Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Фалалеев, Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля–Пуассона, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 595–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:12:14

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА

Л. П. Фалалеев

Найдено точное значение постоянной в главном члене уклонения функции из класса $\text{Lip}_1 \alpha$ от обобщенных операторов Абеля–Пуассона, определяемых множителями суммирования $\lambda_\nu(r) = r^{\nu^l}$ сопряженного ряда Фурье в случае $0 < \alpha < l \leq 1$.

Библиография: 10 названий.

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$,

$$\begin{aligned} A_{r,l}(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) P_{r,l}(t) dt, \\ P_{r,l}(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l} \cos \nu t, \quad 0 < r < 1, \quad l > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

– обобщенный оператор Абеля–Пуассона. Если $l = 1$, то оператор (1) – линейный положительный оператор Абеля–Пуассона, при $l = 2$ операторы (1), как показал П. П. Коровкин, являются положительными и осуществляют наилучшее асимптотическое приближение функций класса Зигмунда

$$Z_\alpha = \{f(x) \in C_{2\pi} : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq 2|h|^\alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad |h| \leq 2\pi,$$

среди операторов с ядром вида (см. [1]) $1/2 + r \cos t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \lambda_\nu(r) \cos \nu t$. Положительность операторов (1) для $0 < l < 2$ была установлена В. А. Баскаковым [2]. В этой работе приведены разложения в ряд по степеням $\beta = \ln(1/r) < \pi$ уклонений $\sup_f \|f(x) - A_{r,l}(f, x)\|_{C_{2\pi}}$ при $l = 1, l = 2$ для функций из классов $\text{Lip}_1 \alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $W^{(p)}$, $p = 1, 2, \dots$. При $l = 1$ для $f(x) \in \text{Lip}_1 1(Z_1)$ полное асимптотическое разложение вида

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k (1-r)^k \ln \frac{1}{1-r} + \beta_k (1-r)^k \right\}, \quad r \rightarrow 1-,$$

где при $k = 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i 2^i} \right\}$$

получено Л. В. Малей [3] и передоказано Э. Л. Штарком [4]. Подробно история этого вопроса содержится в [2], [4]. Свойства полигармонических операторов (1), удовлетворяющих при $l = 1, 2, \dots$ уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(-1)^{l+1}}{r^2} - \frac{\partial^{2l} U}{\partial x^{2l}} = 0,$$

$$U(r, x)|_{r=1} = f(x), \quad U(r, x) \equiv A_{r,l}(f, x),$$

изучались Я. С. Бугровым [5].

Без исследования вопроса о положительности операторов $A_{r,l}(f, x)$ в зависимости от l он получил точный порядок приближения

$$\sup_{f \in \text{Lip}_1 \alpha} \|f(x) - A_{r,l}(f, x)\|_{C_{2\pi}} < C(1-r)^{\alpha/l}, \quad C > 0.$$

По аналогии с оператором (1) вводится оператор, построенный на базе сопряженного ряда Фурье

$$\tilde{A}_{r,l}(f, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l} (-b_{\nu} \cos \nu x + a_{\nu} \sin \nu x), \quad l > 0, \quad 0 < r < 1,$$

или

$$\tilde{A}_{r,l}(f, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) Q_{r,l}(t) dt,$$

$$Q_{r,l}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l} \sin \nu t.$$

Известно, что сопряженный ряд функции $f(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ суммируется методом Абеля–Пуассона к $\tilde{f}(x)$ почти всюду. Если $f(x)$ принадлежит определенным классам непрерывных или дифференцируемых функций, то порядок сходимости при $r \rightarrow 1$ операторов $\tilde{A}_{r,l}(f, x)$ к $\tilde{f}(x)$ изучался в работах Б. Надя, Л. И. Баусова, Г. М. Мамедова, Р. Г. Мамедова. В этом случае

$$Q_{r,1}(t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \cdot \frac{(1-r)^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Отсюда следует равенство

$$\tilde{A}_{r,1}(f, x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{\operatorname{tg}(t/2)} \cdot \frac{(1-r)^2 dt}{1 - 2r \cos t + r^2},$$

и задача о приближении $\tilde{f}(x)$ операторами $\tilde{A}_{r,1}(f, x)$ сводится к изучению асимптотических свойств операторов с положительным ядром. Полные асимптотические разложения по степеням $\beta = \ln(1/r)$ для точных граней уклонения $\tilde{f}(x)$ от $\tilde{A}_{r,1}(f, x)$ на классах $\text{Lip}_1 \alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $W^{(p)}$, $p = 1, 2, \dots$, приведены в работе Баскакова [6]. В случае, когда $l > 0$, вопрос о порядке приближения сопряженных функций операторами $\tilde{A}_{r,l}(f, x)$ достаточно прост. Если же речь идет о нахождении точных констант в главном члене уклонения, то задача поддается решению пока лишь в частных случаях.

Пусть $\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \sup_{f \in \text{Lip}_1 \alpha} \|\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)\|_{C_{2\pi}}.$

ТЕОРЕМА. При $r \rightarrow 1$ — справедливы асимптотические равенства

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right) \cos \frac{\alpha\pi}{2} (1-r)^{\alpha/l} + O(1-r), & 0 < \alpha < l \leq 1, \\ \tilde{\Delta}_\alpha(r, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} (1-r) \ln \frac{1}{1-r} + O(1-r), & 0 < \alpha < 1, \\ \tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = O(1-r), & 0 < l < \alpha < 1 \end{cases} \quad (2)$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор $\tilde{A}_{r,l}(f, x)$ в виде

$$\tilde{A}_{r,l}(f, x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l} \sin \nu t \, dt.$$

Из равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l} \sin \nu t &\equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} \sin \nu t = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N-1} (r^{\nu^l} - r^{(\nu+1)^l}) \sum_{\mu=0}^{\nu} \sin \mu t + r^{N^l} \sum_{\mu=0}^N \sin \mu t \right\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta r^{\nu^l} \frac{\cos(t/2) - \cos(\nu + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} \end{aligned}$$

следует, что

$$\tilde{A}_{r,l}(f, x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta r^{\nu^l} \frac{\cos(t/2) - \cos(\nu + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} \, dt$$

а так как

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \frac{dt}{2 \operatorname{tg}(t/2)},$$

то

$$|\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta r^{\nu^l} \frac{\cos(\nu + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} \, dt \right|. \quad (3)$$

Совершим последовательно еще два преобразования Абеля.

Поскольку

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin(\nu + 1)t}{2 \sin(t/2)},$$

то

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta r^{\nu^l} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 r^{\nu^l} \frac{\sin(\nu + 1)t}{2 \sin(t/2)},$$

а из

$$\sum_{\mu=0}^{\nu+1} \sin \mu t = \frac{\cos(t/2) - \cos(\nu + 3/2)t}{2 \sin(t/2)}$$

и равенства (3) окончательно получим

$$|\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{\cos(t/2) - \cos(\nu + 3/2)t}{8 \sin^3(t/2)} dt \right|.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{\cos(t/2) - \cos(\nu + 3/2)t}{2 \sin(t/2)} = \frac{1 - \cos(\nu + 1)t}{2 \operatorname{tg}(t/2)} + \frac{1}{2} \sin(\nu + 1)t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{1 - \cos(\nu + 1)t}{8 \sin^2(t/2) \operatorname{tg}(t/2)} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{\sin(\nu + 1)t}{8 \sin^2 t} dt \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим знаки $\Delta^3 r^{\nu^l}$ для $\nu = 0, 1, 2, \dots, 0 < l \leq 1$. Если $l = 1$, то

$$\Delta^3 r^\nu = r^\nu = 3r^{\nu+1} + 3r^{\nu+2} - r^{\nu+3} = r^\nu(1 - r)^3 > 0.$$

Пусть $0 < l < 1, \nu = 1, 2, \dots$

Так как $\Delta^3 r^{\nu^l} = \Delta^2 r^{\nu^l} - \Delta^2 r^{(\nu+1)^l}$, то введем и исследуем вспомогательную функцию $\varphi_1(x) = r^{x^l} - r^{(x+1)^l}, x \geq 1$. Для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= l \ln r \{ r^{x^l} x^{l-1} - r^{(x+1)^l} (x+1)^{l-1} \} < 0, \\ \varphi_1''(x) &= l \ln r \{ l \ln r [r^{x^l} x^{2l-2} - r^{(x+1)^l} (x+1)^{2l-2}] \\ &\quad + (l-1) [r^{x^l} x^{l-2} - r^{(x+1)^l} (x+1)^{l-2}] \} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\varphi_1(\nu)$ является выпуклой вниз для $\nu = 1, 2, \dots$ и

$$\Delta^2 \varphi_1(\nu) = \Delta^3 r^{\nu^l} = \Delta^2 r^{\nu^l} - \Delta^2 r^{(\nu+1)^l} > 0.$$

Определим знак разности $\Delta^3 r^{0^l} = 1 - 3r + 3r^{2^l} - r^{3^l}$, для чего рассмотрим функцию $\varphi_2(x) = 1 - r^{x^l}$. Для нее выполнено условие

$$\varphi_2''(x) = -l \ln r \cdot x^{l-2} r^{x^l} \{ l x^l \ln r + l - 1 \} < 0$$

при $x = 1$, т. е. знак $\Delta^3 r^{0^l}$ отличается от знака $\Delta^3 r^{\nu^l}, \nu = 1, 2, \dots, 0 < l < 1$.

Из неравенств

$$\begin{cases} r^2 \leq r^{2^l} < r, \\ r^3 \leq r^{3^l} < r, \end{cases} \quad 0 < l \leq 1,$$

следует

$$\begin{aligned} |\Delta^3 r^{0^l}| &= |1 - 3r + 3r^{2^l} - r^{3^l}| \leq |1 - 3r + 3r - r^{3^l}| \\ &< 1 - r^3 < 3(1 - r) = C(1 - r) = O(1 - r). \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $C > 0$ – постоянная, не зависящая от r , символ $O((1 - r)^\gamma)$ обозначает величины, имеющие указанный порядок при $r \rightarrow 1 -$.

Вернемся к равенству (4). Выделим и оценим слагаемые, соответствующие индексу $\nu = 0$, учитывая, что $f \in \text{Lip}_1 \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \Delta^3 r^{0^l} \frac{(1 - \cos t) dt}{8 \sin^2(t/2) \operatorname{tg}(t/2)} \right| &\leq C |\Delta^3 r^{0^l}| \int_0^{\pi/2} t^{\alpha-1} dt = O(1 - r), \\ \left| \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \Delta^3 r^{0^l} \frac{\sin t dt}{8 \sin^2(t/2)} \right| &\leq C |\Delta^3 r^{0^l}| \int_0^{\pi/2} t^{\alpha-1} dt = O(1 - r). \end{aligned}$$

В дальнейшем для упрощения вычислений будем считать, что $\Delta^3 r^{\nu^l} > 0$ для всех $\nu = 0, 1, \dots$, а равенство (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \sum_{\nu=0}^\infty \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{1 - \cos(\nu+1)t dt}{8 \sin^2(t/2) \operatorname{tg}(t/2)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \sum_{\nu=0}^\infty \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{\sin(\nu+1)t}{8 \sin^2(t/2)} dt \right| + O(1 - r). \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение

$$\int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{\sin(\nu+1)t}{8 \sin^2(t/2)} dt$$

во втором слагаемом равенства (5) соответствует (см. [7], [8]) приближению $\tilde{f}(x)$ средними Фейера $\sigma'_\nu(f, x)$. А так как для $f(x) \in \text{Lip}_1 \alpha$ выполнено асимптотическое равенство

$$\|\tilde{\sigma}'_\nu(f, x) - \tilde{f}(x)\|_{C_{2\pi}} = O(\nu^{-\alpha}), \quad \nu \rightarrow \infty,$$

то, отбрасывая его, мы пренебрегаем величиной, имеющей порядок

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{\nu=0}^\infty \Delta^3 r^{\nu^l} (\nu+1) \|\tilde{\sigma}'_\nu - \tilde{f}(x)\|_{C_{2\pi}}\right) &= O\left(\sum_{\nu=0}^\infty \Delta^3 r^{\nu^l} (\nu+1)^{1-\alpha}\right) \\ &= O\left(\sum_{\nu=0}^\infty \Delta^2 r^{\nu^l} (\nu+1)^{-\alpha}\right) = O(1 - r). \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем равенство (6). Функция $\varphi_3(x) = r^{x^l}$, $0 < l \leq 1$, выпукла вниз, так как

$$\varphi_3''(x) = r^{x^l} l \ln r \{(l-1)x^{l-2} + l \ln r \cdot x^{2l-2}\} > 0,$$

следовательно, $\Delta^2 r^{\nu^l} > 0$, $\nu = 1, 2, \dots$. Кроме того, $\Delta^2 r^{0^l} = 1 - 2r + r^{2^l} \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0$, поэтому

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 r^{\nu^l} (\nu + 1)^{-\alpha} < \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 r^{\nu^l} = \Delta r^{0^l} = 1 - r.$$

Принимая во внимание порядок остаточных членов и учитывая неравенство $|f(x + t) - f(x - t)| \leq 2^\alpha t^\alpha$, из (5) имеем

$$|\tilde{A}_{r,l}(f, x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{2^{\alpha-2}}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{1 - \cos(\nu + 1)t}{\sin^2(t/2) \operatorname{tg}(t/2)} dt + C(1 - r).$$

Для функции $\varphi_4(t) = |t|^\alpha \in \operatorname{Lip}_1 \alpha$ на $[-\pi, \pi]$ из определения $\tilde{\Delta}_l(r, \alpha)$ следует

$$\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) \geq |\tilde{A}_{r,l}(\varphi_4, 0) - \varphi_4(0)| = \frac{2^{\alpha-3}}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \frac{1 - \cos(\nu + 1)t}{\sin^2(t/2) \operatorname{tg}(t/2)} dt + C(1 - r).$$

После замены переменной окончательно установим

$$\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} \int_0^{\pi/2} \frac{t^\alpha \sin^2(\nu + 1)t \cos t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{\sin^2 t} + O(1 - r).$$

Как было показано в [8] (см. также [9]),

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t^\alpha \sin^2(\nu + 1)t dt}{\sin^2 t \operatorname{tg} t} = \frac{2^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} (\nu + 1)^{2-\alpha} + O((\nu + 1)^{1-\alpha}),$$

что с учетом равенства (6) дает

$$\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)}{\pi(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} (\nu + 1)^{2-\alpha} + O(1 - r). \quad (7)$$

Так как

$$\sum_{\mu=0}^{\nu+1} \mu^\beta = \frac{(\nu + 1)^{\beta+1}}{\beta + 1} + O((\nu + 1)^\beta), \quad \beta > -1,$$

то, совершая обратное преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^3 r^{\nu^l} (\nu + 1)^{2-\alpha} &= (2 - \alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 r^{\nu^l} (\nu + 1)^{1-\alpha} + O(1 - r) \\ &= (2 - \alpha)(1 - \alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta r^{\nu^l} (\nu + 1)^{-\alpha} + O(1 - r). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим сумму в равенстве (8). Прежде всего,

$$\begin{aligned} \Delta r^{\nu^l} &= r^{\nu^l} (1 - r^{(\nu+1)^l - \nu^l}) \\ &= (1 - r) r^{\nu^l} l \nu^{l-1} + O((1 - r)^2 r^{\nu^l} \nu^{2l-2}) + O((1 - r) r^{\nu^l} \nu^{l-2}), \end{aligned} \quad (9)$$

что легко следует из правила Лопиталья.

Пусть $0 < \alpha < l \leq 1$, тогда $\varphi_5(x) = r x^l x^{l-\alpha-1}$ монотонно убывает, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-\alpha-1} &= \int_0^{\infty} r x^l x^{l-\alpha-1} dx + O(1) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\ln(1/r) \cdot x^l} x^{l-\alpha-1} dx + O(1) \\ &= \frac{1}{l} \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\alpha/l-1} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(1-\alpha/l)-1} dt + O(1) \\ &= \frac{1}{l} \Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\alpha/l-1} + O(1). \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\alpha/l-1} = (1-r)^{\alpha/l-1} + O((1-r)^{\alpha/l}). \quad (11)$$

Суммы, соответствующие оставшимся слагаемым из равенства (9), оцениваются весьма просто. Так, для второго слагаемого имеем

$$(1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-\alpha+(l-1-\alpha)} < C(1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-1-\alpha} = O((1-r)^{\alpha/l+1}).$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$(1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-2-\alpha} < (1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{2-l+\alpha}} = O(1-r).$$

Поэтому из (7)–(9) следует, что

$$\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} l (1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-\alpha-1} + O(1-r), \quad (12)$$

что с учетом (10), (11) доказывает теорему для случая $0 < \alpha < l \leq 1$:

$$\tilde{\Delta}_l(r, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha) \left(\frac{l-\alpha}{l} \right) \cos \frac{\alpha\pi}{2} (1-r)^{\alpha/l} + O(1-r). \quad (13)$$

Как видно из (12), при $l < \alpha < 1$ в силу сходимости ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1/(\nu+1))^{1+(\alpha-l)}$ величина $\tilde{\Delta}_l(r, \alpha)$ имеет порядок $O(1-r)$.

Пусть теперь $\alpha = l < 1$, обозначим $\varepsilon = \ln(1/r)$. Так как $\varepsilon \rightarrow 0+$ при $r \rightarrow 1-$, то с учетом монотонного убывания общего члена ряда получим (см. [10, с. 13, 36])

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{\nu^l}}{\nu+1} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-\ln(1/r) \cdot \nu^l}}{\nu+1} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x^l}}{x} dx + O(1) \\ &= -\frac{\ln \varepsilon}{l} + O(1) = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{1-r} + O(1), \end{aligned}$$

где символ $O(1)$ обозначает величины, имеющие указанный порядок при $\varepsilon \rightarrow 0+$ или $r \rightarrow 1-$. Таким образом, оценка (2) доказана полностью.

Вернемся к равенству (13), положим $l = 1$, тогда из формулы Лагранжа $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin(\alpha\pi)$, $0 < \alpha < 1$, следует, что

$$\tilde{\Delta}_1(r, \alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sin(\alpha\pi/2)}(1-r)^\alpha + O(1-r).$$

В полученном равенстве остаточный член завышен в порядковом отношении по сравнению с оценкой, которую можно получить из разложения по степеням $\ln(1/r)$, приведенного в работе Баскакова [6]:

$$\tilde{\Delta}_1(r, \alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sin(\alpha\pi/2)}(1-r)^\alpha + O((1-r)^{1+\alpha}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коровкин П. П. О наилучшем приближении функций класса Z_p некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 3. С. 513–515.
- [2] Баскаков В. А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 169–180.
- [3] Малей Л. В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона // Докл. АН БССР. Сер. физ. -техн. 1961. № 3. С. 25–32.
- [4] Штарк Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Матем. заметки. 1979. Т. 13. № 1. С. 21–28.
- [5] Бугров Я. С. Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Mathematica. Cluj. 1963. V. 5(28). № 1. Р. 5–25.
- [6] Баскаков В. А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля–Пуассона // Применение функционального анализа в теории приближений. Вып. 5. Калинин: Калининский гос. ун-т, 1975. С. 14–20.
- [7] Теляковский С. А. Приближение дифференциальных функций суммами Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 426–429.
- [8] Фалалеев Л. П. О точности представления сопряженных функций суммами Чезаро // Сиб. матем. ж. 1984. Т. 25. № 4. С. 199–206.
- [9] Фалалеев Л. П. Приближение сопряженных функций суммами Чезаро // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 3. С. 451–458.
- [10] Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Институт теоретической и прикладной математики
МН-АН Республики Казахстан

Поступило
28.04.1997