Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Об одном примере последовательности коэффициентов двойного тригонометрического ряда, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 45–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:14:22

Об одном примере последовательности коэффициентов двойного тригонометрического ряда

М. И. Дьяченко

В статье построен пример двойной последовательности a неотрицательных чисел, которые монотонно убывают к нулю по первому индексу при любом фиксированном значении второго, и две лакунарные по Адамару последовательности натуральных чисел, такие, что двойной тригонометрический лакунарно-монотонный ряд с коэффициентами a , построенный по первой лакунарной последовательности, почти всюду расходится по квадратам, а по второй – почти всюду сходится по квадратам.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В работах [1] и [2] автором и С. Ю. Тихоновым был введен в рассмотрение класс двойных тригонометрических рядов с лакунарно-монотонными коэффициентами. Приведем соответствующее определение. Предварительно напомним, что возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *лакунарной по Адамару*, если

$$\inf_{k \geq 1} \frac{m_{k+1}}{m_k} > 1.$$

Через T всюду ниже будет обозначаться отрезок $[-\pi, \pi]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что двойной тригонометрический ряд является *рядом с лакунарно-монотонными коэффициентами*, если он имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos m_k y,$$

где при любом фиксированном $k \geq 1$ числа $a_{n,k} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ лакунарна по Адамару, а

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00175) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3252.2010.1).

Основной целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. *Существует двойная последовательность $\{a_{n,k}\}_{n=0,k=1}^{\infty,\infty}$ такая, что при любом фиксированном $k \geq 1$ числа $a_{n,k} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и две лакунарные по Адамару последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos m_k y$$

почти всюду на T^2 расходится по квадратам, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos \mu_k y$$

почти всюду на T^2 сходится по квадратам.

Из данного результата вытекает важное следствие. Как известно, в одномерном случае из сходимости (или даже суммируемости некоторым методом достаточно общего вида) лакунарного ряда вытекает, что сумма квадратов его коэффициентов сходится. Разумеется, верно и обратное: если коэффициенты лакунарного ряда принадлежат пространству l_2 , то он сходится почти всюду. Пример, который будет построен при доказательстве теоремы, показывает, что данный результат напрямую не переносится на сходимость по квадратам двойных тригонометрических рядов с лакунарно-монотонными коэффициентами. Точнее, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos m_k y$$

в теореме будет таким, что если

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx$$

при $k = 1, 2, \dots$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(x) < \infty$$

при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$. Вопрос о нахождении неусиливаемого в своих терминах условия для двойного ряда с лакунарно-монотонными коэффициентами, достаточного для его сходимости почти всюду по квадратам (или по Прингсхейму) остается пока открытым. Возможно, что это условие имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{n=0}^N a_{n,k} \lambda_n \cos nx \right|^2 < \infty$$

при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

2. Вспомогательные утверждения. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ТЕОРЕМА А (Белов, [3]). *Для любых чисел $\alpha \in (0, 1)$ и $\Delta \in (0, \pi)$ коэффициенты Фурье четной функции*

$$f(x) = f_{\alpha, \Delta}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} - \Delta^{-\alpha} & \text{при } x \in (0, \Delta), \\ 0 & \text{при } x \in [\Delta, \pi] \end{cases}$$

монотонно не возрастают.

ЛЕММА 1. *Пусть две монотонно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{r_p\}_{p=1}^{\infty}$ и $\{s_p\}_{p=1}^{\infty}$ таковы, что $2r_p < s_p < r_{p+1}$ при всех p и $s_p > 2^p$. Тогда*

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} s_p^{-1/4} \left| \sum_{l=r_p}^{s_p} \cos 2^l y \right| = \infty$$

почти всюду на T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \cos 2^l y, \quad (1)$$

где

$$\alpha_l = \begin{cases} s_p^{-1/2} & \text{при } r_p \leq l \leq s_p, p = 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=r_p}^{s_p} \frac{1}{s_p} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=[s_p/2]}^{s_p} \frac{1}{s_p} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty,$$

откуда по теореме Зигмунда (см. [4; с. 684]) ряд (1) не может суммироваться к конечной сумме на множестве положительной меры каким-либо T^* -методом. В частности, почти всюду расходится последовательность

$$S_q = \sum_{l=1}^{s_q} \alpha_l \cos 2^l y = \sum_{p=1}^q s_p^{-1/2} \sum_{l=r_p}^{s_p} \cos 2^l y \equiv \sum_{p=1}^q s_p^{-1/2} Q_p(y).$$

В то же время, если утверждение леммы неверно, то найдется такое множество $E \subset T$ с $\mu(E) > 0$, что для любого $y \in E$ существует $C = C(y)$, для которого $|Q_p(y)| s_p^{-1/4} \leq C$ при $p = 1, 2, \dots$. Но в этом случае для каждого $y \in E$ имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} s_p^{-1/2} |Q_p(y)| \leq C \sum_{p=1}^{\infty} s_p^{-1/4} \leq C \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p/4} < \infty,$$

что противоречит расходимости последовательности S_q . Тем самым, лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Возьмем $r_1 = 1$ и натуральное $s_1 > 2$. Положим $\delta_1 = 1/(2^{s_1} + 1)$, а $\alpha_1 \in (0, 1)$ выберем так, что

$$\int_T f_{\alpha_1, \delta_1}(x) dx = 2 \int_0^{\delta_1} f_{\alpha_1, \delta_1}(x) dx = 1,$$

где функция $f_{\alpha_1, \delta_1}(x)$ была определена в теореме A. Отметим, что существование такого α_1 вытекает из того, что при любых $\alpha, \delta \in (0, 1)$ имеем

$$I(\alpha, \delta) \equiv \int_0^\delta f_{\alpha, \delta}(x) dx = \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha} = \frac{\alpha \delta^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

а потому при любом фиксированном $\delta \in (0, 1)$ величина $I(\alpha, \delta) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +0$ и $I(\alpha, \delta) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow -1$.

Используя равномерную сходимость ряда Фурье функции $f_{\alpha_1, \delta_1}(x)$ на отрезке $[\delta_1, \pi]$, подберем $r_2 > s_1 + 1$ так, чтобы частичные суммы ряда Фурье $|S_\nu(f_{\alpha_1, \delta_1}; t)| \leq 1/s_1^2$ при $\nu \geq 2^{r_2}$ и $|t| \in [\delta_1, \pi]$, и фиксируем $s_2 > 2r_2$. Заметим, что

$$s_2 > 2r_2 > 2s_1 > 4.$$

Далее, полагаем $\delta_2 = 1/(2^{s_2} + 1)$ и подберем $\alpha_2 \in (0, 1)$ так, чтобы

$$\int_T f_{\alpha_2, \delta_2}(x) dx = 1.$$

Теперь, если уже выбраны числа $\{r_i\}_{i=1}^N$, $\{s_i\}_{i=1}^N$, $\{\delta_i\}_{i=1}^N$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ такие, что

- 1) $r_i > s_{i-1} + 1 > i$ при $i = 2, \dots, N$;
- 2) $s_i > 2r_i > 2^i$ при $i = 1, \dots, N$;
- 3) $\delta_i = 1/(2^{s_i} + 1)$ при $i = 1, \dots, N$;
- 4) $\alpha_i \in (0, 1)$ при $i = 1, \dots, N$;
- 5) $\int_T f_{\alpha_i, \delta_i}(x) dx = 1$ при $i = 1, \dots, N$;
- 6) $|S_\nu(f_{\alpha_{i-1}, \delta_{i-1}}; t)| \leq 1/s_{i-1}^2$ при $\nu \geq 2^{r_i}$, $|t| \in [\delta_{i-1}, \pi]$ и $i = 2, \dots, N$,

то возьмем $r_{N+1} > s_N + 1 > N + 1$ таким, чтобы свойство 6) выполнялось для $i = N + 1$. Затем фиксируем $s_{N+1} > 2r_{N+1}$, положим $\delta_{N+1} = 1/(2^{s_{N+1}} + 1)$ и выберем $\alpha_{N+1} \in (0, 1)$ так, чтобы

$$\int_T f_{\alpha_{N+1}, \delta_{N+1}}(x) dx = 1.$$

Отметим, что по построению

$$s_{N+1} > 2r_{N+1} > 2s_N > 2^{N+1}.$$

Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{r_i\}_{i=1}^\infty$, $\{s_i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющие свойствам 1)–6).

Определим двойную последовательность

$$a_{n,k} = \begin{cases} a_n(f_{\alpha_i, \delta_i}) & \text{при } k \in [r_i, s_i], i = 1, 2, \dots \text{ и } n = 0, 1, \dots; \\ 0 & \text{при остальных } n \text{ и } k, \end{cases}$$

где через $a_n(f)$ обозначен соответствующий косинус-коэффициент функции $f(x)$. Рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^k y. \quad (2)$$

Ясно, что так как любой одномерный ряд с коэффициентами, монотонно стремящимися к нулю, сходится при $x \neq 0 \bmod 2\pi$, для доказательства расходимости по квадратам ряда (2) в некоторой точке (x, y) с $x \neq 0 \bmod 2\pi$ достаточно установить, что при некотором k_0 ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^k y \quad (3)$$

расходится по квадратам.

Пусть $\gamma \in (0, 1)$. Выберем натуральное k_0 так, чтобы $\delta_{k_0} < \gamma$. Теперь для любого $i > k_0$ рассмотрим разность квадратичных частичных сумм ряда (3)

$$\begin{aligned} P_i(x, y) &= S_{2^{s_i+1}, 2^{s_i+1}}(x, y) - S_{2^{s_i}, 2^{s_i}}(x, y) \\ &= \sum_{k=k_0}^{i-1} a_{2^{s_i+1}}(f_{\alpha_k, \delta_k}) \cos((2^{s_i} + 1)x) \sum_{\nu=r_k}^{s_k} \cos 2^\nu y \\ &\quad + a_{2^{s_i+1}}(f_{\alpha_i, \delta_i}) \cos((2^{s_i} + 1)x) \sum_{\nu=r_i}^{s_i} \cos 2^\nu y \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя свойства 6) и 2) построенных последовательностей, получим, что при $|x| \in [\gamma, \pi]$

$$|A_1| \leq \sum_{k=k_0}^{i-1} s_k |S_{2^{s_i+1}}(f_{\alpha_k, \delta_k}; x) - S_{2^{s_i}}(f_{\alpha_k, \delta_k}; x)| \leq \sum_{k=k_0}^{i-1} \frac{2}{s_k^2} s_k \leq \sum_{k=1}^{i-1} \frac{2}{s_k} \leq \sum_{k=1}^{i-1} \frac{2}{2^k} < 2. \quad (5)$$

В то же время, согласно свойствам 3) и 5)

$$a_{2^{s_i+1}}(f_{\alpha_i, \delta_i}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_i} \cos(2^{s_i} + 1)x f_{\alpha_i, \delta_i}(x) dx \geq \frac{2 \cos 1}{\pi} \int_0^{\delta_i} f_{\alpha_i, \delta_i}(x) dx = \frac{\cos 1}{\pi}. \quad (6)$$

Рассмотрим при $i \geq k_0$ множества

$$E_i = \{(x, y) \in T^2 : |x| \in [\gamma, \pi], |\cos(2^{s_i} + 1)x| \leq s_i^{-1/4}\}.$$

Пусть

$$E = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i.$$

Тогда для любого $k \geq k_0$ мера

$$\mu(E) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(E_i) \leq C \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{s_i^{1/4}} \leq C \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i/4} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Поэтому $\mu(E) = 0$. Если же $|x| \in [\gamma, \pi]$ и $x \notin E$, то по лемме 1 для почти всех $y \in T$ имеем (см. (6))

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |A_2| \geq \frac{\cos 1}{\pi} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{s_i^{1/4}} \left| \sum_{\nu=r_i}^{s_i} \cos 2^\nu y \right| = \infty,$$

что вместе с формулами (4) и (5) доказывает, что ряд (3) почти всюду расходится по квадратам на множестве $\{x \in T : |x| \geq \gamma\} \times T$. В силу произвольности $\gamma \in (0, 1)$ отсюда вытекает, что ряд (3) (а следовательно, и ряд (2)) почти всюду расходится по квадратам на множестве T^2 .

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+\nu_k} y, \quad (7)$$

где $\nu_k = l_j$ при $r_j \leq k < r_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, а монотонно возрастающая последовательность l_j такова, что $|S_q(f_{\alpha_j, \delta_j}; t)| < s_j^{-2}$ при $q \geq 2^{r_j+l_j}$ и $|t| \in [\delta_j, \pi]$. Например, можно взять при всех j числа $l_j = r_{j+1} - r_j$. При этом

$$l_j > s_j - r_j > r_j > r_j - r_{j-1} = l_{j-1}$$

при $j \geq 2$. Проверим, что ряд (7) сходится в каждой точке множества $F = \{(x, y) \in T^2 : x \neq 0\}$.

Действительно, если $(x, y) \in T^2$, то найдется такое j_0 , что $|x| > \delta_{j_0}$. Пусть, для определенности, $x \in (\delta_{j_0}, \pi]$. Так же, как и при доказательстве расходимости ряда (2), достаточно проверить, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=r_{j_0}}^{\infty} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+\nu_k} y \quad (8)$$

почти всюду сходится по квадратам.

Определим для произвольного $q \geq 2^{r_{j_0}+1+l_{j_0}+1}$ числа

$$j(q) = \max\{j : 2^{s_j+l_j} \leq q\},$$

$$m(q) = \begin{cases} r_{j(q)+1} - 1, & \text{если } 2^{r_{j(q)+1}+l_{j(q)+1}} > q; \\ \max\{k : 2^{k+l_{j(q)+1}} \leq q\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим при $q_1 > q_2 \geq 2^{r_{j_0}+1+l_{j_0}+1}$ разность (здесь и ниже, если в сумме верхний предел меньше нижнего, считаем ее равной нулю)

$$\begin{aligned} S_{q_1, q_1}(x, y) - S_{q_2, q_2}(x, y) &= \sum_{j=j_0}^{j(q_2)} \sum_{k=r_j}^{s_j} \sum_{n=q_2+1}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+l_j} y \\ &\quad + \sum_{k=r_{j(q_2)+1}}^{m(q_2)} \sum_{n=q_2+1}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+l_{j(q_2)+1}} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=m(q_2)+1}^{s_{j(q_2)+1}} \sum_{n=0}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+l_{j(q_2)+1}} y \\
& + \sum_{j=j(q_2)+2}^{j(q_1)} \sum_{k=r_j}^{s_j} \sum_{n=0}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+l_j} y \\
& + \sum_{k=r_{j(q_1)+1}}^{m(q_1)} \sum_{n=0}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \cos 2^{k+l_{j(q_1)+1}} y \\
& = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если сумма $B_5 \neq 0$, то $q_1 \geq 2^{r_{j(q_1)+1}+l_{j(q_1)+1}}$. Поскольку

$$|B_5| \leq s_{j(q_1)+1} \cdot |S_{q_1}(f_{\alpha_{j(q_1)+1}, \delta_{j(q_1)+1}}; x)|$$

и $x \geq \delta_{j_0} \geq \delta_{j(q_1)+1}$, согласно выбору чисел l_j получаем, что

$$|B_5| \leq \frac{1}{s_{j(q_1)+1}}. \tag{10}$$

Если же $B_5 = 0$, то оценка (10) тем более верна. Аналогично,

$$|B_4| \leq \sum_{j=j(q_2)+2}^{j(q_1)} s_j \left| \sum_{n=0}^{q_1} a_{n,k} \lambda_n \cos nx \right| \leq \sum_{j=j(q_2)+2}^{j(q_1)} s_j \cdot \frac{1}{s_j^2} \leq \sum_{j=j(q_2)+2}^{j(q_1)} \frac{1}{s_j} \leq \frac{2}{s_{j(q_2)+2}}, \tag{11}$$

$$|B_3| \leq \frac{1}{s_{j(q_2)+1}}. \tag{12}$$

Затем, если $B_2 \neq 0$, то $q_2 \geq 2^{r_{j(q_2)+1}+l_{j(q_2)+1}}$ и

$$|B_2| \leq 2 \max_{q \geq q_2} |S_q(f_{\alpha_{j(q_2)+1}, \delta_{j(q_2)+1}}; x)| \cdot s_{j(q_2)+1} < \frac{2}{s_{j(q_2)+1}}. \tag{13}$$

Тем более оценка (13) выполнена в случае, когда $B_2 = 0$.

Наконец, при любом $j' \in [j_0, j(q_2)]$ имеем

$$\begin{aligned}
|B_1| & \leq \sum_{j=j_0}^{j'} s_j |S_{q_1}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x) - S_{q_2}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x)| + \sum_{j=j'+1}^{j(q_2)} s_j \cdot \frac{2}{s_j^2} \\
& \leq \sum_{j=j_0}^{j'} s_j |S_{q_1}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x) - S_{q_2}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x)| + \frac{4}{s_{j'+1}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь, если задано $\varepsilon > 0$, то фиксируем j' так, чтобы $8/s_{j'} < \varepsilon/2$. Затем подберем Q так, чтобы $j(Q) > j'$ и

$$|S_{q''}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x) - S_{q'}(f_{\alpha_j, \delta_j}; x)| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \left(\sum_{j=j_0}^{j'} s_j \right)^{-1} \tag{15}$$

при любых $q'' > q' \geq Q$ и $j = j_0, \dots, j'$. Из формул (9)–(15) следует, что при любых $q_1 > q_2 \geq \max(Q, 2^{r_{j_0+1}+l_{j_0+1}})$ имеем $|S_{q_1, q_1}(x, y) - S_{q_2, q_2}(x, y)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. И. Дьяченко, С. Ю. Тихонов, “Двойные тригонометрические ряды с лакунарно-монотонными коэффициентами”, *Материалы Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”*, Тула, 2009, 37–39.
- [2] М. И. Дьяченко, С. Ю. Тихонов, “Гладкость двойных тригонометрических рядов с лакунарно-монотонными коэффициентами”, *Тезисы докладов 15-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”*, Саратов, 2010, 72–73.
- [3] А. С. Белов, “О нулях суммы тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 1989, № 12, 3–8.
- [4] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

М. И. Дьяченко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dyach@mail.ru

Поступило

12.03.2010