Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, О достаточности семейства полиэдральных поверхностей в методе модулей и устранимые множества, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 216–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 08:36:11

О достаточности семейства полиэдральных поверхностей в методе модулей и устранимые множества

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

Установлена достаточность семейства полиэдральных поверхностей при вычислении модуля семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора в открытом множестве. Также установлены некоторые геометрические свойства множеств, устранимых для этого модуля.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Цимер в [1] установил соотношение между модулем семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора, и конформной емкостью конденсатора. Затем оно было распространено на случай p -емкости и (p, w) -емкости в [2], [3] в ситуации, когда отделяющие поверхности не пересекают предписанного множества. Как оказалось, такие емкости возникают при описании устранимых множеств для гармонических функций из классов $L_p^1(G)$, $L_{p,w}^1(G)$ (см. [4], [5]). Недавно Асеев [6] показал, что при вычислении конформного модуля семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора, можно ограничиться рассмотрением ломаных из этого семейства.

Ниже будет показано, что при вычислении модуля семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора, эти поверхности могут быть заменены на отделяющие полиэдральные поверхности. Данный результат затем применяется при описании устранимых множеств для модулей семейств поверхностей.

2. Предварительные сведения. Далее G – открытое ограниченное множество в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{H}_k$ – k -мерные меры Лебега и Хаусдорфа соответственно; A_p – класс локально интегрируемых в G функций $w: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [7]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q} \, dx \right)^{p-1} < \infty, \quad (1)$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$, а числа $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-000 28), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2810-2008.1) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-013).

Пусть $L^{p,w}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – класс функций $f: D \rightarrow [-\infty, \infty]$, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_D |f|^p w dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_+^{p,w}(D)$ обозначим класс функций $\rho: D \rightarrow [0, \infty]$ из $L^{p,w}(D)$, которые являются борелевскими.

Пусть $B(x, r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$. Определим

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

для локально интегрируемой функции f в $\mathbb{R}^n$, где $|B(x, r)| = \mathcal{L}_n(B(x, r))$. Известно (см. [8; теорема 5.1.1]), что

$$\|Mf\|_{p,w} \leq \text{const} \|f\|_{p,w}. \quad (2)$$

Пусть $d(E, F)$, $d(E)$ – соответственно евклидово расстояние между множествами E и F и евклидов диаметр множества E для $E, F \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{E}$ – замыкание множества E в $\mathbb{R}^n$, ∂E – граница множества E .

Рассмотрим для $w \in A_p$ пространство $L_{p,w}^1(G)$ функций $u: G \rightarrow (-\infty, \infty)$, локально интегрируемых в G , имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что $\int_G |\nabla u|^p w dx < \infty$.

Пусть E – ограниченное замкнутое относительно $\mathbb{R}^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, ни одна компонента связности которого не имеет предельных точек на $F_0 \cup F_1$. Под конденсатором будем понимать набор $(F_0, F_1, G/E)$, где $F_0, F_1 \subset \bar{G}$ – непустые непесекающиеся компакты. Определим (p, w) -емкость данного конденсатора с весом $w \in A_p$:

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = \inf \int_G |\nabla u|^p w dx,$$

где инфимум берется по всем функциям u таким, что $u = j$ в некоторой окрестности F_j , $j = 0, 1$, $u|_G \in C^\infty(G) \cap L_{p,w}^1(G)$, u постоянна в некоторой окрестности каждой компоненты связности множества E . Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\text{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$.

Выпуклую оболочку $n+1$ точек, не лежащих в одной $(n-1)$ -мерной плоскости, назовем n -мерным симплексом. Полиэдром будем называть объединение конечного числа симплексов. Границу полиэдра или ее часть будем называть *полиэдральной поверхностью*.

Компакт σ , расположенный в $\mathbb{R}^n \setminus E$, назовем *поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в $\mathbb{R}^n/E$* , если

$$\mathbb{R}^n \setminus \sigma = A \cup B, \quad F_0 \subset A, \quad F_1 \subset B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$. Если при этом σ является границей полиэдра, то семейство всех таких полиэдральных поверхностей обозначим как $\Sigma_0(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$.

Если $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$, то $\sigma \cap G$ назовем *поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в G/E* . Семейство всех таких поверхностей обозначим $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Аналогично определим семейство полиэдральных поверхностей $\Sigma_0(F_0, F_1, G/E)$.

Положим $\tilde{w} = w^{1-q}$ при $w \in A_p$. Определим *модуль* семейства борелевских множеств Σ из G :

$$M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = \inf \int_G \rho^q w^{1-q} dx,$$

где инфимум берется по функциям $\rho \in L_+^{q,\tilde{w}}(G)$, для которых $\int_\sigma \rho d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1$ для любой $\sigma \in \Sigma$. Класс таких допустимых функций будем обозначать через $\text{Adm}_{q,\tilde{w}}\Sigma$. Если, в частности, $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G/E)$, то обозначим $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. При $\Sigma = \Sigma_0(F_0, F_1, G/E)$ положим $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = M_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, G/E)$.

Семейство Σ' , для которого $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma') = 0$, назовем $(q, \tilde{w})$ -*исключительным*. Если некоторое утверждение выполняется для всех множеств $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'$, где $\Sigma' - (q, \tilde{w})$ -исключительное семейство, то будем говорить, что это утверждение выполняется на Σ $(q, \tilde{w})$ -*почти всюду*. Отметим, что $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma') = 0$ для семейства поверхностей $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma_0(F_0, F_1, G/E) : \mathcal{H}_{n-1}(\sigma) = \infty\}$.

Пусть $\rho \in L_+^{q,\tilde{w}}(G)$. Будем говорить, что $\rho \in \widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}\Sigma$, если ρ $(q, \tilde{w})$ -почти допустима для семейства Σ . Известно (см. [8]), что

$$M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = \inf \left\{ \int_G \rho^q w^{1-q} dx : \rho \in \widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}(\Sigma) \right\}.$$

Аналогично введем классы допустимых функций, связанных с семействами поверхностей $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$ и $\Sigma_0(F_0, F_1, G/E)$, и обозначим их через $\text{Adm}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$, $\widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$, $\text{Adm}_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, G/E)$ и $\widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, G/E)$. Обозначим

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/\emptyset) = C_{p,w}(F_0, F_1, G), \quad M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/\emptyset) = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ компакты F_0, F_1 можно заменить на непересекающиеся компакты K_0, K_1 такие, что $K_0 \cap \overline{G} \neq \emptyset$, $K_1 \cap \overline{G} \neq \emptyset$. При этом заметим, что

$$\begin{aligned} C_{p,w}(K_0, K_1, G/E) &= C_{p,w}(K_0 \cap \overline{G}, K_1 \cap \overline{G}, G/E), \\ M_{q,\tilde{w}}(K_0, K_1, G/E) &= M_{q,\tilde{w}}(K_0 \cap \overline{G}, K_1 \cap \overline{G}, G/E). \end{aligned}$$

3. Достаточность семейства полиэдральных поверхностей для $(q, \tilde{w})$ -модуля семейства $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_+^{p,w}(G \setminus E)$ и $f = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus (G \setminus E)$. Тогда функция

$$f_r(x) = \alpha^{-1}(r) \int_{B(x,r)} f(y) dy,$$

где $\alpha(r) = \mathcal{L}_n(B(x, r))$, непрерывна на $\mathbb{R}^n$ для всех $r > 0$, $f_r(x) \rightarrow f(x)$ $\mathcal{L}_n$ -почти всюду в $\mathbb{R}^n$ и $\|f_r - f\|_{p,w} \rightarrow 0$ на G при $r \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (1) $f(x)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$, что влечет непрерывность ее усреднения $f_r(x)$ на $\mathbb{R}^n$ для $r > 0$ и сходимости к $f(x)$ при $r \rightarrow 0$ $\mathcal{L}_n$ -почти всюду в $\mathbb{R}^n$. По построению $|f_r(x)| \leq Mf(x)$ и в силу (2) $f_r(x) \rightarrow f(x)$ в $L^{p,w}(G)$.

Для $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, G/E)$ определим борелевскую меру μ_σ как сужение меры $\mathcal{H}_{n-1}$ на σ . Применяя известный результат Фюгледе [9] о связи сходимости в среднем со сходимостью по мерам, получим еще одно утверждение.

ЛЕММА 2. Если $f_k \in L^{p,w}(G \setminus E)$, $f_k = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus (G \setminus E)$ и $\|f_k - f\|_{p,w} \rightarrow 0$ на $G \setminus E$, то найдется подпоследовательность f_{k_j} такая, что для (p, w) -почти всех $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, G/E)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} d\mu_\sigma = \int_\sigma f_{k_j} d\mathcal{H}_{n-1} \rightarrow \int_\sigma f d\mathcal{H}_{n-1} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_0, F_1 \subset G$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G) < \infty$, $\partial G \cap E = \emptyset$ и D – открытое множество такое, что $\overline{D} \subset G$, $F_0 \cup F_1 \subset D$. Если $\rho \in \text{Adm}_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, D/E)$, то $\rho \in \widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для натурального k

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \left\{ \sigma : \sigma \in \Sigma(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E), d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E) > \frac{1}{k} \right\}, \\ \Sigma_{0,k} &= \left\{ \sigma : \sigma \in \Sigma_0(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E), d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E) > \frac{1}{k} \right\}, \\ \Sigma_k(G) &= \{ \sigma \cap G : \sigma \in \Sigma_k \}, \quad \Sigma_{0,k}(G) = \{ \sigma \cap G : \sigma \in \Sigma_{0,k} \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G) &\subset \Sigma_{k+1}(G), \quad \Sigma_{0,k}(G) \subset \Sigma_{0,k+1}(G), \\ \Sigma(F_0, F_1, G/E) &= \bigcup_{k \geq 1} \Sigma_k(G), \quad \Sigma_0(F_0, F_1, G/E) = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma_{0,k}(G). \end{aligned}$$

Положим $\rho = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus (D \setminus E)$,

$$\rho_r(x) = \alpha^{-1}(r) \int_{B(x,r)} \rho(y) dy = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{|\xi| < 1} \rho(x + r\xi) d\xi,$$

где $\alpha(r) = |B(x,r)| = \mathcal{L}_n(B(x,r))$. Тогда $\rho_r(x) \in \text{Adm}_{q,\tilde{w}} \Sigma_{0,k}$ для $0 < r < 1/k$. Действительно, для $\sigma \in \Sigma_{0,k}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_\sigma \rho_r(x) d\mathcal{H}_{n-1}(x) &= \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{|\xi| < 1} d\xi \int_\sigma \rho(x + r\xi) d\mathcal{H}_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{|\xi| < 1} d\xi \int_{\sigma_{r\xi}} \rho(y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) \geq 1, \end{aligned}$$

поскольку $\sigma_{r\xi} = \{y = x + r\xi : x \in \sigma\} \in \Sigma(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$ для каждого фиксированного ξ , $|\xi| < 1$.

Возьмем теперь $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$, для которой $\mathcal{H}_{n-1}(\sigma) < \infty$. Найдется k_0 такое, что $\sigma \in \Sigma_k(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$ для $k \geq k_0$. Покажем, что

$$\int_{\sigma \cap G} \rho_r(x) d\mathcal{H}_{n-1}(x) \geq 1 \quad \text{для } 0 < r < \min \left\{ \frac{1}{k}, d(\partial G, D) \right\}.$$

Пусть U – часть $G \setminus \sigma$, которая содержит F_0 . Тогда $\mathcal{H}_{n-1}(\partial U) < \infty$ и носитель $\rho_r(x)$ содержится в G . В силу известного результата Федерера и Флеминга [10] найдется последовательность n -мерных полиэдров P_i такая, что

$$P_i \subset \left\{ x : d(x, U) < \frac{1}{i} \right\}, \quad \partial P_i \subset \left\{ x : d(x, \partial U) < \frac{1}{i} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial P_i) \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}(\beta(U)), \quad \mathcal{L}_n(P_i) \rightarrow \mathcal{L}_n(U) \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Здесь $\beta(U) \subset \partial U$ – приведенная граница U (точки границы, где существует нормаль). Более того, вводя сужения $\mathcal{H}_{n-1}$ -мер на ∂P_i , $\beta(U)$, получим, как в лемме 2, что

$$\mu_i = \mu_{\partial P_i} \rightarrow \mu = \mu_{\beta(U)} \quad \text{слабо} \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

т.е. $\int f d\mu_i \rightarrow \int f d\mu$ для каждой непрерывной функции f в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. При достаточно большом i

$$F_0 \subset P_i, \quad F_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{P}_i, \quad \partial P_i \cap E = \emptyset.$$

По построению $\beta(U) \subset \partial U \subset \partial G \cup (\sigma \cap G)$. В силу выбора r

$$\int_{\sigma \cap G} \rho_r d\mathcal{H}_{n-1} \geq \int_{\beta(U)} \rho_r d\mathcal{H}_{n-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial P_i} \rho_r d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1.$$

Поскольку $\|\rho_r - \rho\|_{q, \tilde{w}} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ на $G \setminus E$, по лемме 2 $\rho \in \widetilde{\text{Adm}}_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Тем самым, теорема 1 установлена.

ТЕОРЕМА 2. Для последовательности открытых множеств D_i такой, что

$$F_0 \cup F_1 \subset D_i, \quad \bar{D}_i \subset D_{i+1}, \quad \mathcal{H}_{n-1}(\partial D_i) < \infty, \quad \bigcup_{i \geq 1} D_i = G, \quad \partial G \cap E = \emptyset,$$

при $i \rightarrow \infty$ выполнено

$$M_{q, \tilde{w}}^0(F_0, F_1, D_i/E) \rightarrow M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G/E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [3]), что

$$C_{p, w}(F_0, F_1, D_i/E) = M_{q, \tilde{w}}^{-p/q}(F_0, F_1, D_i/E),$$

$$C_{p, w}(F_0, F_1, G/E) = M_{q, \tilde{w}}^{-p/q}(F_0, F_1, G/E). \quad (3)$$

Кроме того, заметим, что при монотонном расширении открытого множества G (p, w) -модуль семейства составных кривых, соединяющих F_0 и F_1 , в G/E ведет себя как непрерывная величина и (p, w) -емкость конденсатора $(F_0, F_1, G/E)$ совпадает с (p, w) -модулем семейства этих составных кривых (см. [11]). Отсюда следует, что

$$C_{p, w}(F_0, F_1, D_i/E) \rightarrow C_{p, w}(F_0, F_1, G/E) \quad (4)$$

при $i \rightarrow \infty$.

По определению

$$M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, D_i/E) \geq M_{q, \tilde{w}}^0(F_0, F_1, D_i/E).$$

Считая, что $M_i^0 = M_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, D_i/E) < \infty$ (в противном случае утверждение теоремы очевидно), найдем $\rho_i \in \text{Adm}_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, D_i/E)$, для которой

$$\int_{G \setminus E} \rho_i^q w^{1-q} dx \leq M_i^0 + \frac{1}{i}. \quad (5)$$

В силу теоремы 1 $\rho_i \in \widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ и, следовательно, принимая во внимание обобщенное определение $(q, \tilde{w})$ -модуля, имеем

$$\int_{G \setminus E} \rho_i^q w^{1-q} dx \geq M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E).$$

Соединение (3), (5) и последнего неравенства доказывает справедливость утверждения теоремы.

Установим теперь достаточность семейства полиэдральных поверхностей при нахождении $(q, \tilde{w})$ -модуля семейства $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$ в общем случае. Нам потребуется понятие аппроксимирующей последовательности конденсаторов.

Пусть $F_j(k)$, $j = 1, 2, \dots$, состоит из конечного числа областей без общих внутренних точек, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial F_j(k)) < \infty$, $F_j(k) \supset \overline{F_j(k+1)}$, $F_j \subset F_j(k)$, $F_j(k)$ лежит в $(1/k)$ -окрестности компакта F_j , $\partial F_j(k) \cap E = \emptyset$, $j = 0, 1$.

Пусть E_k состоит из тех компонент связности $E \setminus (F_0(k) \cup F_1(k))$, которые имеют общие точки с $\overline{G}$, а $E(k)$ состоит из конечного числа областей с $\mathcal{H}_{n-1}$ -конечной границей,

$$F_0(k) \cup F_1(k) \cup E(k) \supset \overline{F_0(k+1) \cup F_1(k+1) \cup E(k+1)}, \quad \partial E(k) \cap E \neq \emptyset,$$

$E(k)$ лежит в $(1/k)$ -окрестности E_k ,

$$E(k) \cap (F_0(k) \cup F_1(k)) = \emptyset.$$

Введем обозначение

$$G_k = G \cup E(k) \cup F_0(k) \cup F_1(k).$$

По определению $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$ множества $E(k)$, $F_0(k)$, $F_1(k)$ можно подобрать так, чтобы

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) \leq C_{p,w}(F_0, F_1, G_k/E) \leq C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) + \frac{1}{k}.$$

Выберем открытые множества D_k , $\overline{D_k} \subset G$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial D_k) < \infty$, так, чтобы $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, для $G(k) = D_k \cup E(k) \cup F_0(k) \cup F_1(k)$ выполнялись неравенства

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) - \frac{1}{k} \leq C_{p,w}(F_0, F_1, G(k)/E) \leq C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) + \frac{1}{k} \quad (6)$$

и $(1/k)$ -окрестность $\overline{D_k}$ содержала G .

Последовательность $(F_0, F_1, G(k)/E)$, $k \geq 1$, назовем *аппроксимирующей* для $(F_0, F_1, G/E)$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, приходим к требуемому результату.

ТЕОРЕМА 3. Если последовательность $(F_0, F_1, G(k)/E)$, $k \geq 1$, аппроксимирующая для $(F_0, F_1, G/E)$, то

$$M_{q,\tilde{w}}^0(F_0, F_1, G(k)/E) \rightarrow M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

4. Устранимые множества для (q, w^{1-q}) -модуля. Определим емкость и модуль $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ в случае, когда E является компактом из $\mathbb{R}^n$. Пусть $\tilde{F}_j$ – объединение F_j с теми компонентами связности компакта E , которые имеют общие точки с F_j , $j = 0, 1$; $\tilde{E} = E \setminus (\tilde{F}_0 \cup \tilde{F}_1)$. Если $\tilde{F}_0 \cap \tilde{F}_1 \neq \emptyset$, то положим

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = \infty, \quad M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = 0.$$

В противном случае полагаем

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = C_{p,w}(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, G/\tilde{E}), \quad M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = M_{q,\tilde{w}}(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, G/\tilde{E}).$$

Компакт $E \subset G$ назовем *устранимым* для (q, w^{1-q}) -модуля в G , если для любого конденсатора (F_0, F_1, G_1) , где G_1 – произвольное открытое множество из G , для которого F_0, F_1 – непересекающиеся компакты из $\overline{G_1}$, $(\partial G_1 \setminus (F_0 \cup F_1)) \cap E = \emptyset$, справедливо равенство

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E) = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1).$$

Пусть m -мерная клетка, $1 \leq m \leq n$, – множество в $\mathbb{R}^n$, которое в подходящей системе координат $Oy_1 \dots y_n$ записывается как

$$\{y \in \mathbb{R}^n : a_i < y_i < b_i, i = 1, 2, \dots, m, y_{m+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Под *m -мерным клеточным множеством* будем понимать связное объединение конечного числа m -мерных клеток.

Множество $\{(x_1, x') : a < x_1 < b, x' \in S'\}$ назовем *клеточным множеством с основаниями* $\{(a, x') : x' \in S'\}$ и $\{(b, x') : x' \in S'\}$, где S' – $(n-1)$ -мерное клеточное множество.

Компакт E назовем *$NH_{q,\tilde{w}}$ -множеством* в G , если для любой координатной системы и любого клеточного множества Π с основаниями σ_0, σ_1 в данной координатной системе выполняется равенство

$$M_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = M_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi), \quad \text{где } \overline{\Pi} \subset G, \quad (\partial \Pi \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_1)) \cap E = \emptyset.$$

ЛЕММА 3. Если E – устранимое множество для (q, w^{1-q}) -модуля в G , то E – нульмерное множество, т.е. каждая компонента связности компакта E есть точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть α – невырожденная компонента связности E диаметра $d_1 > 0$. Тогда $\varepsilon_1 = d(\alpha, \partial G) > 0$. Зададим две точки a и b из α , для которых $d(a, b) > d_1/2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a = (0, 0, \dots, 0)$, $b = (1, 0, \dots, 0)$.

Пусть

$$O(\alpha) = \bigcup_{x \in \alpha} B\left(x, \frac{\varepsilon_1}{4}\right).$$

По построению $O(\alpha) \subset G$, $d(\partial O(\alpha), \alpha) > 0$.

Пусть σ – компакт в $O(\alpha) \setminus E$, который отделяет α от $\partial O(\alpha)$. По определению $\mathbb{R}^n \setminus \sigma = A \cup B$, где A, B – непустые открытые множества, $\alpha \subset A$, $\partial O(\alpha) \subset B$, и пусть G_1 – компонента связности множества A , которая содержит α .

Если H_0, H_1 – две гиперплоскости, ортогональные оси Ox_1 , $a \in H_0$, $b \in H_1$, то $d(H_0, H_1) = 1$. Положим

$$F_0 = \overline{H_0 \cap G_1}, \quad F_1 = \overline{H_1 \cap G_1}.$$

По построению получаем, что $M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E) = 0$. С другой стороны, возьмем функцию u , равную нулю для $x_1 \leq 1/4$, равную 1 для $x_1 \geq 3/4$ и равную $2(x_1 - 1/4)$ для $1/4 < x_1 < 3/4$. Ясно, что $u \in \text{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G_1)$ и, значит,

$$C_{P,w}(F_0, F_1, G_1) \leq \int_{G_1} |\nabla u|^p w \, dx < \infty.$$

В силу (3)

$$M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G_1) > 0 \quad \text{и} \quad M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G_1) \neq M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E),$$

что противоречит определению E . Следовательно, E – нульмерное множество.

ЛЕММА 4. Если E является устранимым множеством для $(q, \tilde{w})$ -модуля в G , то $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Пусть E – устранимое множество для $(q, \tilde{w})$ -модуля в G и $\mathcal{L}_n(E) > 0$. Рассмотрим

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

– произвольный координатный прямоугольник, $\bar{\Pi} \subset G$, $\mathcal{L}_n(\Pi \cap E) > 0$; σ_{01}, σ_{11} – противоположные грани Π , параллельные гиперплоскости $x_1 = 0$,

$$\Pi' = \{x' = (x_2, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i, i = 2, \dots, n\}.$$

Выберем натуральное k_0 таким, чтобы для $k \geq k_0$

$$\Pi(k) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 1, 2, \dots, n\right\}$$

вместе с $\partial\Pi(k)$ содержится в G .

Положим

$$\tilde{\Pi}(k) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 2, \dots, n\right\};$$

$\tilde{\sigma}_{01}, \tilde{\sigma}_{11}$ – грани $\tilde{\Pi}(k)$, параллельные гиперплоскости $x_1 = 0$;

$$\tilde{\Pi}'(k) = \left\{x' = (x_2, \dots, x_n) : a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 2, \dots, n\right\}.$$

Пусть σ – компакт в $\Pi(k) \setminus E$, который отделяет $\partial\Pi(k)$ от $\bar{\Pi}$. По построению $\mathbb{R}^n \setminus \sigma = A \cup B$, где A, B – открытые непересекающиеся множества такие, что $\bar{\Pi} \subset A$, $\partial\Pi(k) \subset B$, и пусть G_1 – компонента связности множества A , которая содержит $\bar{\Pi}$. Тогда

$$G_1 \subset \Pi(k), \quad \partial G_1 \cap E = \emptyset, \quad \partial G_1 \subset \sigma.$$

Обозначим

$$\sigma_{01}^1(k) = \overline{G_1 \cap \{x : x_1 = a_1\}}, \quad \sigma_{11}^1(k) = \overline{G_1 \cap \{x : x_1 = b_1\}},$$

$$G_2 = G_1 \cap \{x : a_1 < x_1 < b_1\}, \quad \sigma(c, k) = \overline{G_1 \cap \{x : x_1 = c\}}, \quad a_1 < c < b_1.$$

Пусть $\rho \in \text{Adm}_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi)$. В силу определения ρ и неравенства Гёльдера имеем

$$1 \leq \int_{\Pi \cap \sigma(c, k)} \rho d\mathcal{H}_{n-1} = \int_{\Pi'} \rho(c, x') dx' \leq \left(\int_{\Pi'} \rho^q w^{1-q} dx' \right)^{1/q} \left(\int_{\Pi'} w dx' \right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$\left(\int_{\Pi'} w dx' \right)^{1-q} \leq \int_{\Pi'} \rho^q w^{1-q} dx'.$$

Интегрируя полученное неравенство по x_1 и учитывая произвол в выборе ρ , получим

$$0 < \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left(\int_{\Pi'} w dx' \right)^{1-q} \leq M_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi). \quad (7)$$

Положим $|\sigma(c, k)| = \mathcal{H}_{n-1}(\sigma(c, k))$, $h_k = \inf_{a_1 < c < b_1} |\sigma(c, k)|$, $\rho_1 = 0$ на $E \cap \Pi(k)$ и $\rho_1 = 1$ на $\Pi(k) \setminus E$. По построению

$$h_k = \mathcal{H}_{n-1}(\sigma_{01}) + o(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что

$$\rho_1/h_k \in \text{Adm}_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2/E) \cap \text{Adm}_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi/E).$$

Применяя (7) к $(\tilde{\sigma}_{01}(k), \tilde{\sigma}_{11}(k), \tilde{\Pi}(k))$ и учитывая выбор компакта E , имеем

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left(\int_{\tilde{\Pi}'(k)} w dx' \right)^{1-q} &\leq M_{q, \tilde{w}}(\tilde{\sigma}_{01}(k), \tilde{\sigma}_{11}(k), \tilde{\Pi}(k)) \leq M_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2) \\ &= M_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2/E) \leq M_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi/E) \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\sigma(x_1, k)} \left(\frac{\rho_1(x_1, x')}{h_k} \right)^q \tilde{w} dx'. \end{aligned}$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$, приходим к неравенству

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Pi'} \frac{\rho_1^q}{|\Pi'|^q} \tilde{w} dx' \geq M_{q, \tilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi/E) \geq \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left(\int_{\Pi'} w dx' \right)^{1-q}, \quad (8)$$

где $|\Pi'| = \mathcal{H}_{n-1}(\Pi') = \mathcal{H}_{n-1}(\sigma_{01})$.

Пусть $Q, Q \subset \Pi'$, – произвольный $(n-1)$ -мерный прямоугольник с рациональными вершинами,

$$\Phi_1(x_1, Q) = \int_Q \rho_1^q \tilde{w} dx', \quad \Phi_2(x_1, Q) = \left(\int_Q w dx' \right)^{1-q}.$$

Согласно теореме Фубини существует множество из $[a_1, b_1]$ полной меры такое, что все его точки являются точками Лебега для функций Φ_1, Φ_2 (т.е. точками дифференцируемости интегралов от этих функций) независимо от выбора Q .

Выберем теперь $x_1 = c \in A$ такое, что

$$\mathcal{H}_{n-1}((E \cap \Pi) \cap \{x : x_1 = c\}) > 0.$$

Заменяя в (8) Π' на Q , a_1 — на $c - \delta$, b_1 — на $c + \delta$ и деля полученное выражение на 2δ , получим в пределе при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_Q \frac{\rho_1^q}{|Q|^q} \tilde{w} dx' \geq \left(\int_Q w dx' \right)^{1-q}. \quad (9)$$

Учитывая абсолютную непрерывность интегралов $\int_R \rho_1^q \tilde{w} dx'$, $\int_R w dx'$ для множества $R \subset \Pi \cap \{x : x_1 = c\}$, в (9) Q можно считать произвольным $(n-1)$ -мерным прямоугольником, расположенном в $\Pi \cap \{x : x_1 = c\}$.

Полагая Q $(n-1)$ -мерным кубом с центром в точке $(c, c') \in (E \cap \Pi) \cap \{x : x_1 = c\}$, где c' — точка Лебега для $\rho_1^q \tilde{w}$, w , перепишем (9) в следующем виде:

$$\frac{\int_Q \rho_1^q \tilde{w} dx'}{|Q|} \geq \left(\frac{\int_Q w dx'}{|Q|} \right)^{1-q}.$$

Устремляя диаметр Q к нулю, получим противоречие из-за того, что $\rho_1(c, c') = 0$, $w(c, c') > 0$. Следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Лемма доказана.

Для описания устранимых множеств нам понадобится условие малости обхвата для компакта E , $\mathcal{L}_n(E) = 0$, относительно некоторой гиперплоскости (см. [12]). Возьмем в качестве гиперплоскости, например,

$$H_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 = 0\}.$$

Рассмотрим семейство X_1 всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, параллельных H_0 . Индексируем каждую гиперплоскость $H \in X_1$ точкой $a = (c, 0, \dots, 0)$ пересечения этой гиперплоскости с осью Ox_1 . Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для $\mathcal{H}_1$ -почти всех $H_a \in X_1$, если множество соответствующих точек $a \in Ox_1$, для которых это свойство не выполняется, имеет нулевую $\mathcal{H}_1$ -меру.

Пусть $E_a = H_a \cap E \neq \emptyset$, $\mathcal{H}_{n-1}(E) = 0$, покрыто конечным числом непересекающихся клеточных множеств Π'_i , $\Pi'_i \subset H_a$, $d(\partial \Pi'_i, E) > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, где каждое Π'_i есть результат объединения конечного числа $(n-1)$ -мерных клеток с ребрами, параллельными осям $Ox_2, \dots, Ox_n$ и вершинами в рациональных точках, т.е. в точках вида $(c, x_2, \dots, x_n)$ с рациональными $x_2, \dots, x_n$. При этом $\mathcal{H}_{n-1}(\bigcup_{i=1}^k \Pi'_i) < \varepsilon$ и $\bigcup_{i=1}^k \Pi'_i$ находится в $(\varepsilon/2)$ -окрестности множества E_a , где ε — наперед заданное положительное число.

Далее возьмем произвольное $\delta > 0$ и построим n -мерное клеточное множество

$$\Pi_i = \{(x_1, x') : c - \delta < x_1 < c + \delta, x' \in \Pi'_i\}.$$

Назовем *боковой граничной компонентой* Π_i множество

$$B_i = \{(x_1, x') : c - \delta < x_1 < c + \delta, x' \in \partial \Pi'_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Такой набор будем называть *стандартным ε -покрытием* E_a , если $B_i \cap E = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$ и $\bigcup_{i=1}^k \Pi_i$ находится в ε -окрестности компакта E_a .

Будем говорить, что компакт E , $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет *условию малости обхвата относительно H_0* , если выполняются следующие требования: для любой функции $\rho \in L_+^{q,\tilde{w}}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{H}_1$ -почти каждой гиперплоскости $H_a \in X_1$, $E_a \neq \emptyset$, $\mathcal{H}_{n-1}(E_a) = 0$, какое бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать конечную систему областей $D_1, \dots, D_k$ в ε -окрестности компакта E_a такую, что

$$E_a \subset \bigcup_{j=1}^k D_j, \quad \left(\bigcup_{j=1}^k \partial D_j \right) \cap E = \emptyset,$$

$$\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset \quad \text{для всех} \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad \sum_{j=1}^k \int_{\partial D_j} \rho d\mathcal{H}_{n-1} < \varepsilon.$$

Сформулированные выше требования на H_a и на ρ назовем *условием ε -обхвата для ρ на H_a* .

Аналогично определим условие малости обхвата для любой другой гиперплоскости. Наконец, будем говорить, что компакт E удовлетворяет *условию малости обхвата*, если он удовлетворяет условию малости обхвата относительно любой гиперплоскости.

ТЕОРЕМА 4. *Если E — $NH_{q,\tilde{w}}$ -компакт в G и $\mathcal{L}_n(E) = 0$, то E удовлетворяет условию малости обхвата.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $NH_{q,\tilde{w}}$ -компакт удовлетворяет условию малости обхвата относительно H_0 . Сохраним обозначения, введенные при определении этого условия. Из леммы 4 следует, что для каждого клеточного множества

$$\Pi = \{x : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad \overline{\Pi} \subset G,$$

$$\Pi' = \{x' : a_i < x_i < b_i, i = 2, \dots, n\},$$

выполняется (8), где σ_{01}, σ_{11} — основания Π , параллельные H_0 .

Рассмотрим те точки $a = (c_0, 0, \dots, 0)$, для которых

- 1) $0 < \int_{H_a \cap G} w dx' < \infty$,
- 2) $\frac{d}{dc} \int_{c_0}^c \left(\int_{S_a} w dx' \right)^{1-q} dx_1 = \left(\int_{S_a} w dx' \right)^{1-q}$,
- 3) $\int_{H_a \cap G} \rho^q w^{1-q} dx' < \infty$,
- 4) $\frac{d}{dc} \int_{c_0}^c \left(\int_{S_a} \rho^q w^{1-q} dx' \right) dx_1 = \int_{S_a} \rho^q w^{1-q} dx'$,
- 5) $\mathcal{H}_{n-1}(H_a \cap E) = 0$.

Здесь $S_a - (n-1)$ -мерные клетки на $H_a \cap G$, у которых вершины имеют рациональные координаты. В силу (8), теоремы Фубини и выбора E указанные выше условия выполняются для $\mathcal{H}_1$ -почти всех $a \in O_{x_1}$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим соответствующую гиперплоскость H_a и образуем стандартное $\tilde{\varepsilon}$ -покрытие $E_a = H_a \cap E$, $0 < \tilde{\varepsilon} < d(E, \partial G)$, с помощью клеточных множеств Π_i , $i = 1, 2, \dots, k$, порожденных $(n-1)$ -мерными клеточными множествами

$\Pi'_i \subset H_a \cap G$ с вершинами в рациональных точках и ребрами, параллельными осям $Ox_2, \dots, Ox_n$. При этом

$$\int_{\bigcup_{i=1}^k \Pi'_i} w dx' < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \int_{\bigcup_{i=1}^k \Pi'_i} \rho^q w^{1-q} dx' < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Уменьшая, если надо, $\tilde{\varepsilon}$, можно считать, что построенное стандартное $\tilde{\varepsilon}$ -покрытие является одновременно и стандартным ε -покрытием.

За счет выбора Π'_i и $0 < \delta < \delta_0$ добьемся того, чтобы

$$\int_{B_i} \rho d\mathcal{H}_{n-1} < \frac{\varepsilon}{8k},$$

где B_i – боковая граничная компонента Π_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Фиксируем i . Рассмотрим семейства

$$\Sigma_i^\pm = \Sigma(\sigma_{01}^\pm(i), \sigma_{11}^\pm(i), \Pi_i^\pm(\delta)/E),$$

где

$$\Pi_i^+(\delta) = \{(x_1, x') : c < x_1 < c + \delta, x' \in \Pi'_i\},$$

$$\Pi_i^-(\delta) = \{(x_1, x') : c - \delta < x_1 < c, x' \in \Pi'_i\},$$

$\sigma_{01}^\pm(i), \sigma_{11}^\pm(i)$ – грани $\Pi_i^\pm(\delta)$, параллельные H_0 . Аналогично (7) получим, что

$$M_{q, \tilde{w}}(\Sigma_i^+) \geq \int_c^{c+\delta} dx_1 \left(\int_{\Pi'_i} w dx' \right)^{1-q}, \quad M_{q, \tilde{w}}(\Sigma_i^-) \geq \int_{c-\delta}^c dx_1 \left(\int_{\Pi'_i} w dx' \right)^{1-q}. \quad (10)$$

Пусть

$$L_i^\pm(\delta) = \inf_{\sigma \in \Sigma_i^\pm} \int_\sigma \rho d\mathcal{H}_{n-1}.$$

Покажем, что $L_i^\pm(\delta)$ достаточно мало при малых δ .

Если $L_i^\pm(\delta) = 0$, то доказывать нечего. Пусть $L_i^\pm(\delta) > 0$. Тогда функция $\rho/L_i^\pm(\delta) \in \text{Adm}_{q, \tilde{w}} \Sigma_i^\pm$ и, значит,

$$M_{q, \tilde{w}}(\Sigma_i^\pm) \leq (L_i^\pm)^{-q}(\delta) \int_{\Pi_i^\pm(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx. \quad (11)$$

Соединение (10) и (11) дает

$$(L_i^+(\delta))^{-q} \int_{\Pi_i^+(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx \geq \int_c^{c+\delta} dx_1 \left(\int_{\Pi'_i} w dx' \right)^{1-q},$$

$$(L_i^-(\delta))^{-q} \int_{\Pi_i^-(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx \geq \int_{c-\delta}^c dx_1 \left(\int_{\Pi'_i} w dx' \right)^{1-q}.$$

При достаточно малых $\delta > 0$, используя неравенство Юнга, имеем

$$(L_i^\pm(\delta))^{-q} \left(\int_{\Pi'_i(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx' + \frac{\varepsilon}{16k} \right) \geq \left(\int_{\Pi'_i} w dx' + \frac{\varepsilon}{16k} \right)^{1-q},$$

$$(L_i^\pm(\delta)) \leq \frac{1}{q} \int_{\Pi'_i(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx' + \frac{1}{p} \int_{\Pi'_i} w dx' + \frac{\varepsilon}{16k}.$$

По определению инфимума найдутся поверхности $\sigma_i^\pm \in \Sigma_i^\pm$ такие, что

$$\int_{\sigma_i^\pm} \rho d\mathcal{H}_{n-1} \leq L_i^\pm(\delta) + \frac{\varepsilon}{16k} \leq \frac{1}{q} \int_{\Pi'_i(\delta)} \rho^q w^{1-q} dx' + \frac{1}{p} \int_{\Pi'_i} w dx' + \frac{\varepsilon}{8k}.$$

Пусть D_i – ограниченные области, для которых

$$\partial D_i \subset (B_i \cup \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^k D_i \supset E_a.$$

По построению

$$\int_{\bigcup_{i=1}^k \partial D_i} \rho d\mathcal{H}_{n-1} < \varepsilon.$$

Значит, D_i , $i = 1, 2, \dots, k$, – требуемые области из определения ε -обхвата относительно H_0 . Аналогично устанавливается ε -обхват относительно других гиперплоскостей. Тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть E – компакт в G , $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Компакт E является устраняемым для $(q, \tilde{w})$ -модуля в G тогда и только тогда, когда E – $NH_{q, \tilde{w}}$ -компакт в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна в силу определения устраняемого множества для $(q, \tilde{w})$ -модуля в G . Установим достаточность.

Пусть E – $NH_{q, \tilde{w}}$ -компакт в G . Тогда E – нульмерное множество. Действительно, если это не так, то найдутся клеточные множества $\Pi, \bar{\Pi} \subset G$, с основаниями σ_0, σ_1 и компонента связности α компакта E , которая соединяет σ_0 и σ_1 . Отсюда, повторяя рассуждения леммы 3, получаем

$$0 = M_{q, \tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) \neq M_{q, \tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi) \neq 0,$$

что противоречит определению $NH_{q, \tilde{w}}$ -компакта в G .

Считая E нульмерным компактом в G , зададим конденсатор (F_0, F_1, Ω) такой, что Ω – открытое множество в G , $F_0 \cup F_1 \subset \bar{\Omega}$, $(\partial\Omega \setminus (F_0 \cup F_1)) \cap E = \emptyset$. Установим, что

$$M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega) = M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E).$$

Если $M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E) = \infty$, то требуемое равенство очевидно. Поэтому пусть $M_{q, \tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E) < \infty$.

Введем аппроксимирующую последовательность $(F_0, F_1, \Omega(k)/E)$, $k \geq 1$, для конденсатора $(F_0, F_1, \Omega/E)$ (см. теорему 3). Здесь

$$\Omega(k) = D_k \cup F_0(k) \cup F_1(k) \cup E(k),$$

где $F_j(k)$ – объединение конечного числа областей без общих внутренних точек, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial F_j(k)) < \infty$, $F_j(k) \supset \overline{F_j(k+1)} \supset F_j$, $F_j(k)$ лежит в $(1/k)$ -окрестности компакта F_j , $\partial F_j(k) \cap E = \emptyset$, $j = 0, 1$; $E(k)$ находится в $(1/k)$ -окрестности компакта E , $E_k = (E \setminus (F_0(k) \cup F_1(k))) \cap \Omega$ и состоит из конечного числа областей без общих внутренних точек, $\overline{E(k)} \subset \Omega \setminus (F_0(k) \cup F_1(k))$, $\partial E(k) \cap E = \emptyset$; выполняются включения

$$F_0(k) \cup F_1(k) \cup E(k) \supset \overline{F_0(k+1) \cup F_1(k+1) \cup E(k+1)} \supset F_0 \cup F_1 \cup (E \cap \Omega);$$

D_k – открытое множество в Ω и $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \Omega$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial D_k) < \infty$, $(1/k)$ -окрестность $\overline{D}_k$ содержит Ω , $E(k) \subset D_k$ для $k \geq 1$. Введем также множества

$$\tilde{\Omega}(k) = D_{k+1} \cup F_0(k-1) \cup F_1(k-1) \cup E(k-1) \quad \text{для } k > 1.$$

По определению аппроксимирующей последовательности и в силу (3)

$$\begin{aligned} M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega(k)/E) &= M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E) + o(1), \\ M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)/E) &= M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E) + o(1) \end{aligned} \quad (12)$$

при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку $\Omega(k) = D(k) \cup F_0(k) \cup F_1(k) \cup E(k) = D(k) \cup F_0(k) \cup F_1(k)$, выбор $F_0(k)$, $F_1(k)$ можно осуществить так, чтобы одновременно с (12) выполнялись также следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega(k)) &= M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega) + o(1), \\ M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)) &= M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega) + o(1) \end{aligned} \quad (13)$$

при $k \rightarrow \infty$. Другими словами, $(F_0, F_1, \Omega(k))$ и $(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k))$ будут аппроксимирующими последовательностями для (F_0, F_1, Ω) .

Пусть теперь $\rho \in \text{Adm}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega(k)/E)$. Тогда $\rho \in \text{Adm}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)/E)$. Возьмем $\sigma \in \Sigma_0(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)/E)$ и $\tilde{\sigma} \in \Sigma_0(F_0, F_1, \mathbb{R}^n/E)$ такие, что $\sigma = \tilde{\sigma} \cap \tilde{\Omega}(k)$. По определению $\tilde{\sigma}$ состоит из конечного числа $(n-1)$ -мерных полиэдров H_s , $s = 1, 2, \dots, m$. Тогда, повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1, где положим $G = \tilde{\Omega}(k)$, $D = \Omega(k)$, из теоремы 4 получим, что $\int_{\tilde{\sigma}_{r\xi}} \rho d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1$ для $\mathcal{L}_n$ -почти всех ξ , $|\xi| < 1$, где $0 < r < d(\tilde{\sigma}, F_0, F_1)$, $\tilde{\sigma}_{r\xi}$ – результат сдвига поверхности $\tilde{\sigma}$ на вектор $r\xi$. Тогда $\int_{\tilde{\sigma}} \rho_r d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1$ для каждой $\tilde{\sigma} \in \Sigma_0(F_0, F_1, \mathbb{R}^n)$ при достаточно малых r . Отсюда, как и в теореме 1, получим, что $\rho \in \widetilde{\text{Adm}}_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k))$. Ввиду произвола в выборе ρ следует неравенство

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)/E) \geq M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \tilde{\Omega}(k)).$$

Устремляя здесь $k \rightarrow \infty$ и учитывая соотношения (12), (13), приходим к требуемому равенству

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega/E) = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \Omega).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E – компакт и $\mathcal{H}_1(E) = 0$. Тогда E является $NH_{q,\tilde{w}}$ -множеством.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если E – $NH_{q,\tilde{w}}$ -компакт в G и D – открытое множество такое, что $\partial D \cap E = \emptyset$, то $E \cap D$ – $NH_{q,\tilde{w}}$ -множество в D .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. P. Ziemer, “Extremal length and conformal capacity”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126**:3 (1967), 460–473.

- [2] В. А. Шлык, “Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 10, Зап. научн. сем. ПОМИ, **185**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1990, 168–182.
- [3] Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, “Соотношение между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем семейства разделяющих поверхностей”, *Дальневост. матем. сб.*, 1996, № 2, 72–80.
- [4] L. I. Hedberg, “Removable singularities and condenser capacities”, *Ark. Mat.*, **12**:1-2 (1974), 181–201.
- [5] И. Н. Демшин, В. А. Шлык, “Критерии устранимых множеств для весовых пространств гармонических функций”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, **286**, ПОМИ, СПб., 2002, 62–73.
- [6] В. В. Асеев, “NED-множества, лежащие в гиперплоскости”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:5 (2009), 967–986.
- [7] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165** (1972), 207–226.
- [8] M. Ohtsuka, *Extremal Length and Precise Functions*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **19**, Gakkōtoshō, Tokyo, 2003.
- [9] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta Math.*, **98**:3 (1957), 171–219.
- [10] H. Federer, W. H. Fleming, “Normal and integral currents”, *Ann. of Math. (2)*, **72**:3 (1960), 458–520.
- [11] В. А. Шлык, “Весовые емкости, модули конденсаторов и исключительные множества по Фюгледе”, *Докл. РАН*, **332**:4 (1993), 428–431.
- [12] Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, “Геометрические критерии устранимых множеств”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, **357**, ПОМИ, СПб., 2008, 75–89.

Ю. В. Дымченко

Дальневосточный государственный университет,
г. Владивосток

E-mail: dymch@mail.ru

Поступило

16.03.2010

В. А. Шлык

Дальневосточный государственный университет,
г. Владивосток

E-mail: shlyknv@yandex.ru