Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 506–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:40:31

Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье

Б. И. Голубов

В данной работе вводится понятие сферического скачка функции многих переменных в заданной точке относительно однородного гармонического многочлена. При этом если функция интегрируема по сферам достаточно малого радиуса с центром в данной точке и непрерывна в этой точке, то ее сферический скачок в этой точке относительно любого однородного гармонического многочлена, отличного от константы, равен нулю. При некоторых условиях на функцию, зависящую от n переменных ($n \geq 2$), в точке, где сферический скачок этой функции относительно однородного гармонического многочлена P отличен от нуля, вычисляется первый член асимптотики сферических средних Бохнера–Рисса критического порядка $(n-1)/2$ ряда (интеграла), сопряженного с n -кратным рядом (интегралом) Фурье этой функции относительно ядра типа Рисса, порожденного многочленом P . Указанный первый член асимптотики содержит сферический скачок функции в качестве мультипликативной константы.

Библиография: 8 названий.

Введение. В теории однократных рядов Фурье известна следующая теорема Лукача [1] (см. также [2; гл. 1, § 42]): если 2π -периодическая суммируемая на периоде функция f в точке x_0 имеет скачок $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{S}_m(f, x_0)}{\ln m} = -\frac{d}{\pi}, \quad (0.1)$$

где $\tilde{S}_m(f)$ – частная сумма порядка m ряда, сопряженного с рядом Фурье функции f . Из этой теоремы, в частности, вытекает, что при $d \neq 0$, т.е. в точке неустранимого разрыва первого рода функции f ряд, сопряженный с ее рядом Фурье, неограниченно расходится. Поведение сопряженного ряда с однократным рядом Фурье изучалось во многих работах (см., например, обзорную статью автора [3]).

Отметим, что понятие ряда, сопряженного с кратным рядом Фурье, не является однозначным. Для n -кратного ряда Фурье существуют $2^n - 1$ рядов, сопряженных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321) и АВИП Минобразования России “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1662).

с ним в смысле Чезаро, и n рядов, сопряженных в смысле Рисса (см., например, [3]). Кальдерон и Зигмунд [4], обобщая определение Рисса, ввели понятие ряда, сопряженного с n -кратным рядом Фурье относительно заданного ядра. В качестве ядра, в частности, можно брать функции вида

$$K(x) = P\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n \geq 2, \quad (0.2)$$

где $P(x)$ – однородный гармонический, т.е. удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta P = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

многочлен степени $k \in \mathbb{N}$. Такие ядра они называли *ядрами Рисса*.

В данной работе вводится понятие сферического скачка $d = d_P(f, x_0)$ функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, относительно однородного гармонического многочлена P . При этом $d_P(f, x_0) = 0$ для любой функции f , непрерывной в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и интегрируемой по сферам с центром x_0 достаточно малого радиуса, где P – произвольный однородный гармонический многочлен степени $k \in \mathbb{N}$. Даются достаточные условия на функцию n переменных ($n \geq 2$), при которых для сферических средних Бохнера–Рисса критического порядка $\gamma = (n-1)/2$ рядов (интегралов), сопряженных с n -кратным рядом (интегралом) Фурье этой функции относительно ядер вида (0.2), справедливы аналоги равенства (0.1).

1. Определения и формулировки основных результатов. Напомним сначала определение n -кратного интеграла, сопряженного к интегралу Фурье относительно ядра (0.2), считая $n \geq 2$. Для функции $f \in L(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим ее интеграл Фурье

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) \exp(ixy) dy \quad \left(xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j\right), \quad (1.1)$$

где

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \exp(-iyu) du \quad (1.2)$$

– преобразование Фурье функции f . Согласно Кальдерону и Зигмунду [5] интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) \widehat{K}(y) \exp(ixy) dy \quad (1.3)$$

называется *сопряженным с интегралом Фурье (1.1) относительно ядра K вида (0.2)*. При этом преобразование Фурье $\widehat{K}(x)$ понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\widehat{K}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-n} \int_{\varepsilon < |y| < \lambda} K(y) \exp(-ixy) dy.$$

В работе Бохнера [6] доказано, что этот повторный предел существует в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, причем

$$\widehat{K}(x) = \frac{(-i)^k \Gamma(k/2) P(x')}{2^n \pi^{n/2} \Gamma((n+k)/2)}, \quad x' = \frac{x}{|x|}. \quad (1.4)$$

Определим теперь ряд, сопряженный с n -кратным рядом Фурье относительно ядра (0.2). Пусть задана функция $f \in L(\mathbb{Q}^n)$, $n \geq 2$, где

$$\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, n\}$$

– куб в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что эта функция имеет период 2π по каждой переменной x_j , $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) \exp(imx), \quad (1.5)$$

где

$$\hat{f}(m) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{Q}^n} f(x) \exp(-imx) dx$$

– коэффициенты Фурье функции f . Тогда ряд

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{f}(m) \hat{K}(m) \exp(imx) \quad (1.6)$$

называется *сопряженным с рядом Фурье (1.5) относительно ядра (0.2)*. Это определение введено в работе Кальдерона и Зигмунда [4]. Рассмотрим сферические средние Бохнера–Рисса порядка $\delta \geq 0$ сопряженного ряда (1.6), которые задаются равенством

$$\tilde{S}_R^\delta(f, x) = \sum_{0 < |m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(m) \hat{K}(m) \exp(imx), \quad R > 0. \quad (1.7)$$

Для $\delta = \gamma \equiv (n-1)/2$ эти средние называются *средними Бохнера–Рисса критического порядка ряда (1.6)*.

Аналогично определяются *сферические средние Бохнера–Рисса порядка $\delta \geq 0$ сопряженного интеграла (1.3)*:

$$\tilde{\sigma}_R^\delta(f, x) = \int_{|y| < R} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(y) \hat{K}(y) \exp(ixy) dy. \quad (1.8)$$

Определим теперь сферический скачок $d = d_P(f, x_0)$ функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, относительно однородного гармонического многочлена P . Обозначим через $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ единичную сферу с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^n$. Введем обозначение

$$\tilde{f}_{x_0}(t) = \int_{S_n} f(x_0 - tw) P(w) dS_n(w). \quad (1.9)$$

Если функция f интегрируема по сферам $x_0 + tS_n$ при всех достаточно малых $t > 0$ и существует конечный предел

$$d_P(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +0} \tilde{f}_{x_0}(t) = \tilde{f}_{x_0}(+0), \quad (1.10)$$

то назовем его *сферическим скачком функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ относительно гармонического многочлена P* или короче *сферическим скачком*. Отметим, что

$$\tilde{f}_{x_0}(0) = f(x_0) \int_{S_n} P(w) dS_n(w) = 0, \quad n \geq 2, \quad (1.11)$$

для любого однородного гармонического многочлена P степени $k \in \mathbb{N}$. Поэтому для всякой непрерывной в точке x_0 функции f , интегрируемой по сферам $x_0 + tS_n$ при всех достаточно малых $t > 0$, из (1.9)–(1.11) легко следует, что

$$d_P(f, x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \tilde{f}_{x_0}(t) = \tilde{f}_{x_0}(0)f(x_0) = 0.$$

Отметим также, что если функция (1.9) имеет конечную вариацию на отрезке $[0, \delta]$ при некотором $\delta > 0$, то функция f имеет в точке x_0 конечный сферический скачок $d_P(f, x_0)$ относительно любого однородного гармонического многочлена P степени $k \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , причем функция $\tilde{f}_{x_0}(t)$ (см. (1.9)) имеет конечную вариацию на некотором отрезке $[0, t_0]$, $t_0 > 0$. Тогда для сопряженных сферических средних (1.8) критического порядка $\gamma = (n-1)/2$ интеграла Фурье функции f справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0)}{\ln R} = \frac{d_P(f, x_0)}{(2\pi)^n}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f \in L \log^+ L(\mathbb{Q}_n)$, $n \geq 2$, имеет период 2π по каждой переменной x_j , $j = 1, \dots, n$, ограничена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем функция $\tilde{f}_{x_0}(t)$ имеет конечную вариацию на некотором отрезке $[0, t_0]$, $t_0 > 0$. Тогда для сопряженных сферических средних (1.7) критического порядка $\gamma = (n-1)/2$ ряда Фурье функции f справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{S}_R^\gamma(f, x_0)}{\ln R} = \frac{d_P(f, x_0)}{(2\pi)^n}.$$

2. Доказательство теорем. Формулируемые ниже леммы 1, 2 и теорема А доказаны в работе [7] (их формулировки имеются также в статье [8]).

ЛЕММА 1. Если $P(x)$ – однородный гармонический в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, многочлен степени $k \in \mathbb{N}$, $\gamma = (n-1)/2$ и $\text{Res } s > -(n+1)/2$, то для любого $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\int_{|x| < R} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^{s+\gamma} P(x') \exp(ixy) dx = i^k R^{n+k} P(y) E(n, k, s, R|y|), \quad (2.1)$$

где

$$E(n, k, s, u) = \frac{\pi}{2^k} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + s\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(j + (n+k)/2)}{j! \Gamma(j + k + n/2) \Gamma(j + n + s + (k+1)/2)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2j}, \quad (2.2)$$

а радиус сходимости ряда (2.2) равен ∞ .

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 2$ и k – целые, $s = \sigma + i\tau$, $-1 \leq \sigma \leq 1$, τ действительно. Тогда при $u \geq 1$ справедливо равенство

$$E(n, k, s, u) = \frac{C(n, k)}{u^{n+k}} + \frac{G_1(s, u)}{u^{n+k+1}} + \frac{G_2(s, u)}{u^{n+k+s+1}} + \frac{a(n, s)}{\pi u^{n+k+s}} \cos\left\{u - (n+k+s) \frac{\pi}{2}\right\}, \quad (2.3)$$

где

$$C(n, k) = 2^n \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{k}{2}\right), \quad (2.4)$$

$$a(n, s) = 2^{n+s} \pi^{(n+1)/2} \Gamma\left(s + \frac{n+1}{2}\right), \quad (2.5)$$

$$|G_j(s, u)| \leq A(n, k) \exp\left(\frac{3}{2} \pi |\tau|\right), \quad j = 1, 2, \quad A(n, k) > 0. \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА А. Пусть $f \in L \log^+ L(\mathbb{Q}_n)$, $n \geq 2$, а $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{Q}_n$ и $g(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_n \setminus \mathbb{Q}_n$. Тогда равномерно на любом замкнутом подмножестве $G \subset \mathbb{Q}_n$ разность $\tilde{S}_R^\gamma(f, x) - \tilde{\sigma}_R^\gamma(g, x)$ при $R \rightarrow +\infty$ стремится к конечному пределу (зависящему от x).

Используя формулы преобразования Фурье (1.2) и Бохнера (1.4), запишем сопряженные сферические средние Рисса критического порядка интеграла Фурье (1.1), т.е. средние (1.8) при $\delta = \gamma \equiv (n-1)/2$, в виде

$$\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x) = B(n, k) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-w) \left\{ \int_{|y| < R} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right) P(y') \exp(iwy) dy \right\} dw, \quad (2.7)$$

где

$$B(n, k) = \frac{(-i^k) \Gamma(k/2)}{2^{2n} \pi^{3n/2} \Gamma((n+k)/2)}. \quad (2.8)$$

Введем обозначение

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|w| \geq \varepsilon} f(x-w) P(w') |w|^{-n} dw. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 3. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , причем функция $\tilde{f}_{x_0}(t)$ (см. (1.9)) имеет конечную вариацию на некотором отрезке $[0, t_0]$, $t_0 > 0$. Тогда

$$\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) - \tilde{f}_{1/R}(x_0) = O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Phi_R(w) = \int_{|y| < R} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right)^\gamma P(y') \exp(iwy) dy. \quad (2.11)$$

Учитывая обозначение (2.11), из (2.7) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) &= B(n, k) \int_{|w| \geq 1/R} f(x_0-w) \Phi_R(w) dw + B(n, k) \int_{|w| < 1/R} f(x_0-w) \Phi_R(w) dw \\ &\equiv I_1(R) + I_2(R). \end{aligned} \quad (2.12)$$

На основании леммы 1 имеем

$$\Phi_R(w) = i^k R^{n+k} E(n, k, 0, R|w|) P(w). \quad (2.13)$$

Функция $E(n, k, 0, u)$ согласно лемме 2 представима рядом (2.2) с бесконечным радиусом сходимости, и поэтому $|E(n, k, 0, u)| \leq C_1$ при $-1 \leq u \leq 1$, где постоянная C_1 не зависит от u . Преобразуем второе слагаемое $I_2(R)$ из (2.12). Учитывая, что гармонический многочлен P однороден и имеет степень k , т.е. $P(x) = |x|^k P(x')$, преобразуем второе слагаемое $I_2(R)$ из (2.12), используя равенство (2.13):

$$I_2(R) = i^k R^{n+k} \int_0^{1/R} \left\{ \int_{S_n} f(x_0 - tw') P(w') dS_n(w') \right\} E(n, k, 0, Rt) t^{n+k-1} dt. \quad (2.14)$$

Так как функция f в точке x_0 имеет конечный сферический скачок относительно гармонического многочлена P , то из (1.9) и (1.10) имеем

$$\int_{S_n} f(x_0 - tw') P(w') dS_n(w') = d_P(f, x_0) + o(1), \quad t \rightarrow +0. \quad (2.15)$$

Из (2.14) на основании (2.15) и неравенства $|E(n, k, 0, u)| \leq C_1$, $-1 \leq u \leq 1$, легко следует, что $I_2(R) = O(1)$, $R \rightarrow +\infty$. Поэтому из (2.12) получаем

$$\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) = B(n, k) \int_{|w| \geq 1/R} f(x_0 - w) \Phi_R(w) dw + O(1), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Из (2.16) на основании леммы 2 и равенства $P(x) = |x|^k P(x')$ при $R \rightarrow +\infty$ имеем

$$\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) = B(n, k) i^k \int_{|w| \geq 1/R} f(x_0 - w) P(w') \Psi(R, w) dw + O(1), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(R, w) &= \frac{C(n, k)}{|w|^n} + \frac{G_1(0, R|w|) + G_2(0, R|w|)}{R|w|^{n+1}} + \frac{a(n, 0)}{\pi|w|^n} \cos\left(R|w| - (n+k)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\equiv \sum_{j=1}^3 \Psi_j(R, w). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая представление (2.18), запишем правую часть равенства (2.17) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) &= B(n, k) i^k \sum_{j=1}^3 \int_{|w| \geq 1/R} f(x_0 - w) P(w') \Psi_j(R, w) dw + O(1) \\ &\equiv \sum_{j=1}^3 \Phi_j(R) + O(1), \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из определения постоянных $B(n, k)$ и $C(n, k)$ (см. равенства (2.8) и (2.4)) легко видеть, что $\Phi_1(R) = \tilde{f}_{1/R}(x_0)$, где $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ задается равенством (2.9). Поэтому из (2.19) имеем

$$\tilde{\sigma}_R^\gamma(f, x_0) - \tilde{f}_{1/R}(x_0) = \sum_{j=2}^3 \Phi_j(R) + O(1), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.20)$$

Для завершения доказательства леммы осталось доказать, что слагаемые $\Phi_j(R)$, $j = 2, 3$, в правой части равенства (2.20) ограничены при $R \rightarrow +\infty$. Для этого отметим, что согласно лемме 2

$$|G_j(0, u)| \leq A(n, k), \quad j = 1, 2, \quad u \geq 1$$

(см. (2.6)). Поэтому из (2.18) имеем

$$|\Psi_2(R, w)| \leq \frac{2A(n, k)}{R|w|^{n+1}} \quad (2.21)$$

при $R|w| \geq 1$. По условию леммы функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0 . Не ограничивая общности, будем считать, что $|f(x_0 - w)| \leq M$ при $|w| \leq t_0$ и некоторой постоянной $M > 0$, где $t_0 > 0$ из условия леммы 3. Отметим также, что гармонический многочлен P ограничен на единичной сфере, т.е.

$$|P(x')| \leq L, \quad x' \in S_n,$$

при некоторой постоянной $L > 0$. Считая, что $1/R < t_0$, представим $\Phi_2(R)$ (см. (2.19)) в виде суммы двух слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_2(R) &= \int_{1/R \leq |w| < t_0} f(x_0 - w)P(w')\Psi_2(R, w) dw + \int_{|w| \geq t_0} f(x_0 - w)P(w')\Psi_2(R, w) dw \\ &\equiv \Phi'_2(R) + \Phi''_2(R). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Учитывая неравенство (2.21) и приведенные выше неравенства для функции f и гармонического многочлена P , оценим слагаемое $\Phi'_2(R)$ из правой части равенства (2.22):

$$\begin{aligned} |\Phi'_2(R)| &\leq \frac{2A(n, k)ML}{R} \int_{1/R \leq |w| < t_0} \frac{dw}{|w|^{n+1}} \\ &= \frac{2A(n, k)ML|S_n|}{R} \left(R - \frac{1}{t_0} \right) \leq B, \quad R > \frac{1}{t_0}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $B = 2A(n, k)ML|S_n|$, а $|S_n|$ — площадь поверхности единичной сферы S_n . Снова пользуясь неравенством (2.21) и неравенством $|P(x')| \leq L$, $x' \in S_n$, оценим слагаемое $\Phi''_2(R)$ из правой части равенства (2.22):

$$|\Phi''_2(R)| \leq \frac{2A(n, k)L}{R} \int_{|w| \geq t_0} \frac{|f(x_0 - w)|}{|w|^{n+1}} dw \leq \frac{2A(n, k)L}{Rt_0^{n+1}} \|f\|_{L(\mathbb{R}^n)}, \quad R > \frac{1}{t_0}. \quad (2.24)$$

Из (2.22)–(2.24) следует, что

$$\Phi_2(R) = O(1), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.25)$$

Наконец, оценим слагаемое $\Phi_3(R)$ из правой части (2.20). Пользуясь его определением (2.19) и равенством (2.18), получим

$$\Phi_3(R) = \left(B(n, k)a(n, 0) \frac{i^k}{\pi} \right) \int_{|w| \geq 1/R} f(x_0 - w)|w|^{-n} \cos \left(R|w| - \frac{n+k}{2} \right) dw. \quad (2.26)$$

Обозначим через $\Phi'_3(R)$ интеграл из правой части равенства (2.26) и докажем, что он ограничен при $R \rightarrow +\infty$. Считая, что $R > 1/t_0$, разобьем интеграл $\Phi'_3(R)$ на сумму двух интегралов следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi'_3(R) &= \left\{ \int_{1/R \leq |w| \leq t_0} + \int_{|w| \geq t_0} \right\} f(x_0 - w)|w|^{-n} \cos \left(R|w| - (n+k) \frac{\pi}{2} \right) dw \\ &\equiv I_1(R) + I_2(R). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Легко видеть, что

$$|I_2(R)| \leq t_0^{-n} \|f\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad R > \frac{1}{t_0}. \quad (2.28)$$

Интеграл $I_1(R)$ из (2.27) можно представить в виде

$$I_1(R) = \int_{1/R}^{t_0} \tilde{f}_{x_0}(t) \frac{1}{t} \cos\left(Rt - (n+k)\frac{\pi}{2}\right) dt = \int_1^{Rt_0} \tilde{f}_{x_0}\left(\frac{u}{R}\right) \frac{1}{u} \cos\left(u - (n+k)\frac{\pi}{2}\right) du. \quad (2.29)$$

Функция $\tilde{f}_{x_0}(u/R)(1/u)$ на отрезке $[1, Rt_0]$ имеет вариацию, не превосходящую

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} |\tilde{f}_{x_0}(t)| + \operatorname{var}_{0 \leq t \leq t_0} \tilde{f}_{x_0}(t) \equiv D < \infty.$$

Представляя эту функцию в виде разности двух неотрицательных неубывающих на отрезке $[1, Rt_0]$ функций, ограниченных константой, не зависящей от R , $R \geq 1/t_0$, с помощью второй теоремы о среднем для интеграла $I_1(R)$ из (2.29) легко получим оценку

$$I_1(R) = O(1), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.30)$$

Из (2.27) и оценок (2.28) и (2.30) получим $\Phi'_3(R) = O(1)$, $R \rightarrow +\infty$. Поскольку $\Phi'_3(R)$ есть интеграл из правой части равенства (2.26), то тем самым, и

$$\Phi_3(R) = O(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Итак, доказано, что оба слагаемых в правой части равенства (2.20) ограничены при $R \rightarrow +\infty$. Тем самым, лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, в точке x_0 имеет конечный сферический скачок $d = d_P(f, x_0)$ относительно однородного гармонического многочлена P . Тогда

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}_{1/R}(x_0)}{\ln R} = \frac{d_P(f, x_0)}{(2\pi)^n}, \quad (2.31)$$

где $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ задается равенством (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\tilde{f}_{1/R}(x_0)$ в виде

$$\tilde{f}_{1/R}(x_0) = (2\pi)^{-n} \left\{ \int_{1/R \leq |w| \leq T} + \int_{|w| > T} \right\} f(x_0 - w) P(w') |w|^{-n} dw \equiv J_1(R) + J_2(R), \quad (2.32)$$

где $T > 0$ фиксировано, а $R > 1/T$. Считая, что $|P(x')| \leq L$, $x' \in S_n$, получим

$$|J_2(R)| \leq T^{-n} L \|f\|_{L(\mathbb{R}^n)}, \quad R > \frac{1}{T}. \quad (2.33)$$

Представим слагаемое $J_1(R)$ из правой части равенства (2.32) в виде

$$J_1(R) = (2\pi)^{-n} \int_{1/R}^T \left\{ \int_{S_n} f(x_0 - tw') P(w') dS_n(w') \right\} \frac{dt}{t}. \quad (2.34)$$

По условию леммы в точке x_0 функция f имеет конечный сферический скачок $d = d_P(f, x_0)$ относительно однородного гармонического многочлена P (см. (1.10) и (1.9)). Поэтому из (2.34) легко следует, что

$$J_1(R) = (2\pi)^{-n} d_P(f, x_0) \ln R + o(\ln R), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.35)$$

Из (2.32), (2.33) и (2.35) вытекает равенство (2.31). Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть функция

$$f \in L \log^+ L(\mathbb{Q}_n), \quad n \geq 2,$$

имеет период 2π по каждой переменной x_j , $j = 1, \dots, n$, ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , причем функция $\tilde{f}_{x_0}(t)$ (см. (1.9)) имеет конечную вариацию на некотором отрезке $[0, t_0]$, $t_0 > 0$. Положим $g(x) = f(x)$ для $x \in x_0 + \mathbb{Q}^n$ и $g(x) = 0$ для $x \notin x_0 + \mathbb{Q}^n$. Тогда

$$\tilde{S}_R^\gamma(f, x_0) - \tilde{g}_{1/R}(x_0) = O(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \tilde{S}_R^\gamma(f, x_0) - \tilde{g}_{1/R}(x_0) &= (\tilde{S}_R^\gamma(f, x_0) - \tilde{\sigma}_R^\gamma(g, x_0)) + (\tilde{\sigma}_R^\gamma(g, x_0) - \tilde{g}_{1/R}(x_0)) \\ &\equiv \Delta_1(R) + \Delta_2(R). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Согласно теореме А $\Delta_1(R) = O(1)$, $R \rightarrow +\infty$, а согласно лемме 3 $\Delta_2(R) = O(1)$, $R \rightarrow +\infty$. Таким образом, оба слагаемых в правой части равенства (2.36) ограничены при $R \rightarrow +\infty$, и лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Утверждение теоремы 1 вытекает из лемм 3 и 4, а утверждение теоремы 2 – из теоремы 1 и леммы 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Lukacs, “Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe”, *J. Reine Angew. Math.*, **150** (1920), 107–112.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [3] Б. И. Голубов, “Кратные ряды и интегралы Фурье”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **19**, ВИНТИ, М., 1982, 3–54.
- [4] A. P. Calderón, A. Zygmund, “Singular integrals and periodic functions”, *Studia Math.*, **14** (1954), 249–271.
- [5] A. P. Calderon, A. Zygmund, “On the existence of certain singular integrals”, *Acta Math.*, **88**:1-2 (1952), 85–139.
- [6] S. Bochner, “Theta relations with spherical harmonics”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **37**:12 (1951), 804–808.
- [7] Chao Ping Chang, *On Certain Exponential Sums Arising in Conjugate Multiple Fourier Series*, Ph.D. Thesis, The University of Chicago, Chicago, IL, 1964.
- [8] G. E. Lippman, “Spherical summability of conjugate multiple Fourier series and integrals at the critical index”, *SIAM J. Math. Anal.*, **4**:4 (1973), 681–695.

Б. И. Голубов

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: golubov@mail.mipt.ru

Поступило

18.02.2010

Исправленный вариант

01.01.2011