Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Водова, HL-дифференцируемость эквивалентна MB[#]-дифференцируемости, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 825–829

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:11:33

НЛ-дифференцируемость эквивалентна $MB^\sharp$ -дифференцируемости

И. Водова

В 1972 г. в работе Авербуха и Смолянова анонсировано, что НЛ-дифференцируемость эквивалентна $FB^\sharp$ -дифференцируемости. Доказательство до сих пор не опубликовано. В данной работе приводится более сильный результат, сформулированный в заголовке статьи.

Библиография: 3 названия.

В работе [1] анонсировано, что дифференцируемость по Хайерсу–Ленгу эквивалентна дифференцируемости, порождаемой уравновешенной псевдотопологией, ассоциированной с псевдотопологией Фрелихера–Бухера. Доказательство до сих пор не опубликовано. В настоящей работе приводится более сильный результат, сформулированный в заголовке статьи.

Сначала приведем необходимые определения (см. [1], [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X – множество. *Фильтром* в X называется непустое множество $\mathfrak{x}$ подмножеств в X , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\emptyset \notin \mathfrak{x}$;
- 2) $A_1 \in \mathfrak{x}, A_2 \supset A_1 \Rightarrow A_2 \in \mathfrak{x}$;
- 3) $A_1, A_2 \in \mathfrak{x} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Базисом фильтра* в X называется непустое множество $\mathfrak{B}$ подмножеств в X , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$;
- 2) для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует $B_3 \in \mathfrak{B}$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{x}$ *порожден базисом фильтра* $\mathfrak{B}$, если он состоит из всех подмножеств множества X , содержащих некоторое множество из $\mathfrak{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть X – множество, и пусть $F(X)$ – система всех фильтров на множестве X . *Псевдотопологией* τ в X называется отображение

$$\tau: X \rightarrow 2^{F(X)}, \quad x \mapsto \tau(x).$$

Если $\mathfrak{x} \in \tau(x)$, то будем говорить, что $\mathfrak{x}$ *сходится к x по τ* , и писать $\mathfrak{x} \downarrow_x$. Предполагается, что должны выполняться следующие три условия:

- 1) $[x] \downarrow_x$, где $[x] = \{A \subset X \mid x \in A\}$;

- 2) $\mathfrak{x} \downarrow_x, \eta \supset \mathfrak{x} \Rightarrow \eta \downarrow_x$;
 3) $\mathfrak{x} \downarrow_x, \eta \downarrow_x \Rightarrow \mathfrak{x} \cap \eta \downarrow_x$.

В случае векторного пространства X , вместо $\mathfrak{x} \downarrow_0$ будем писать просто $\mathfrak{x} \downarrow$. Псевдотопологические векторные пространства определяются естественным образом (см. [1], [2]). В таком пространстве $\mathfrak{x} \downarrow$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{x} - x \downarrow$, где $\mathfrak{x} - x$ – фильтр, порожденный базисом фильтра $\{A - x \mid A \in \mathfrak{B}\}$, где $\mathfrak{B}$ – базис фильтра, порождающий фильтр $\mathfrak{x}$. Множество всех сходящихся фильтров в X обозначается через $C(X)$. Если X – топологическое пространство, то имеет место следующее определение:

$$\mathfrak{x} \downarrow_x \Leftrightarrow \mathfrak{x} \supset \text{Nb}_x(X),$$

где $\text{Nb}_x(X)$ – фильтр окрестностей x в X .

Через $\mathfrak{r}$ обозначим фильтр окрестностей точки 0 на действительной оси $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Также будем использовать обозначение $I_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leq \varepsilon\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathfrak{x}$ – фильтр в некотором векторном пространстве. Фильтр $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ порожден базисом фильтра $\{I_\varepsilon A \mid A \in \mathfrak{x}, \varepsilon > 0\}$, где $I_\varepsilon A = \{tx \mid t \in I_\varepsilon, x \in A\}$. Фильтр $I_1\mathfrak{x}$ порожден базисом фильтра $\{I_1 A \mid A \in \mathfrak{x}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [2]. Пусть $\mathfrak{x}$ – фильтр в некотором векторном пространстве. Фильтр $\mathfrak{x}$ называется *уравновешенным*, если $\mathfrak{r}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [1], [2]. Фильтр $\mathfrak{x}$ в псевдотопологическом векторном пространстве X называется *ограниченным*, если $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \downarrow X$. Множество всех ограниченных фильтров в X обозначим через $B(X)$.

Заметим, что $B(X) \supset C(X)$ (см., например, [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 [1]. Для всякой псевдотопологии τ в векторном пространстве X введем понятие *ассоциированной* псевдотопологии $\tau^\sharp$. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{x}$ в X *сходится к нулю в топологии $\tau^\sharp$* , если существует уравновешенный фильтр η в X такой, что $\mathfrak{x} \supset \eta$ и η сходится к нулю в топологии τ .

Заметим, что если X является топологическим векторным пространством с топологией τ , то $\tau = \tau^\sharp$.

В дальнейшем X и Y – топологические векторные пространства.

Пусть $\mathfrak{f}$ – фильтр в векторном пространстве $F(X, Y)$ всех отображений из X в Y . Если $\mathfrak{x}$ – фильтр в X , то фильтр $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ является фильтром, порожденным базисом $\{F(A) \mid F \in \mathfrak{f}, A \in \mathfrak{x}\}$.

Для любого отображения $r: X \rightarrow Y$, через $r_{\mathfrak{x}}$ обозначим фильтр, порожденный базисом фильтра $\{\{r_t \mid |t| \leq \delta\} \mid \delta > 0\}$, где

$$r_0 := 0, \quad r_t(h) := \frac{r(th)}{t}, \quad t \neq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть f – отображение из X в Y , и пусть x – некоторая фиксированная точка в X . Если существует непрерывное линейное отображение l из X в Y такое, что для любого $h \in X$ выполняется равенство

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + r(h),$$

где r мало в некотором смысле, то будем говорить, что f – отображение, дифференцируемое в этом же смысле в точке x . (Это отображение l называется *производной* отображения f в точке x и обозначается через $f'(x)$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 [1]. Пусть τ – псевдотопология в $F(X, Y)$. Будем говорить, что отображение r является τ -малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 [1], [2]. Псевдотопология Фрелихера–Бухера FB в $F(X, Y)$ определена следующим образом:

$$f \downarrow \text{FB}, \quad \text{если} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbf{B}(X) \quad f(\mathbf{r}) \downarrow.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12 [1]. Псевдотопология Майкла–Бастiani MB в $F(X, Y)$ определена следующим образом:

$$f \downarrow \text{MB}, \quad \text{если} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbf{C}(X) \quad f(\mathbf{r}) \downarrow.$$

Заметим, что $f \downarrow \text{FB} \Rightarrow f \downarrow \text{MB}$, так как $\mathbf{B}(X) \supset \mathbf{C}(X)$.

Таким образом, отображение r является FB-малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{FB}$; отображение r является MB-малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{MB}$ (см. [1]–[3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13 [1], [3]. Отображение r является малым в смысле Хайерса и Ленга (или, коротко, HL-малым), если

$$\forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists U \in \text{Nb}_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad r_{I_\delta}(U) \subset \varepsilon V.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Через FB[#] (соответственно MB[#]) будем обозначать псевдотопологию, ассоциированную с псевдотопологией Фрелихера–Бухера FB (соответственно с псевдотопологией Майкла–Бастiani MB) в смысле определения 8.

ТЕОРЕМА. FB[#]-Дифференцируемость, MB[#]-дифференцируемость и HL-дифференцируемость эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} r \in \text{FB}^\# \text{-малое отображение} & \Leftrightarrow r \in \text{HL-малое отображение} \\ & \Leftrightarrow r \in \text{MB}^\# \text{-малое отображение.} \end{aligned}$$

Сначала докажем, что

$$r \in \text{HL-малое отображение} \Rightarrow r \in \text{FB}^\# \text{-малое отображение.}$$

1°. Как показано в [3],

$$\text{HL-малая топология} \Rightarrow \text{FB-малая топология} \Rightarrow \text{MB-малая топология.}$$

2°. Докажем, что $f \downarrow \text{FB} \Rightarrow I_1 f \downarrow \text{FB}$. Действительно (в дальнейшем $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначают фильтр $\text{Nb}_0(X)$ окрестностей точки 0 в X и фильтр $\text{Nb}_0(Y)$ окрестностей точки 0 в Y), имеем

$$\begin{aligned} f \downarrow \text{FB} & \Leftrightarrow \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{B}(X) \quad f(\mathbf{r}) \downarrow \Leftrightarrow \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{B}(X) \quad f(\mathbf{r}) \supset \mathcal{V} \\ & \Leftrightarrow \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{B}(X) \quad \forall V \in \mathcal{V} \quad \exists A \in f(\mathbf{r}) \quad V \supset A. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $\mathfrak{x}$ – произвольный ограниченный фильтр в X , и пусть V – произвольная окрестность нуля в Y . Существует сбалансированная окрестность нуля V_1 в Y такая, что $V_1 \subset V$. Из (1) следует, что существует $A \in \mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ такое, что $V_1 \supset A$. Так как $A \in \mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, известно, что

$$\exists F \in \mathfrak{f} \quad \exists B \in \mathfrak{x} \quad A \supset F(B).$$

Тогда

$$V \supset V_1 = I_1 V_1 \supset I_1 A \supset I_1 (F(B)) = (I_1 F)(B) \in (I_1 \mathfrak{f})(\mathfrak{x})$$

($V_1 = I_1 V_1$, поскольку V_1 – сбалансированная окрестность). Следовательно, $V \in (I_1 \mathfrak{f})(\mathfrak{x})$. Так как окрестность $V \in \mathscr{V}$ выбрана произвольным образом, можно сделать вывод, что $\mathscr{V} \subset (I_1 \mathfrak{f})(\mathfrak{x})$. Следовательно, $I_1 \mathfrak{f} \downarrow \text{FB}$.

3°. В силу пункта 1° имеем

$$r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{HL} \quad \Rightarrow \quad r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{FB}$$

и, следовательно, в силу 2° имеем $I_1 r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{FB}$.

4°. Фильтр $I_1 r_{\mathbf{r}}$ уравновешенный, т.е. $I_1 r_{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(I_1 r_{\mathbf{r}})$. Действительно, $\mathbf{r}(I_1 r_{\mathbf{r}}) \subset I_1 r_{\mathbf{r}}$, так как (в дальнейшем $r(t \cdot)$ обозначает отображение $x \mapsto r(tx)$ из X в Y)

$$A \in \mathbf{r}(I_1 r_{\mathbf{r}})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad A \supset I_{\delta} I_1 r_{I_{\gamma}} &= I_1 \delta r_{I_{\gamma}} = \left\{ I_1 \delta \frac{r(t \cdot)}{t} \mid 0 < |t| \leq \gamma \right\} \\ &= \left\{ I_1 \frac{r((t/\delta)\delta \cdot)}{t/\delta} \mid 0 < \left| \frac{t}{\delta} \right| \leq \frac{\gamma}{\delta} \right\} \in I_1 r_{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A \in I_1 r_{\mathbf{r}},$$

и $I_1 r_{\mathbf{r}} \subset \mathbf{r}(I_1 r_{\mathbf{r}})$, так как

$$A \in I_1 r_{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \exists \gamma > 0 \quad A \supset I_1 r_{I_{\gamma}} = I_1 I_1 r_{I_{\gamma}} \in \mathbf{r} I_1 r_{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad A \in \mathbf{r}(I_1 r_{\mathbf{r}}).$$

5°. Очевидно, что $r_{\mathbf{r}} \supset I_1 r_{\mathbf{r}}$. Фильтр $I_1 r_{\mathbf{r}}$ является уравновешенным в силу пункта 4° и FB-сходится к 0 в силу 3°. Следовательно, $r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{FB}^{\sharp}$, т.е. r – $\text{FB}^{\sharp}$ -малое отображение.

Теперь, импликация

$$r \in \text{FB}^{\sharp}\text{-малое отображение} \quad \Rightarrow \quad r \in \text{MB}^{\sharp}\text{-малое отображение}$$

оказывается очевидной, так как $\text{C}(X) \subset \text{B}(X)$.

Наконец, проверим импликацию

$$r \in \text{MB}^{\sharp}\text{-малое отображение} \quad \Rightarrow \quad r \in \text{HL}\text{-малое отображение}.$$

Пусть r – $\text{MB}^{\sharp}$ -малое отображение, т.е.

$$\exists \mathfrak{f} \quad \mathbf{r}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}, \quad r_{\mathbf{r}} \supset \mathfrak{f}, \quad \forall \mathfrak{x} \in \text{C}(X) \quad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \downarrow.$$

Так как фильтр $\mathscr{U}$ окрестностей точки 0 в X принадлежит $\text{C}(X)$, то выполняется $\mathfrak{f}(\mathscr{U}) \downarrow$, что означает, что $\mathfrak{f}(\mathscr{U}) \supset \mathscr{V}$. Пусть V – некоторая произвольная окрестность

нуля в Y . Тогда существует $V_1 \in \mathcal{V}$ такое, что $V_1 \subset V$, $I_1 V_1 = V_1$. Так как $f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{V}$, имеем

$$\exists F \in f \quad \exists U \in \mathcal{U} \quad F(U) \subset V_1.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $r_{\mathbf{r}} \supset \mathbf{r}f$, приходим к выводу, что существует $\delta > 0$ такое, что $r_{I_\delta} \subset I_\varepsilon F$. Тогда

$$r_{I_\delta}(U) \subset (I_\varepsilon F)(U) \subset \varepsilon V_1 \subset \varepsilon V,$$

что означает, что r – HL-малое отображение. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Дифференцирование и псевдотопологии”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1972, № 1, 3–7.
- [2] A. Frölicher, W. Bucher, *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture Notes in Math., **30**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966.
- [3] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Различные определения производной в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **23**:4 (1968), 67–116.

И. Водова

Institute of Mathematics, Silesian University in Opava

E-mail: JirinaVodova@seznam.cz

Поступило

27.01.2010