Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ян-Донг Ву, Ху-Квинг Лиу, Замечание о норме Фробениуса коммутатора двух матриц, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 934–939

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:36:14

Замечание о норме Фробениуса коммутатора двух матриц

Ян-Донг Ву, Ху-Квинг Лиу

Цель данной заметки – улучшить неравенство, предложенное Бетчером и Вентцелем, которое дает оценку сверху для нормы Фробениуса коммутатора двух частных матриц в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$. Сначала предлагается новая верхняя грань, полученная на основе неравенства Бетчера–Вентцеля. Затем, в процессе получения этой оценки, неравенство $\|XY - YX\|_F^2 \leq 2\|X\|_F^2\|Y\|_F^2$ окончательно улучшается до

$$\|XY - YX\|_F^2 \leq 2\|X\|_F^2\|Y\|_F^2 - 2[\text{tr}(X^T Y)]^2,$$

и также проводится дальнейшее уточнение.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Данная работа начинается с гипотезы относительно верхней грани нормы Фробениуса некоторого коммутатора, которую высказали Бетчер и Вентцель в работе [1; гипотеза 1.2] при рассмотрении коммутаторов случайных матриц: если X и Y – две произвольно заданные матрицы в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ с нормой $\|X\|_F = \|Y\|_F = 1$, то выполняется неравенство $\|XY - YX\|_F \leq 2$, где норма Фробениуса некоторой матрицы обозначается как $\|\cdot\|_F$ и определяется как $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$, а обозначения $(\cdot)^T$ и $\text{tr}(\cdot)$ относятся соответственно к операторам транспонирования и взятия следа. Далее, Бетчер и Вентцель утверждают, что их гипотеза эквивалентна неравенству

$$\|XY - YX\|_F^2 \leq 2\|X\|_F^2\|Y\|_F^2 =: u_1 \quad (1.1)$$

для всех X и Y в $\mathbb{R}^{n \times n}$, и доказывают, что она верна при $n = 2$. Далее Ласло [2] доказал неравенство (1.1) для $n = 3$. Затем Вонг и Жин [3] получили доказательство того, что данная гипотеза верна при любых n . Недавно Бетчер и Вентцель снова обратились к своей гипотезе и в работе [4] привели доказательство совершенно отличное от доказательства, которое дали Вонг и Жин в работе [3]. Казалось бы, задача получения оценки сверху для нормы Фробениуса некоторого коммутатора решена полностью. Однако, легко видеть, что все доказательства, приведенные в этих статьях, являются чрезвычайно сложными и не очень удобочитаемыми и, следовательно, математическая красота совершенно отсутствует в данном случае. Мы также пытались найти доказательство, которое было бы кратким и по существу,

Работа выполнена при поддержке грантов HGC0923, HAS08036 и программы “Зелено-голубой проект” на 2008 г. по поддержке молодых ученых Хуайянского технологического института.

однако потерпели неудачу. Таким образом, задача получения лаконичного доказательства остается актуальной и представляет особый интерес. Что наиболее важно, задача получения другого характеристического описания, которое давало бы более подходящую верхнюю грань и было бы легко проверяемым, стала действительно безотлагательной и злободневной задачей.

В работе [1; замечание 5.3] Бетчер и Вентцель отметили, что гипотеза верна, если $\mathbf{X}$ коммутирует с $\mathbf{Y}^T$, и в этом случае выполняется даже более строгое неравенство

$$\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 \leq \|\mathbf{XY}\|_F^2 + \|\mathbf{YX}\|_F^2.$$

Исходя из этого, мы попытались получить оценку сверху, используя нормы $\|\mathbf{X}\|_F$ и $\|\mathbf{Y}\|_F$ вместе с $\|\mathbf{XY}\|_F$, $\|\mathbf{YX}\|_F$, $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_F$ и $\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|_F$, а не ограничиваясь только нормами $\|\mathbf{X}\|_F$ и $\|\mathbf{Y}\|_F$. Например, неравенство треугольника

$$\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F \leq \|\mathbf{XY}\|_F + \|\mathbf{YX}\|_F$$

выполняется, безусловно, в силу свойств норм, присущих норме Фробениуса. Однако в общем случае ошибка, обусловленная этим неравенством, слишком велика, что полностью лишает его практического применения. Тем не менее, мы полагаем, что эта идея довольно объективная и выполняемая, хотя нам так и не удалось напрямую получить дальнейшие результаты. Данная заметка как раз и является началом такого рассмотрения.

Статья имеет следующую структуру. В п. 2, мы сначала, основываясь на гипотезе Бетчера–Вентцеля, представляем новую верхнюю грань для возведенной в квадрат нормы Фробениуса некоторого коммутатора. Хотя новая оценка не всегда лучше, чем та, которую получили Бетчер и Вентцель, она позволяет нам существенно уточнить эту оценку, что и будет сделано. Наконец, мы предлагаем дальнейшее уточнение оценки Бетчера–Вентцеля.

2. Основные результаты и доказательства. В этом пункте приведены наши основные результаты, включая новую верхнюю грань для возведенной в квадрат нормы Фробениуса некоторого коммутатора, а также заметное уточнение гипотезы Бетчера–Вентцеля. Легко видеть, что метод, которым мы пользуемся, довольно краткий и по существу.

Сначала мы представим новую верхнюю грань в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – две матрицы в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда

$$\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|_F^2 \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_F^2 =: u_2. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\mathbf{XY} - \mathbf{YX} = \frac{1}{2}(\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}), \quad \text{где } \mathbf{P} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}.$$

Применяя (1.1), получим

$$\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 = \frac{1}{4} \|\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}\|_F^2 \leq \frac{2}{4} \|\mathbf{P}\|_F^2 \|\mathbf{Q}\|_F^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|_F^2 \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_F^2.$$

Теорема доказана.

Видно, что новая верхняя грань, полученная в теореме 2.1, оказывается просто кратким следствием гипотезы Бетчера–Вентцеля. Возникает естественный вопрос о том, как связаны между собой эти две верхние грани, u_1 и u_2 . Выполняется ли равенство $u_2 = u_1$ для любых двух матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$? Ответ гласит, что это не так. Действительно, непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= -\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Y}\|_F^2 + \frac{1}{2} \{ \|\mathbf{X}\|_F^4 + \|\mathbf{Y}\|_F^4 - 4[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})]^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\|\mathbf{X}\|_F^2 - \|\mathbf{Y}\|_F^2)^2 - 4[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})]^2 \}, \end{aligned}$$

откуда следует, что величина $u_2 - u_1$ может быть как положительной так и отрицательной. Например, если взять

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то получим $u_2 - u_1 = 16 > 0$, а если взять

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

то получим $u_2 - u_1 = -24 < 0$. Отсюда следует, что u_2 не совпадает с u_1 . Кроме того, нельзя однозначно утверждать, какая из этих оценок оказывается более точной. Следовательно, мы будем рассматривать новую верхнюю грань возведенной в квадрат нормы Фробениуса некоторого коммутатора как альтернативную.

Можно видеть, что наша новая верхняя грань не всегда меньше, чем та, которую получили Бетчер и Вентцель. Однако сам процесс получения u_2 побуждает нас к дальнейшим усилиям по уточнению неравенства (1.1). Следующая теорема представляет еще лучшую верхнюю грань. Можно видеть, что это довольно существенное улучшение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – две матрицы в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда

$$\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 \leq 2\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Y}\|_F^2 - 2[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})]^2 =: u_3. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α и β – две заданные положительные матрицы. Тогда

$$\mathbf{XY} - \mathbf{YX} = \frac{1}{2\alpha\beta}(\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}), \quad \text{где } \mathbf{P} = \alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Q} = \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 &= \left(\frac{1}{2\alpha\beta} \right)^2 \|\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}\|_F^2 \leq \frac{2}{4\alpha^2\beta^2} \|\mathbf{P}\|_F^2 \|\mathbf{Q}\|_F^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \|\alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y}\|_F^2 \|\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}\|_F^2 \\ &= \frac{\|\mathbf{X}\|_F^4}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + \frac{\|\mathbf{Y}\|_F^4}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + \|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Y}\|_F^2 - 2[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})]^2 =: u. \end{aligned}$$

Теперь достаточно найти минимальное u и определить условия, при которых u будет минимальным. Ясно, что

$$u \geq 2\sqrt{\frac{\|\mathbf{X}\|_F^4}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\|\mathbf{Y}\|_F^4}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} + \|\mathbf{X}\|_F^2\|\mathbf{Y}\|_F^2 - 2[\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})]^2 = u_3,$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда отношение α к β равно отношению $\|\mathbf{Y}\|_F$ к $\|\mathbf{X}\|_F$. Взяв $\|\mathbf{Y}\|_F$ и $\|\mathbf{X}\|_F$ соответственно в качестве α и β , немедленно получим неравенство (2.2).

Приведем пару замечаний о теореме 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Аналогичный процесс вывода (2.2), который основывается на (1.1), не приведет к дальнейшему существенному уточнению неравенства (2.2), как следует из самого неравенства (2.2). Это утверждение следует из того, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 &= \left(\frac{1}{2\alpha\beta}\right)^2 \|\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}\|_F^2 \leq \frac{2}{4\alpha^2\beta^2} \{\|\mathbf{P}\|_F^2\|\mathbf{Q}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{P}^T\mathbf{Q})]^2\} \\ &= \frac{\|\mathbf{X}\|_F^4}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\|\mathbf{Y}\|_F^4}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \|\mathbf{X}\|_F^2\|\mathbf{Y}\|_F^2 \\ &\quad - 2[\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})]^2 - \frac{1}{2\alpha^2\beta^2}[\alpha^2\|\mathbf{X}\|_F^2 - \beta^2\|\mathbf{Y}\|_F^2]^2 \\ &\equiv u_3, \end{aligned}$$

для любых заданных положительных скалярных α и β .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. При тщательной проверке основных результатов, приведенных в работе [4], видно, что теорема 2.2 фактически эквивалентна первому неравенству “ $\leq$ ”, которое содержится в работе [4; теорема 3.1, с. 1869]. Хотя предложенный нами метод вывода этого неравенства в доказательстве совершенно отличается от метода, предложенного в работе [4], мы все равно хотели бы рассматривать наш метод как некоторую версию метода, предложенного в работе [4], поскольку мы считаем целесообразным пользоваться методами, которыми были получены уже известные утверждения, для получения дальнейших результатов.

Поскольку, как уже было отмечено в замечаниях после доказательства теоремы 2.2, аналогичный процесс вывода неравенства (2.2) на основе (1.1) не приводит к существенному уточнению неравенства (2.2), нам не удалось уточнить (2.2) на основе его свойств. Однако сам метод побуждает нас к дальнейшему исследованию этой проблемы. Пусть $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} + \alpha\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ – любая произвольная фиксированная матрица, коммутирующая с $\mathbf{X}$ и удовлетворяющая условию

$$h_F(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) =: \|\mathbf{X}\|_F^2\|\mathbf{Z}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{Z})]^2 \neq 0,$$

а α – любая скалярная величина. Тогда $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\mathbf{XY} - \mathbf{YX}\|_F^2 &= \frac{1}{2}\|\mathbf{X}\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{X}\|_F^2 \leq \|\mathbf{X}\|_F^2\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{Y}})]^2 \\ &= \|\mathbf{X}\|_F^2(\|\mathbf{Y}\|_F^2 + 2\alpha\text{tr}(\mathbf{Y}^T\mathbf{Z}) + \alpha^2\|\mathbf{Z}\|_F^2) - [\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y}) + \alpha\text{tr}(\mathbf{Y}^T\mathbf{Z})]^2 \\ &= \{\|\mathbf{X}\|_F^2\|\mathbf{Y}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})]^2\} + g(\alpha), \end{aligned}$$

при $g(\alpha) = h_F(\mathbf{X}, \mathbf{Z})\alpha^2 + 2h(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\alpha$, где

$$h(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Z}) - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Z}).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} g(\alpha) &\geq g_{\min}(\alpha) = -\frac{h^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{h_F(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} \\ &= -\frac{[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Z}) - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Z})]^2}{\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Z}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Z})]^2} \quad (< 0), \end{aligned}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\alpha = -\frac{h(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{h_F(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} = \frac{\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Z}) - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Z})}{\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Z}\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Z})]^2}.$$

Таким образом, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – две матрицы в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{X}_0$ (соответственно $\mathbf{Y}_0$) – любая фиксированная произвольная матрица, коммутирующая с $\mathbf{X}$ (соответственно $\mathbf{Y}$) и удовлетворяющая условию $\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{X}_0\|_F^2 \neq [\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}_0)]^2$ (соответственно $\|\mathbf{Y}\|_F^2 \|\mathbf{Y}_0\|_F^2 \neq [\text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}_0)]^2$). Тогда

$$\|\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}\|_F^2 \leq 2\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{Y}\|_F^2 - 2[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})]^2 - \varrho =: u_4, \quad (2.3)$$

где

$$\varrho = \max \left\{ \frac{[\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{X}_0) - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}_0)]^2}{\|\mathbf{X}\|_F^2 \|\mathbf{X}_0\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}_0)]^2}, \right. \\ \left. \frac{[\text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y}_0) - \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{X}) \text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}_0)]^2}{\|\mathbf{Y}\|_F^2 \|\mathbf{Y}_0\|_F^2 - [\text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}_0)]^2} \right\}.$$

Дальнейшее уточнение также существенно. Например, выбрав $\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

получим $\|\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}\|_F^2 = 72$, $u_1 = 252$, $u_3 = 234$ и $u_4 = 153$.

3. Заключение. В данной короткой заметке мы снова обратились к задаче о норме Фробениуса некоторого коммутатора. Нашей первоначальной целью было упростить метод, которым эта задача решалась. После нескольких неудачных попыток, нам удалось получить некоторую новую оценку сверху (верхнюю грань) и уточнить верхнюю грань, полученную в работе Бетчера и Вентцеля. Также удалось получить дальнейшее уточнение этого результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Böttcher, D. Wenzel, “How big can the commutator of two matrices be and how big is it typically?”, *Linear Algebra Appl.*, **403** (2005), 216–228.

- [2] L. László, “Proof of Böttcher and Wenzel’s conjecture on commutator norms for 3-by-3 matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **422**:2-3 (2007), 659–663.
- [3] S.-W. Vong, X.-Q. Jin, “Proof of Böttcher and Wenzel’s conjecture”, *Oper. Matrices*, **2**:3 (2008), 435–442.
- [4] A. Böttcher, D. Wenzel, “The Frobenius norm and the commutator”, *Linear Algebra Appl.*, **429**:8-9 (2008), 1864–1885.

Ян-Донг Ву

Huaiyin Institute of Technology, КНР

E-mail:

Поступило

25.11.2008

Ху-Квинг Лиу

Huaiyin Institute of Technology, КНР

E-mail: liuxuqing688@gmail.com