Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Зенкина, Инвариант зацеплений в утолщенном торе, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 242–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:15:44

Инвариант зацеплений в утолщенном торе

М. В. Зенкина

В настоящей работе строится инвариант зацеплений двух и более компонент в утолщенном торе, зависящий от нескольких переменных. При построении используется формальная теория Кауфмана, основанная на представлении Дена группы узла. Этот инвариант является естественным обобщением полинома z , построенного Зенкиной и Мантуровым. В настоящей статье будут также рассмотрены некоторые свойства нового инварианта.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В [1] был приведен подход к построению полинома Александра посредством формальной теории узлов. Стандартное копредставление Виртингера группы узла сопоставляет дугам образующие, а перекресткам – соотношения. Аналогично, копредставление Дена сопоставляет областям плоскости проекции образующие, а перекресткам – соотношения. Эти два копредставления фундаментальной группы приводят к двум определениям полинома Александра.

Важным обобщением теории классических узлов является теория виртуальных узлов, изобретенная Кауфманом в [2]. Виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных двумерных поверхностях, рассмотренных с точностью до стабилизации/дестабилизации. На теорию виртуальных узлов были обобщены многочисленные инварианты классических узлов, см., например, [3], в том числе гомологии Хованова, а также различные модификации полинома Александра, связанные с копредставлением Виртингера, см. [4].

С другой стороны, узлы в утолщенном торе стали привлекать внимание специалистов как “двойко-периодические узлы” или “текстильные структуры”, см. работу Васильева, Мешкова, Гришанова [5], а также работы Васильева, Гришанова [6], Мортонa, Гришанова [7].

В [8] был построен инвариант z зацеплений, который является обобщением полинома Александра для узлов в утолщенном торе. При вычислении значения полинома z мы не учитывали и не использовали то, что некоторые перекрестки рассматриваемого зацепления образованы одной компонентой, а некоторые – двумя. Эти свойства перекрестков и будут лежать в основе построения инварианта z' , который является обобщением полинома z . В данной статье будут рассмотрены примеры, показывающие, что z' различает обратимые зацепления, зеркальные зацепления, а также будет приведен пример, демонстрирующий, что новый полином z' является более сильным по сравнению с z .

2. Основные построения. Мы рассматриваем ориентированные зацепления L двух и более компонент в утолщенном торе $T^2 \times I$, где I – отрезок. Каждое такое зацепление естественным образом задается своей проекцией на тор T^2 , которая в общем положении представляет собой четырехвалентный граф, каждая вершина которого снабжена структурой проход-переход, при этом два графа являются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них получается из другого стандартными движениями Рейдемейстера, см., например, [3]. Фиксируем стандартную ориентацию на T^2 .

Назовем диаграмму зацепления на T^2 *правильной*, если соответствующий граф (называемый *тенью* диаграммы) разбивает тор на двумерные клетки. Очевидно, что каждое ориентированное зацепление имеет правильный представитель, кроме того, для любых двух правильных диаграмм D_1 и D_2 , представляющих одно и то же зацепление, найдется последовательность движений Рейдемейстера, переводящая D_1 в D_2 , для которой все промежуточные диаграммы являются правильными.

Далее мы предполагаем все диаграммы правильными без дальнейших оговорок.

Каждая правильная диаграмма зацепления разбивает поверхность тора на n областей, где n – количество перекрестков диаграммы.

Выделим на торе параллель и меридиан. Без ограничения общности будем считать, что области пересекают параллель и меридиан трансверсально по конечному числу отрезков. Таким образом, эти отрезки разделяют области на подобласти. Построим разметку подобластей следующим образом. Каждой подобласти мы будем сопоставлять пару целых чисел.

В каждой области выберем произвольным образом одну подобласть и сопоставим ей пару $(0, 0)$. После этого будем действовать по следующему правилу. Если подобласти одной области граничат по меридиану, то они будут иметь одинаковый второй индекс, а первый индекс будет отличаться на единицу. При этом этот индекс будет больше у той подобласти, которая расположена справа. Аналогично, если две подобласти граничат по параллели, то второй индекс будет больше у той подобласти, которая расположена выше.

Пример диаграммы и соответствующего разбиения на подобласти изображен на рис. 1.

Рис. 1. Разметка областей

На рис. 1 имеются 2 области, разделенные на подобласти: область A делится на 4 подобласти, а область B делится на 2 подобласти.

Занумеруем компоненты диаграммы L зацепления и построим матрицу $M'(L)$ размера $n \times n$ следующим образом. Каждому перекрестку мы сопоставим строку матрицы, а каждой области – столбец. Элемент M'_{ij} выражает инцидентность i -го перекрестка и j -й области.

Если область инцидентна перекрестку с одной стороны, то правило построения инцидентности следующее. Пусть i -му перекрестку инцидентна подобласть j -й области, имеющая метки (a, b) . Тогда элемент M'_{ij} будет равен моному $x^a y^b$, умноженному на один из мономов $1, t_l, -1, -t_l$, где l – номер компоненты, которая образует переход в данном перекрестке. В i -м перекрестке выберем дугу, образующую переход (проходящую сверху) и ориентированную вверх. Сопоставим подобластям *локальные метки* по следующему правилу. Области, находящейся справа сверху от этой дуги, образующей переход, мы сопоставим локальную метку $+1$, после чего трем остальным подобластям мы сопоставим локальные метки $-1, t_l, -t_l$ в порядке по часовой стрелке. Отметим, что для задания локальных меток нам неважно, в каком направлении ориентирована дуга, проходящая через i -й перекресток и образующая в нем проход, см. рис. 2.

Рис. 2. Правило построения локальных меток

После этого элемент M'_{ij} равен моному $x^a y^b$, умноженному на локальную метку (в случае если лишь одна подобласть j -й области инцидентна i -му перекрестку); если таких подобластей несколько, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным подобластям.

Мы получили матрицу M' , зависящую от диаграммы L . Пусть $z'(L) = \det(M'(L))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы могли сопоставлять подобластям локальные метки также по следующему правилу. В i -м перекрестке выберем дугу, образующую проход и ориентированную вверх, и рассмотрим конец этой дуги. Области, находящейся справа от конца дуги, образующей проход, мы сопоставим локальную метку $+1$, после чего трем остальным подобластям мы сопоставим локальные метки $-1, t_k, -t_k$ в порядке по часовой стрелке, где k – номер компоненты, образующей проход в данном перекрестке. Отметим, что для задания локальных меток в этом случае нам неважно, в каком направлении ориентирована дуга, образующая в i -й перекрестке проход, см. рис. 3.

Рис. 3. Правило построения локальных меток (второй способ)

Центральным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если две диаграммы L и L' зацеплений из m компонент эквивалентны в классе правильных диаграмм, то*

$$z'(L) = \pm z'(L') \cdot t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_m^{\alpha_m} x^\beta y^\gamma$$

для некоторых целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta, \gamma$.

3. Доказательство основной теоремы. Заметим сначала, что произвол в нумерации перекрестков и областей, а также в выборе “начальной” подобласти в каждой области приводит к умножению определителя на $\pm x^\beta y^\gamma$ для некоторых целых β и γ . Таким образом, мы можем нумеровать перекрестки и области и отмечать начальные подобласти произвольным образом.

Так как на торе выделены меридиан и параллель, то помимо движений Рейдемейстера нужно проверить инвариантность также относительно движений, при которых один из перекрестков проходит через меридиан (параллель). При согласованной разметке подобластей строка, соответствующая перекрестку (а вместе с ней и определитель), умножается на $x^{\pm 1}$ (соответственно $y^{\pm 1}$), см. [8].

Для доказательства теоремы проверим инвариантность относительно движений Рейдемейстера. Как обговаривалось раньше, мы будем работать только с правильными диаграммами.

Как известно (см., например, [9]), для установления эквивалентности двух диаграмм достаточно использовать лишь одну версию третьего движения Рейдемейстера, а также все версии первого и второго движений Рейдемейстера.

Инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера очевидна и доказывается аналогично тому, как это было сделано в [8].

Имеется четыре типа вторых движений Рейдемейстера – два “сонаправленных” (одно из них изображено на рис. 4) и два “противонаправленных” (одно из них изображено на рис. 5).

Отметим, что все элементы соответствующих матриц зависят только от ориентации дуг, образующих переход. Инвариантность относительно всех случаев второго движения Рейдемейстера рассматривать также не будем, так как доказательство полностью аналогично доказательству для полинома z (см. [8]).

Рис. 4. Второе движение Рейдемейстера: первый случай

Рис. 5. Второе движение Рейдемейстера: второй случай

Рис. 6. Третье движение Рейдемейстера

Рассмотрим третье движение Рейдемейстера, изображенное на рис. 6.

На диаграммах L и L' мы имеем три перекрестка и 7 областей. Будем считать, что все подобласти этих областей на обеих диаграммах, примыкающие к трем пере-

кресткам, имеют метки $(0, 0)$. Мы получаем следующие матрицы:

$$M'(L) = \begin{pmatrix} t_l & -t_l & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_l & -t_l & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & t_k & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix},$$

$$M'(L') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_l & 1 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_k & -t_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}.$$

У обеих матриц в седьмом столбце стоят нули, начиная с четвертой строки; все строки этих матриц устроены одинаково, за исключением первых трех строк.

Проведем следующие операции с двумя матрицами, каждая из которых либо не меняет определителя, либо умножает его на $\pm t_i^{\pm 1}$, где $i = 1, \dots, m$.

В обеих матрицах прибавим первую строку ко второй:

$$\begin{pmatrix} t_l & -t_l & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & t_k & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_l & 1 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_k & -t_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В матрице (1) прибавим к шестому столбцу седьмой столбец, а в матрице (2) прибавим к третьему столбцу седьмой. В итоге получим две матрицы:

$$\begin{pmatrix} t_l & -t_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_k & -t_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}.$$

Теперь в обеих матрицах прибавим второй столбец к первому. Элементы первого столбца, начиная с четвертой строки, изменяются, но мы совершаем одно и то же действие с обеими матрицами, следовательно, эти элементы остаются одинаковыми, что дает нам право использовать символ $*$ в первом столбце:

$$\begin{pmatrix} 0 & -t_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В матрице (3) седьмой столбец умножим на t_l и прибавим ко второму столбцу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_l \cdot t_k & 0 & 1 & -1 & 0 & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Теперь в матрицах (4) и (5) прибавим пятый столбец к четвертому. В этом случае мы так же, как и выше, имеем право ставить $*$ в четвертом столбце, начиная с четвертой строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_l \cdot t_k & 0 & 0 & -1 & 0 & -t_k & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}.$$

В матрице (6) умножим седьмой столбец на $-t_k$ и прибавим ко второму:

$$\begin{pmatrix} 0 & -t_l \cdot t_k & 0 & 0 & -1 & 0 & t_l & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В матрице (7) седьмой столбец умножим на -1 , а затем переставим первую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_l & 0 & -t_l & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_l \cdot t_k & 0 & 0 & -1 & 0 & -t_l & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & & * & \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Разлагая матрицы (5) и (8) по первой строке, получаем, что определители равны.

4. Свойства инварианта z' . Инвариант z' выделяет классические зацепления. Действительно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Если L – диаграмма классического зацепления в утолщенном торе, то $z'(L) = 0$.

Рис. 7. Правильная диаграмма классического зацепления

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У каждой диаграммы L классического зацепления существует *правильная* диаграмма, которая получается добавлением четырех перекрестков, см. рис. 7.

Рассмотрим четыре строки, соответствующие перекресткам 1, 2, 3, 4. Без ограничения общности можно считать, что в этих перекрестках переходы образует компонента 1. Таким образом, получим следующую подматрицу матрицы $M'(L)$:

$$\begin{pmatrix} t_1x & 1 & -t_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -t_1 & -1 & t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -t_1y & 0 & 0 & 0 & -1 & t_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя ко второй строке первую, а к четвертой – третью, мы получим

$$\begin{pmatrix} t_1x & 1 & -t_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1x - t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 - t_1y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем две строки (вторую и четвертую), в каждой из которых ненулевые элементы стоят только в первом столбце. Разлагая определитель по первому столбцу, мы видим, что он равен нулю.

ПРИМЕР 1. Если поменять ориентацию у каждой компоненты на противоположную, то мы получим, вообще говоря, другое значение полинома z' . Рассмотрим диаграмму L зацепления в утолщенном торе и диаграмму L' зацепления, полученную из L заменой ориентации, см. рис. 8.

Рис. 8. Диаграммы L и L' зацеплений

Найдем значение полинома z' для диаграмм L и L' . Для этого запишем матрицы, соответствующие этим диаграммам:

$$M'(L) = \begin{pmatrix} -xy - t_1x & t_1x & 0 & 1 \\ 1 + t_1x & 0 & -t_1 & -1 \\ 1 + t_2xy & 0 & -y & -t_2 \\ -y - t_1 & 1 & t_1y & 0 \end{pmatrix},$$

$$M'(L') = \begin{pmatrix} -x - t_1xy & x & 0 & t_1 \\ x + t_1 & 0 & -1 & -t_1 \\ xy + t_2 & 0 & -t_2y & -1 \\ -1 - t_1y & t_1 & y & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим определители полученных матриц:

$$\det(M'(L)) = z'(L) = t_1 - t_1^2 t_2 x + t_1^3 t_2 x - y - t_1^3 t_2 x^2 y + xy^2 - t_1 xy^2 + t_1^2 t_2 x^2 y^2,$$

$$\det(M'(L')) = z'(L') = t_1^2 t_2 + x - t_1 x - t_1^3 t_2 y - x^2 y - t_1^2 t_2 xy^2 + t_1^3 t_2 xy^2 + t_1 x^2 y^2.$$

Видим, что $z'(L)$ нельзя представить в виде $z'(L) = \pm z'(L') \cdot t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} x^\beta y^\gamma$ для некоторых целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$, и наоборот. Значит, полином z' различает эти зацепления с противоположной ориентацией.

ПРИМЕР 2. Построенный инвариант, вообще говоря, различает зеркальные зацепления, т.е. при замене каждого перехода на проход, а прохода на переход значение полинома z' , вообще говоря, меняется. Покажем это на примере диаграммы L зацепления, рассмотренного выше (рис. 9).

Для диаграммы L' получим следующие матрицу и определитель:

$$M'(L') = \begin{pmatrix} xy + t_1x & -x & 0 & -t_1 \\ -1 - t_2x & 0 & 1 & t_2 \\ -t_1 - xy & 0 & y & t_1 \\ y + t_1 & -t_1 & -y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(M'(L')) = z'(L') = t_1^3 + t_1^2 x - t_1^3 x - t_1^2 y - t_1 t_2 x^2 y - t_2 xy^2 + t_1 t_2 xy^2 + t_2 x^2 y^2.$$

Рис. 9. Диаграммы L зацепления и L' зеркального зацепления

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в примере 1, делаем вывод о том, что определители различны, и полином z' чувствует зеркальность зацеплений.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим диаграммы L_1 и L_2 двух различных зацеплений, состоящих из двух компонент, изображенных на рис. 10.

Рис. 10. Диаграммы L_1 и L_2 зацеплений из двух компонент

Вычислим значение полинома z для этих диаграмм (см. [8]). Для этого запишем матрицы, соответствующие L_1 и L_2 :

$$M(L_1) = \begin{pmatrix} txy - tx & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 - tx & 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -1 & t & -t \\ txy & -y & 1 & -t & 0 \\ 1 - y & ty & -t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M(L_2) = \begin{pmatrix} txy - tx & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 - tx & 1 & 0 & 0 & t \\ -1 & 0 & t & -t & 1 \\ -txy & ty & -1 & 1 & 0 \\ 1 - y & ty & -t & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Найдем определители матриц (9) и (10):

$$\begin{aligned} \det(M(L_1)) = z(L_1) &= -1 + t - t^2x + y - ty + 2t^2y - t^3y - t^2xy + 2t^3xy \\ &\quad - t^4xy + t^5xy - t^3y^2 + t^4xy^2 - t^5xy^2, \\ \det(M(L_2)) = z(L_2) &= -1 + t - t^2x + y - ty + 2t^2y - t^3y - t^2xy + 2t^3xy \\ &\quad - t^4xy + t^5xy - t^3y^2 + t^4xy^2 - t^5xy^2. \end{aligned}$$

Таким образом, полином z не различает данные зацепления.

Вычислим теперь значение полинома z' для тех же диаграмм. Получим следующие матрицы и определители:

$$\begin{aligned} M'(L_1) &= \begin{pmatrix} x - t_1xy & 0 & 0 & t_1 & -1 \\ 1 + t_1x & -t_1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t_1 & -t_1 & 1 \\ -t_1xy & t_1y & -1 & 1 & 0 \\ -1 + t_1y & -t_1y & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M'(L_2) &= \begin{pmatrix} x - t_1xy & 0 & 0 & t_1 & -1 \\ 1 + t_1x & -t_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & t_2 & -t_2 \\ t_2xy & -y & 1 & -t_2 & 0 \\ -1 + t_1y & -t_1y & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(M'(L_1)) &= z'(L_1) \\ &= -t_1 + t_1^2 + t_1x + t_1^2y - 2t_1^3y - 2t_1^2xy + t_1^3xy + t_1^4y^2 + t_1^3xy^2 - t_1^4xy^2, \\ \det(M'(L_2)) &= z'(L_2) \\ &= -t_1t_2 + t_1^2t_2 + t_1t_2^2x - t_1^2y + t_2y - t_1t_2y + t_1^2t_2y - t_1^3t_2y - t_2xy \\ &\quad + t_1t_2xy - t_1^2t_2xy + t_1^3t_2xy - t_1t_2^2xy + t_1^2y^2 + t_1t_2xy^2 - t_1^2t_2xy^2. \end{aligned}$$

Таким образом, полином z не различает рассмотренные зацепления, а полином z' различает, т.е. построенный в данной статье инвариант z' зацеплений является более сильным по сравнению с инвариантом z , построенным в [8].

Автор выражает благодарность В. О. Мантурову за идею инварианта, построенного в настоящей статье, и за многие полезные замечания при подготовке настоящего текста, а также Д. П. Ильютко и И. М. Никонову за ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. H. Kauffman, *Formal Knot Theory*, Mathematical Notes, **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [2] L. H. Kauffman, "Virtual knot theory", *European J. Combin.*, **20**:7 (1999), 663–690.

- [3] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, М.–Ижевск, 2005.
- [4] В. О. Мантуров, “О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений”, Тр. ММО, **65**, № 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 2004, 175–190.
- [5] S. A. Grishanov, V. R. Meshkov, V. A. Vassiliev, “Recognizing textile structures by finite type knot invariants”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:2 (2009), 209–235.
- [6] S. A. Grishanov, V. A. Vassiliev, “Invariants of links in 3-manifolds and splitting problem of textile structures”, *J. Knot Theory Ramifications* (to appear).
- [7] H. R. Morton, S. Grishanov, “Doubly periodic textile patterns”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:12 (2009), 1597–1622.
- [8] М. В. Зенкина, В. О. Мантуров, “Инвариант зацеплений в утолщенном торе”, *Геометрия и топология*. 11, Зап. научн. сем. ПОМИ, **372**, ПОМИ, СПб., 2009, 5–18.
- [9] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants. A Study of Knots, 3-Manifolds, and Their Sets*, Ser. Knots Everything, **29**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

М. В. Зенкина

Московский педагогический государственный университет

E-mail: zenkina-m@mail.ru

Поступило

30.03.2010

Исправленный вариант

09.10.2010