & 0 \\ \hline & 0 & -\sqrt{-1} \cdot I_2 \end{array} \right),$$

где $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично [8] доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2. Во введенных обозначениях на пространстве присоединенной G -структуры имеем:

1) $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & x + z\sqrt{-1} & y\sqrt{-1} & 0 \\ -x - z\sqrt{-1} & 0 & 0 & y\sqrt{-1} \\ -y\sqrt{-1} & 0 & 0 & x - z\sqrt{-1} \\ 0 & -y\sqrt{-1} & -x + z\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

2) $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y\sqrt{-1} & x + z\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -x + z\sqrt{-1} & -y\sqrt{-1} \\ -y\sqrt{-1} & x - z\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -x - z\sqrt{-1} & y\sqrt{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно [15], что на любом римановом многообразии внутренним образом определен тензор $C = \{C_{jkl}^i\}$ типа $(3, 1)$, называемый тензором конформной кривизны многообразия M или тензором Вейля, который в терминах своих ковариантных компонент вычисляется по формуле (при $\dim M = 5$):

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{3}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\varkappa}{12}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}), \quad (1)$$

где $\{R_{jkl}^i\}$ – компоненты тензора R кривизны римановой связности ∇ метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, называемого тензором Римана–Кристоффеля, $\{r_{ij} = R_{ijk}^k\}$ – компоненты тензора Риччи, $\varkappa = g^{ij}r_{ij}$ – скалярная кривизна многообразия M .

Как известно, классический тензор C Вейля можно рассматривать как эндоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$. Если M – 5-мерное AC -многообразие, то эндоморфизм C внутренним образом определяет эндоморфизм $\mathfrak{C}$ модуля $\Lambda_2(\mathfrak{L})$, задаваемый одной из трех эквивалентных формул:

- 1) $\mathfrak{C} = i^* \circ C \circ \mathfrak{l}^*$;
- 2) $\mathfrak{C}(\omega) = C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}$;
- 3) $\mathfrak{C}(\omega)_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta kl}(\mathfrak{l}^*\omega)^{kl}$,

где i – вложение $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{l}$ – естественный проектор на контактное распределение $\mathfrak{L}$, 2-форма $\mathfrak{l}^*(\omega) \in \Lambda_2(M)$ – антиувлечение 2-формы $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$ при отображении $\mathfrak{l}$, а $C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}$ – сужение 2-формы $C(\mathfrak{l}^*\omega) \in \Lambda_2(M)$ на $\mathfrak{L}$.

Таким образом, на 5-мерных AC -многообразиях можно внутренним образом определить понятия контактной автодуальности и контактной антиавтодуальности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 5-мерное AC -многообразие будем называть *контактно-автодуальным* (короче, *C -автодуальным*) *многообразием*, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. 5-мерное AC -многообразие будем называть *контактно-антиавтодуальным* (короче, *C -антиавтодуальным*) *многообразием*, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 5-мерное AC -многообразие будем называть *контактно конформно полуплоским* (короче, *C -конформно полуплоским*), если оно является контактно-автодуальным или контактно-антиавтодуальным.

ЛЕММА 3. Пусть $(M, \eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – 5-мерное почти контактное метрическое многообразие. Если $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$, то в A -репере:

- 1) $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$((\mathfrak{l}^*\omega)_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x + z\sqrt{-1} & y\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -x - z\sqrt{-1} & 0 & 0 & y\sqrt{-1} \\ 0 & -y\sqrt{-1} & 0 & 0 & x - z\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -y\sqrt{-1} & -x + z\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

- 2) $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$((\mathfrak{l}^*\omega)_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y\sqrt{-1} & x + z\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -x + z\sqrt{-1} & -y\sqrt{-1} \\ 0 & -y\sqrt{-1} & x - z\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -x - z\sqrt{-1} & y\sqrt{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем, что $(\mathfrak{l}^*\omega)(X, Y) = \omega(\mathfrak{l}X, \mathfrak{l}Y)$ для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Легко подсчитать компоненты $(\mathfrak{l}^*\omega)_{ij}$ произвольной 2-формы $\mathfrak{l}^*\omega$ в A -репере. В самом деле, например, получаем

$$(\mathfrak{l}^*\omega)_{00} = \mathfrak{l}^*\omega(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \mathfrak{l}^*\omega(\xi_p, \xi_p) = \omega(\mathfrak{l}\xi_p, \mathfrak{l}\xi_p) = 0.$$

Аналогично, $(\Gamma^*\omega)_{0a} = (\Gamma^*\omega)_{0\bar{a}} = (\Gamma^*\omega)_{a0} = (\Gamma^*\omega)_{\bar{a}0} = 0$. Далее,

$$(\Gamma^*\omega)_{ab} = \Gamma^*\omega(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \omega(\mathbb{I}\varepsilon_a, \mathbb{I}\varepsilon_b) = \omega(\Phi^2\varepsilon_a, \Phi^2\varepsilon_b) = \omega(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \omega_{ab}.$$

Аналогично, $(\Gamma^*\omega)_{\bar{a}\bar{b}} = \omega_{\bar{a}\bar{b}}$, $(\Gamma^*\omega)_{a\bar{b}} = \omega_{a\bar{b}}$, $(\Gamma^*\omega)_{\bar{a}b} = \omega_{\bar{a}b}$. Учитывая лемму 2, получаем утверждение леммы 3.

2. 5-мерные квази-сасакиевы многообразия. Напомним [13], что AC -структура называется *нормальной*, если выполняется тождество $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где $N_\Phi(X, Y) = (\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y])/4$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ . Многообразие, на котором фиксирована нормальная AC -структура, называется *нормальным AC -многообразием*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [12]. AC -структура называется *квази-сасакиевой* (короче, QS -структурой), если она нормальна, а ее фундаментальная форма замкнута. Многообразии, на котором фиксирована QS -структура, называется *квази-сасакиевым* (короче, QS -) *многообразием*.

Хорошо известно [16], что *полная группа структурных уравнений QS -многообразия* имеет вид:

$$1) \quad d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B_b^a \omega \wedge \omega^b;$$

$$2) \quad d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b - B_a^b \omega \wedge \omega_b;$$

$$3) \quad d\omega = 2B_b^a \omega^b \wedge \omega_a; \quad (2)$$

$$4) \quad d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (A_{bc}^{ad} - 2B_b^a B_c^d) \omega^c \wedge \omega_d + B_{bc}^a \omega \wedge \omega^c + B_b^{ac} \omega \wedge \omega_c, \quad (3)$$

где $\omega = \omega^0$, $\omega_i = g_{ij}\omega^j$, $\{\omega^i\}$, $\{\omega_j^i\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇ , соответственно. Отметим, что $B_b^a = \sqrt{-1} \cdot \Phi_{0,b}^a$, где $\{\Phi_{j,k}^i\}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензора Φ в указанной связности. Вполне очевидно, что $\bar{B}_b^a = -B_a^b$. Семейство функций $\{A_{bc}^{ad}\}$ на пространстве присоединенной G -структуры, удовлетворяет соотношениям

$$A_{[bc]}^{ad} = A_{bc}^{[ad]} = 0, \quad \overline{A_{bc}^{ad}} = A_{ad}^{bc},$$

где по индексам, заключенным в квадратные скобки, подразумевается альтернирование. Кроме того, $\{B_{bc}^a; B_b^{ac}\}$ – подходящие функции на пространстве присоединенной G -структуры, удовлетворяющие условиям

$$1) \quad dB_b^a + B_b^h \omega_h^a - B_h^a \omega_b^h = B_{bc}^a \omega^c + B_b^{ac} \omega_c;$$

$$2) \quad B_{[bc]}^a = B_b^{[ac]} = 0;$$

$$3) \quad \overline{B_{bc}^a} = -B_a^{bc}.$$

Учитывая соотношения (2), а также сравнивая (3) со второй группой структурных уравнений римановой связности $d\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} R_{jkm}^i \omega^k \wedge \omega^m$, где $\{R_{jkm}^i\}$ – компоненты тензора R Римана–Кристоффеля, нетрудно вычислить эти компоненты в A -репере QS -многообразия. В самом деле, существенные компоненты тензора Римана–Кристоффеля на пространстве присоединенной G -структуры имеют

вид [16]:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & R_{\widehat{abcd}} = A_{bc}^{ad} - 2B_b^a B_c^d - B_c^a B_b^d; \\
 2) \quad & R_{\widehat{ab}0c} = B_{bc}^a; \\
 3) \quad & R_{\widehat{ab}0\widehat{c}} = B_b^{ac}; \\
 4) \quad & R_{\widehat{a}0b0} = B_c^a B_b^c; \\
 5) \quad & R_{\widehat{abcd}} = 2B_{[c}^a B_{d]}^b.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Остальные компоненты тензора R равны нулю или получаются из (4) с учетом классических свойств симметрии и его вещественности. Используя соотношения (4), на пространстве присоединенной G -структуры легко находятся компоненты $r_{ij} = R_{ijk}^k$ тензора r Риччи [16]:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & r_{ab} = r_{ba} = 0; \\
 2) \quad & r_{\widehat{ab}} = r_{\widehat{ba}} = 0; \\
 3) \quad & r_{\widehat{ab}} = r_{b\widehat{a}} = 2B_c^a B_b^c - A_{bc}^{ac}; \\
 4) \quad & r_{a0} = r_{0a} = B_{ac}^c; \\
 5) \quad & r_{\widehat{a}0} = r_{0\widehat{a}} = -B_c^{ac}; \\
 6) \quad & r_{00} = -2B_c^a B_a^c.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В частности [16], скалярная кривизна $\varkappa$ на пространстве присоединенной G -структуры QS -многообразия подсчитывается по формуле

$$\varkappa = g^{ij} r_{ij} = 2(B_c^a B_a^c - A_{ac}^{ac}). \tag{6}$$

Наконец, можно подсчитать компоненты тензора C конформной кривизны на пространстве присоединенной G -структуры QS -многообразия. С учетом леммы 1 и соотношений (1), (4)–(6), получаем

$$\begin{aligned}
 1) \quad & C_{\widehat{ab}\widehat{cd}} = -A_{bd}^{ac} + 2B_b^a B_d^c + B_d^a B_b^c \\
 & \quad - \frac{1}{3}((2B_h^a B_d^h - A_{dh}^{ah})\delta_b^c + (2B_h^c B_b^h - A_{bh}^{ch})\delta_d^a) + \frac{\varkappa}{12}\delta_d^a \delta_b^c, \\
 2) \quad & C_{\widehat{ab}\widehat{cd}} = 2B_a^{[c} B_b^{d]} + \frac{1}{3}((2B_h^c B_a^h - A_{ah}^{ch})\delta_b^d + (2B_h^d B_b^h - A_{bh}^{dh})\delta_a^c \\
 & \quad - (2B_h^d B_a^h - A_{ah}^{dh})\delta_b^c - (2B_h^c B_b^h - A_{bh}^{ch})\delta_a^d) - \frac{\varkappa}{12}\delta_{ab}^{cd}, \\
 3) \quad & C_{a0\widehat{bc}} = -B_{ac}^b + \frac{1}{3}B_{ch}^h \delta_a^b, \\
 4) \quad & C_{\widehat{a}0b\widehat{c}} = -B_c^{ab} + \frac{1}{3}B_h^{bh} \delta_c^a, \\
 5) \quad & C_{a0\widehat{b}\widehat{c}} = \frac{1}{3}(B_h^{bh} \delta_a^c - B_h^{ch} \delta_a^b), \\
 6) \quad & C_{\widehat{a}0b\widehat{c}} = \frac{1}{3}(B_{ch}^h \delta_b^a - B_{bh}^h \delta_c^a), \\
 7) \quad & C_{a0\widehat{b}0} = \frac{5}{3}B_h^b B_a^h - \frac{1}{3}A_{ah}^{bh} - \frac{1}{3}\left(2B_h^c B_c^h + \frac{\varkappa}{4}\right)\delta_a^b.
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d$. Остальные компоненты тензора C равны нулю или определяются его вещественностью и свойствами симметрии, аналогичными классическим свойствам симметрии тензора Римана–Кристоффеля.

3. Контактнo-автодуальные 5-мерные квази-сасакиевы многообразия.

Пусть теперь M – произвольное 5-мерное $\mathcal{C}$ -автодуальное QS -многообразие и пусть $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$. Тогда, $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ или $C_{\alpha\beta kl}(\Gamma^*\omega)^{kl} = 0$. Это возможно, с учетом леммы 3, если $C_{\alpha\beta\hat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}d} = 0$, т.е. если $C_{\hat{a}b\hat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}d} = 0$. А значит получаем, что $C_{\hat{a}b\hat{1}1} = C_{\hat{a}b\hat{2}2}$ и $C_{\hat{a}b\hat{1}2} = C_{\hat{a}b\hat{2}1} = 0$. С другой стороны,

$$C_{\hat{a}b\hat{c}c} = -\frac{1}{3}A_{bh}^{ah} - \frac{1}{3}B_h^a B_b^h + 2B_b^a B_h^h + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a.$$

Следовательно,

$$C_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\frac{1}{6}A_{bh}^{ah}\delta_d^c - \frac{1}{6}B_h^a B_b^h \delta_d^c + B_b^a B_h^h \delta_d^c + \frac{\varkappa}{24}\delta_b^a \delta_d^c.$$

В силу соотношений (7).1), наконец, получаем

$$\begin{aligned} A_{bd}^{ac} &= 2B_b^a B_d^c + B_d^a B_b^c + \frac{1}{6}B_h^a B_b^h \delta_d^c - B_b^a B_h^h \delta_d^c - \frac{2}{3}B_h^a B_d^h \delta_b^c - \frac{2}{3}B_h^c B_b^h \delta_d^a \\ &+ \frac{1}{6}A_{bh}^{ah}\delta_d^c + \frac{1}{3}A_{dh}^{ah}\delta_b^c + \frac{1}{3}A_{bh}^{ch}\delta_d^a + \frac{\varkappa}{24}(2\delta_d^a \delta_b^c - \delta_b^a \delta_d^c). \end{aligned} \quad (8)$$

Альтернируем тождество (8) по индексам b и d :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B_b^a B_d^c - \frac{1}{2}B_d^a B_b^c + \left(\frac{5}{12}B_h^a B_b^h - \frac{1}{2}B_b^a B_h^h\right)\delta_d^c + \left(-\frac{5}{12}B_h^a B_d^h + \frac{1}{2}B_d^a B_h^h\right)\delta_b^c \\ + \frac{1}{3}B_h^c B_d^h \delta_b^a - \frac{1}{3}B_h^c B_b^h \delta_d^a - \frac{\varkappa}{16}\delta_{bd}^{ac} - \frac{1}{12}A_{bh}^{ac}\delta_d^c + \frac{1}{12}A_{dh}^{ah}\delta_b^c + \frac{1}{6}A_{bh}^{ch}\delta_d^a - \frac{1}{6}A_{dh}^{ch}\delta_b^a = 0, \end{aligned}$$

где $\delta_{bd}^{ac} = \delta_b^a \delta_d^c - \delta_d^a \delta_b^c$. Свернем полученное тождество по индексам d и c :

$$A_{bh}^{ah} = 5B_h^a B_b^h - \left(\frac{\varkappa}{4} + 2B_h^c B_b^h\right)\delta_b^a. \quad (9)$$

При этом с учетом (8) и (9), можно заключить, что

$$\begin{aligned} A_{bd}^{ac} &= 2B_b^a B_d^c + B_d^a B_b^c + (B_h^a B_b^h - B_b^a B_h^h)\delta_d^c + \left(B_h^c B_b^h - \frac{1}{2}B_h^f B_f^h \delta_b^c\right)\delta_d^a \\ &+ \left(B_h^a B_d^h - \frac{1}{2}B_h^f B_f^h \delta_d^a\right)\delta_b^c - \frac{1}{3}\left(B_h^f B_f^h + \frac{\varkappa}{4}\right)\tilde{\delta}_{bd}^{ac}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tilde{\delta}_{bd}^{ac} = \delta_b^a \delta_d^c + \delta_d^a \delta_b^c$. Обратно, с учетом леммы 3 и соотношений (10), получаем

$$C_{\hat{a}b\hat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}d} = \left(-B_h^a B_b^h + B_b^a B_h^h + \frac{1}{3}B_h^f B_f^h \delta_b^a + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a\right)\delta_d^c(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}d} = 0.$$

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. 5-мерное квази-сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$\begin{aligned} A_{bd}^{ac} = & 2B_b^a B_d^c + B_d^a B_b^c + (B_h^a B_b^h - B_b^a B_h^h) \delta_d^c + \left(B_h^c B_b^h - \frac{1}{2} B_h^f B_f^h \delta_b^c \right) \delta_d^a \\ & + \left(B_h^a B_d^h - \frac{1}{2} B_h^f B_f^h \delta_d^a \right) \delta_b^c - \frac{1}{3} \left(B_h^f B_f^h + \frac{\varkappa}{4} \right) \tilde{\delta}_{bd}^{ac}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}_{bd}^{ac} = \delta_b^a \delta_d^c + \delta_d^a \delta_b^c$.

Напомним [16], что AC -многообразие M называется *многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны s* , если для любого $X \in \mathfrak{L}$ выполняется условие $\langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c\|X\|^4$, где $c \in C^\infty(M)$. При этом отметим, что если $c = \text{const}$, то многообразие M называется *многообразием глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны*. Известными фактами [16] является также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. AC -многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны s тогда и только тогда, когда в A -репере $R_{(bc)}^{(a \ d)} = -c\delta_{bc}^{ad}/2$, где по индексам, заключенным в круглые скобки, подразумевается симметризация, $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. QS -многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны s тогда и только тогда, когда в A -репере $A_{bc}^{ad} = 3B_{(b}^{(a} B_{c)}^{d)} - c\tilde{\delta}_{bc}^{ad}/2$, где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$.

4. Контактно-антиавтодуальные 5-мерные квази-сасакиевы многообразия. Пусть теперь M – произвольное 5-мерное $\mathcal{C}$ -антиавтодуальное QS -многообразие. Тогда если $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$, то $\mathfrak{C}(\omega) = 0$. Это возможно, с учетом леммы 3, когда $C_{\alpha\beta cd}(\Gamma^*\omega)^{cd} + 2C_{\alpha\beta\hat{c}\hat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} + C_{\alpha\beta\hat{c}\hat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0$, т.е. когда

$$C_{ab\hat{c}\hat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0 \quad \text{и} \quad C_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}(\Gamma^*\omega)^{\bar{c}\bar{d}} = 0.$$

1) Рассмотрим $C_{ab\hat{c}\hat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0$. С учетом леммы 3 это тождество можно записать в виде

$$(C_{ab\hat{1}\hat{2}} - C_{ab\hat{2}\hat{1}})(x + z\sqrt{-1}) = 0.$$

В силу произвола выбора $x, z \in \mathbb{R}$ и в силу свойств симметрии тензора C имеем, что $C_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} 2B_a^{[c} B_b^{d]} + \frac{1}{3} \left((2B_h^c B_a^h - A_{ah}^{ch}) \delta_b^d + (2B_h^d B_b^h - A_{bh}^{dh}) \delta_a^c \right. \\ \left. - (2B_h^d B_a^h - A_{ah}^{dh}) \delta_b^c - (2B_h^c B_b^h - A_{bh}^{ch}) \delta_a^d \right) - \frac{\varkappa}{12} \delta_{ab}^{cd} = 0, \end{aligned}$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d$. Свертывая сначала данное тождество по индексам b и d , а затем полученное соотношение по индексам a и c , приходим к тому, что $\varkappa = 2B_a^b B_b^a - 6B_a^a B_b^b$.

2) Рассмотрим $C_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}(\Gamma^*\omega)^{\bar{c}\bar{d}} = 0$. С учетом леммы 3 это тождество можно записать в виде

$$(C_{\bar{a}\bar{b}\bar{1}\bar{1}} + C_{\bar{a}\bar{b}\bar{2}\bar{2}})y\sqrt{-1} = 0.$$

В силу произвола выбора $y \in \mathbb{R}$ имеем, что $C_{\widehat{ab}\widehat{c}c} = 0$, т.е.

$$-A_{bc}^{ac} + 2B_b^a B_c^c + B_c^a B_b^c - \frac{1}{3}((2B_h^a B_c^h - A_{ch}^{ah})\delta_b^c + (2B_h^c B_b^h - A_{bh}^{ch})\delta_c^a) + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a = 0.$$

Свернув тождество по индексам a и b , получим, что $\varkappa = 2B_a^b B_b^a - 6B_a^a B_b^b$.

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если 5-мерное квази-сасакиевое многообразие контактно-антиавтодуально, то его скалярная кривизна $\varkappa$ на пространстве присоединенной G -структуры вычисляется по формуле

$$\varkappa = 2B_a^b B_b^a - 6B_a^a B_b^b.$$

5. Контактно-автодуальные 5-мерные косимплектические многообразия. Важным примером QS -структуры является косимплектическая структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [13]. AC -структура называется *косимплектической структурой*, если она нормальна, а ее контактная и фундаментальная формы замкнуты. Многообразие, на котором фиксирована косимплектическая структура, называется *косимплектическим многообразием*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно [16], что QS -структура является косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $B_b^a = 0$. Легко проверить, что из последнего соотношения следует, что $B_{bc}^a = B_b^{ac} = 0$.

Принимая во внимание замечание 1 и соотношения (4)–(6), получаем, что на пространстве присоединенной G -структуры косимплектических многообразий существенными компонентами тензора Римана–Кристоффеля являются

$$R_{\widehat{abcd}} = R_{\widehat{badc}} = -R_{\widehat{abdc}} = -R_{\widehat{bacd}} = A_{bc}^{ad}; \quad (11)$$

компонентами тензора r Риччи являются

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{\widehat{ab}} &= r_{\widehat{ba}} = -A_{ac}^{bc}, \\ 2) \quad r_{00} &= r_{0a} = r_{0\widehat{a}} = r_{ab} = r_{\widehat{a}\widehat{b}} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а скалярная кривизна $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = -2A_{ac}^{ac}. \quad (13)$$

Существенные компоненты тензора C конформной кривизны на пространстве присоединенной G -структуры косимплектических многообразий имеют вид

$$\begin{aligned} 1) \quad C_{\widehat{abc}\widehat{d}} &= \frac{1}{3}(r_{\widehat{ac}}\delta_b^d + r_{\widehat{bd}}\delta_a^c - r_{\widehat{ad}}\delta_b^c - r_{\widehat{bc}}\delta_a^d) - \frac{\varkappa}{12}\delta_{ab}^{cd}; \\ 2) \quad C_{\widehat{abcd}} &= A_{bc}^{ad} + \frac{1}{3}(r_{\widehat{ac}}\delta_b^d + r_{\widehat{bd}}\delta_c^a) - \frac{\varkappa}{12}\delta_c^a \delta_b^d, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d$. Остальные компоненты тензора C равны нулю или определяются его вещественностью и свойствами симметрии.

С учетом предложения 2 и замечания 1, получаем справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Косимплектическое многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны с тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{c}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

Далее с учетом теоремы 1 и замечания 1 получаем справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{\varkappa}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

ТЕОРЕМА 4. 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – произвольное 5-мерное $\mathcal{C}$ -автодуальное косимплектическое многообразие. Это равносильно, согласно теореме 3, соотношению

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{\varkappa}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

Таким образом, $A_{bc}^{ad} = -\varkappa \tilde{\delta}_{bc}^{ad} / 12 = -c \tilde{\delta}_{bc}^{ad} / 2$, где $c = \varkappa / 6$, т.е. M – многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . А значит, M – многообразие глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c .

Обратно, пусть M – многообразие глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Тогда согласно предложению 3 выполняется соотношение $A_{bc}^{ad} = -c \tilde{\delta}_{bc}^{ad} / 2$. В этом случае, учитывая соотношения (12) и (13), получаем, что $r_{ab} = 3c \delta_b^a / 2$, а $\varkappa = 6c$. Следовательно, в силу леммы 3 и соотношений (14) имеем

$$C_{ab\hat{c}\hat{d}}(\iota^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0, \quad C_{\hat{a}\hat{b}cd}(\iota^*\omega)^{cd} = -\frac{c}{2} \delta_b^a \delta_c^d (\iota^*\omega)^{cd} = -\frac{c}{2} \delta_b^a (\iota^*\omega)_c^c = 0,$$

т.е. $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$. Итак, M является 5-мерным $\mathcal{C}$ -автодуальным косимплектическим многообразием.

Учитывая полученные результаты и результаты [17], получаем

ТЕОРЕМА 5. 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий, снабженному канонической косимплектической структурой:

- 1) $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$;
- 2) $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}$;
- 3) $\mathbb{C}H^2 \times \mathbb{R}$,

где $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}H^2$ – комплексное евклидово, комплексное проективное и комплексное гиперболическое 2-мерные пространства соответственно.

6. Контактнo-антиавтодуальные 5-мерные косимплектические многообразия. Пусть 5-мерное косимплектическое многообразие M контактно-антиавтодуально, т.е. $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любой $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$. В этом случае с учетом теоремы 2 и замечания 1 имеем, что $\varkappa = 0$. А значит, с учетом леммы 3 и соотношений (12), (14).2) получаем

$$C_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}} = \left(-A_{bc}^{ac} - \frac{1}{3}(r_{\widehat{a}b} + r_{b\widehat{a}})\right)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}} = -\frac{2}{3}A_{bc}^{ac}y\sqrt{-1} = 0,$$

т.е. $A_{bc}^{ac} = 0$. Далее замечаем, что $r_{\widehat{a}b} = -A_{bc}^{ac} = 0$. Следовательно, тензор Риччи $r = 0$. Таким образом, если 5-мерное косимплектическое многообразие M контактно-антиавтодуально, то оно является риччи-плоским.

Обратно, пусть теперь 5-мерное косимплектическое многообразие M риччи-плоско, т.е. $r = 0$. В этом случае из предположения и соотношений (12) следует, что $A_{bc}^{ac} = 0$. В частности, так как $A_{ac}^{ac} = 0$, то $\varkappa = 0$. С учетом леммы 3 и соотношений (12), (14) легко видеть, что

$$C_{ab\widehat{c}\widehat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}\widehat{d}} = 0 \quad \text{и} \quad C_{\widehat{a}b\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0.$$

В самом деле, докажем последние соотношения.

1) Имеем

$$C_{ab\widehat{c}\widehat{d}}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}\widehat{d}} = \left(\frac{1}{3}(r_{a\widehat{c}}\delta_b^d + r_{b\widehat{d}}\delta_a^c - r_{a\widehat{d}}\delta_b^c - r_{b\widehat{c}}\delta_a^d) - \frac{\varkappa}{12}\delta_{ab}^{cd}\right)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}\widehat{d}} = 0.$$

2) Заметим, что $C_{\widehat{a}b\widehat{1}2}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{1}2} = C_{\widehat{a}b\widehat{2}1}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{2}1} = 0$. С другой стороны,

$$C_{\widehat{a}b\widehat{c}c}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}c} = \left(-A_{bc}^{ac} - \frac{1}{3}(r_{\widehat{a}b} + r_{b\widehat{a}}) + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a\right)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}c} = 0.$$

А значит, $C_{\widehat{a}b\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0$. Учитывая лемму 3, замечаем, что $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любой $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$, т.е. M – контактно-антиавтодуальное многообразие.

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 6. 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является риччи-плоским многообразием.

7. Контактнo-автодуальные 5-мерные сасакиевы многообразия. Еще одним важным примером QS -структур являются сасакиевы структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [13]. Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура. Многообразие, на котором фиксирована сасакиева структура, называется сасакиевым многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известно [16], что QS -структура является сасакиевой структурой тогда и только тогда, когда $B_b^a = -\sqrt{-1} \cdot \delta_b^a$. Легко проверить, что из последнего соотношения следует, что $B_{bc}^a = B_b^{ac} = 0$.

Принимая во внимание замечание 2 и соотношения (4)–(6), получаем, что на пространстве присоединенной G -структуры сасакиевых многообразий существенными

компонентами тензора Римана–Кристоффеля являются

$$\begin{aligned}
 1) \quad R_{\widehat{a}b\widehat{c}d} &= -A_{bd}^{ac} - 2\delta_b^a \delta_d^c - \delta_d^a \delta_b^c; \\
 2) \quad R_{\widehat{a}b\widehat{c}d} &= -2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b; \\
 3) \quad R_{ab\widehat{c}d} &= -2\delta_a^{[c} \delta_b^{d]}; \\
 4) \quad R_{\widehat{a}0c0} &= -\delta_c^a; \\
 5) \quad R_{a0\widehat{c}0} &= -\delta_a^c;
 \end{aligned} \tag{15}$$

компонентами тензора r Риччи являются

$$\begin{aligned}
 1) \quad r_{00} &= 4; \\
 2) \quad r_{\widehat{a}b} &= r_{b\widehat{a}} = -A_{bc}^{ac} - 2\delta_b^a; \\
 3) \quad r_{0a} &= r_{0\widehat{a}} = r_{ab} = r_{\widehat{a}\widehat{b}} = 0;
 \end{aligned} \tag{16}$$

а скалярная кривизна $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = -2A_{ac}^{ac} - 4. \tag{17}$$

Существенные компоненты тензора C конформной кривизны на пространстве присоединенной G -структуры сасакиевых многообразий имеют вид

$$\begin{aligned}
 1) \quad C_{\widehat{a}0b0} &= -\frac{1}{3}A_{bc}^{ac} - \frac{4+\varkappa}{12}\delta_b^a; \\
 2) \quad C_{ab\widehat{c}d} &= \frac{1}{3}(A_{ah}^{dh}\delta_b^c + A_{bh}^{ch}\delta_a^d - A_{ah}^{ch}\delta_b^d - A_{bh}^{dh}\delta_a^c) - \frac{28+\varkappa}{12}\delta_{ab}^{cd}; \\
 3) \quad C_{\widehat{a}b\widehat{c}d} &= -A_{bd}^{ac} - 2\delta_b^a \delta_d^c + \frac{1}{3}(A_{dh}^{ah}\delta_b^c + A_{bh}^{ch}\delta_d^a) + \frac{4+\varkappa}{12}\delta_d^a \delta_b^c.
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d$. Остальные компоненты тензора C равны нулю или определяются его вещественностью и свойствами симметрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [16]. Сасакиево многообразие точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны s называется *сасакиевой пространственной формой*.

С учетом предложения 2 и замечания 2, получаем справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Сасакиево многообразие является многообразием точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны s (т.е. сасакиевой пространственной формой) тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$A_{bc}^{ad} = -3\delta_{(b}^{(a} \delta_{c)}^d) - \frac{c}{2}\widetilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

$$\text{где } \widetilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

Далее с учетом теоремы 1 и замечания 2 получаем справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. 5-мерное сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{\varkappa + 4}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

ТЕОРЕМА 8. 5-мерное сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – произвольное 5-мерное $\mathcal{C}$ -автодуальное сасакиево многообразие. Это равносильно, согласно теореме 7, соотношению

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{\varkappa + 4}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$. Таким образом,

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{\varkappa + 4}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = -\frac{c + 3}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \quad c = \frac{\varkappa - 14}{6},$$

т.е. M – многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . А значит, M – многообразие глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c .

Обратно, пусть M – многообразие глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Тогда согласно предложению 4 выполняется соотношение

$$A_{bc}^{ad} = -3\delta_{(b}^{(a} \delta_{c)}^{d)} - \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = -\frac{c + 3}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}.$$

В этом случае, учитывая соотношение (17), получаем, что

$$A_{bc}^{ac} = -\frac{9 + 3c}{2} \delta_b^a, \quad A_{ac}^{ac} = -9 - 3c, \quad \varkappa = 14 + 6c.$$

Следовательно, в силу леммы 3 и соотношений (18) имеем

$$C_{\widehat{ab}\widehat{cd}}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{cd}} = \frac{c - 1}{2} \delta_b^a (\Gamma^*\omega)_c^c = 0,$$

т.е. $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^-(\mathcal{L})$. Итак, M является 5-мерным $\mathcal{C}$ -автодуальным сасакиевым многообразием.

Учитывая полученные результаты и результаты [18], [19] заключаем.

ТЕОРЕМА 9. 5-мерное сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:

- 1) при $c > -3$ – 5-мерной сфере $\mathbb{S}^5$, снабженной канонической сасакиевой структурой или структурой, полученной из канонической преобразованием D -гомотетии;
- 2) при $c = -3$ – пространству главного T^1 -расслоения над 4-мерным тором, снабженному стандартной плоской келеровой структурой, рассматриваемой как структура Ходжа [19];
- 3) при $c < -3$ – 5-мерной сфере $\mathbb{S}^5$, снабженной структурой, полученной из канонической преобразованием D -инверсии.

8. Контактно-антиавтодуальные 5-мерные сасакиевы многообразия.

Пусть 5-мерное сасакиевое многообразие M контактно-антиавтодуально, т.е. $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любой $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$. В этом случае с учетом теоремы 2 и замечания 2 имеем, что $\varkappa = 20$. А значит, с учетом леммы 3 и соотношений (16), (18), 3), получаем

$$C_{ab\widehat{c}c}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}c} = \left(-\frac{1}{3}A_{bc}^{ac} - 2\delta_b^a\right)2y\sqrt{-1} = 0,$$

т.е. $A_{bc}^{ac} = -6\delta_b^a$. В силу леммы 1 и соотношений (16) замечаем, что $r_{00} = 4 = 4g_{00}$ и $r_{\widehat{a}b} = -A_{bc}^{ac} - 2\delta_b^a = 4\delta_b^a = 4g_{\widehat{a}b}$. Следовательно, $r_{ij} = 4g_{ij}$ или $r = 4g$. Таким образом, если 5-мерное сасакиевое многообразие M контактно-антиавтодуально, то оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 4$.

Обратно, пусть теперь 5-мерное сасакиевое многообразие M является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 4$, т.е. $r = 4g$. В этом случае из предположения и соотношений (16) следует, что $A_{bc}^{ac} = -6\delta_b^a$. В частности, так как $A_{ac}^{ac} = -12$, то $\varkappa = 20$. С учетом леммы 3 и соотношений (16), (18), легко видеть, что

$$C_{ab\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0, \quad C_{\widehat{a}b\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0.$$

В самом деле, докажем последние соотношения.

1) Имеем

$$\begin{aligned} C_{ab\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} &= \left(\frac{1}{3}(A_{ah}^{dh}\delta_b^c + A_{bh}^{ch}\delta_a^d - A_{ah}^{ch}\delta_b^d - A_{bh}^{dh}\delta_a^c) - \frac{28 + \varkappa}{12}\delta_{ab}^{cd}\right)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} \\ &= (-4\delta_a^c\delta_b^d + 4\delta_b^c\delta_a^d - 4\delta_a^d\delta_b^c + 4\delta_a^d\delta_b^c)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0. \end{aligned}$$

2) Заметим, что $C_{\widehat{a}b\widehat{1}2}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{1}2} = C_{\widehat{a}b\widehat{2}1}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{2}1} = 0$. С другой стороны, рассмотрим

$$C_{\widehat{a}b\widehat{c}c}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}c} = \left(-A_{bc}^{ac} - 4\delta_b^a + \frac{2}{3}A_{bh}^{ah} + 2\delta_b^a\right)(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}c} = (8\delta_b^a - 8\delta_b^a)2y\sqrt{-1} = 0.$$

А значит, $C_{\widehat{a}b\widehat{c}d}(\Gamma^*\omega)^{\widehat{c}d} = 0$. Учитывая лемму 3, замечаем, что $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любой $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$, т.е. M – контактно-антиавтодуальное многообразие.

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 10. 5-мерное сасакиевое многообразие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. 1–2, Мир, М., 1990.
- [2] R. Penrose, “The twistor programme”, *Rep. Mathematical Phys.*, **12**:1 (1977), 65–76.
- [3] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, “Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **362** (1978), 425–461.
- [4] B.-Y. Chen, “Some topological obstructions to Bochner-Kaehler metrics and their applications”, *J. Differential Geom.*, **13**:4 (1978), 547–558.
- [5] J. P. Bourguignon, “Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d’Einstein”, *Invent. Math.*, **63**:2 (1981), 263–286.

- [6] A. Derdziński, “Self-duality of Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four”, *Compositio Math.*, **49**:3 (1983), 405–433.
- [7] M. Itoh, “Self-duality of Kähler surfaces”, *Compositio Math.*, **51**:2 (1984), 265–273.
- [8] О. Е. Арсеньева, “Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий”, *Матем. сб.*, **184**:8 (1993), 137–148.
- [9] О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко, “Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей”, *Матем. сб.*, **189**:1 (1998), 21–44.
- [10] V. Apostolov, J. Davidov, O. Muškarov, “Compact self-dual Hermitian surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:8 (1996), 3051–3063.
- [11] Е. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Факториал Пресс, М., 2002.
- [12] D. E. Blair, “The theory of quasi-Sasakian structures”, *J. Differential Geom.*, **1** (1967), 331–345.
- [13] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **203**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2002.
- [14] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [15] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Гостехиздат, М., 1953.
- [16] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, “Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий”, *Матем. сб.*, **193**:8 (2002), 71–100.
- [17] В. Ф. Кириченко, “Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **18**, ВИНТИ, М., 1986, 25–71.
- [18] В. Ф. Кириченко, И. П. Борисовский, “Интегральные многообразия контактных расщеплений”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 119–134.
- [19] В. Ф. Кириченко, “Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6**:4 (2000), 1095–1120.

А. В. Аристархова

Московский педагогический государственный университет

E-mail: aristarhowa@gmail.com

Поступило

11.03.2010

Исправленный вариант

15.12.2010

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

E-mail: highgeom@yandex.ru