Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, Неунитаризуемые периодические группы, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 940–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:31:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Неунитаризуемые периодические группы

В. С. Атабекян

Представление $\pi: G \rightarrow B(H)$ группы G над гильбертовым пространством H называется *унитаризуемым*, если существует такой обратимый оператор T , что оператор $U_g \Rightarrow T\pi(g)T^{-1}$ для любого элемента $g \in G$ является унитарным, т.е. $(U_g x, U_g y) = (x, y)$ для любых двух векторов $x, y \in H$. Группа G называется *унитаризуемой группой*, если все ее равномерно ограниченные представления π над гильбертовым пространством H являются унитаризуемыми.

Диксмье в [1] и Дэй в [2] доказали, что любая аменабельная группа унитаризуема. Первый пример неунитаризуемой группы построен в [3], где показана неунитаризуемость группы $SL_2(\mathbb{R})$. Известно, что если все счетные подгруппы данной группы G унитаризуемы, то и группа G унитаризуема, а если группа унитаризуема, то все ее подгруппы и фактор группы тоже унитаризуемы (см., например, [4]). Значит, из существования неунитаризуемой группы следует, что абсолютно свободная группа F_∞ бесконечного ранга неунитаризуема и, следовательно, любая группа, содержащая подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2, неунитаризуема.

Монод и Озава, в совместной работе [5] исследуя вопрос, *следует ли из унитаризуемости группы ее аменабельность* (см. [1]), получили интересный критерий, согласно которому неаменабельность данной группы G эквивалентна неунитаризуемости группы $A \wr G$ для всех бесконечных абелевых групп A , где $A \wr G$ – прямое сплетение групп A и G .

Первый пример неаменабельной группы, удовлетворяющей нетривиальному тождественному соотношению, был указан Адяном. Известная теорема Адяна (см. [6; теорема 5]) утверждает, что свободная бернсайдова группа

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid A^n = 1 \text{ для всех слов } A = A(a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}) \rangle$$

неаменабельна для любого нечетного числа $n \geq 665$ и $m > 1$. Группа $B(m, n)$ не содержит абсолютно свободных подгрупп, так как удовлетворяет тождеству $x^n = 1$.

Опираясь на указанный критерий и на приведенную теорему Адяна о неаменабельности групп $B(m, n)$, а также используя теорему Ширваняна [7] о вложимости свободной бернсайдовой группы $B(\infty, n)$ бесконечного ранга в группу $B(2, n)$, Монод и Озава доказали (см. [5; теорема 2]), что свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ неунитаризуемы для всех нечетных чисел $n = n_1 n_2$, где $n_1 \geq 665$ и $n_2, m > 1$.

Следующая теорема усиливает этот результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого нечетного числа*

$$n = n_1 n_2, \quad \text{где } n_1 \geq 665 \text{ и } n_2 > 1,$$

любая нециклическая подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ не унитаризуема.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-91958-ННИО_а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 0.1 из работы [8] автора утверждает, что для всех нечетных $n \geq 1003$ каждая нециклическая подгруппа группы $B(m, n)$ содержит подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(\infty, n)$ бесконечного ранга. По теореме 2 Монода и Озавы из [6] при указанных условиях группа $B(\infty, n)$ неунитаризуема. Остается воспользоваться тем, что свойство унитаризуемости наследственно при переходе на подгруппы. Теорема доказана.

Теорема 1 указывает новые примеры неунитаризуемых периодических групп, отличных от свободных бернсайдовых групп. Действительно, согласно результатам Ольшанского [9] (при нечетных $n > 10^{78}$) и автора [10] (при нечетных $n \geq 1003$) любая собственная нормальная подгруппа группы $B(m, n)$ не изоморфна никакой свободной бернсайдовой группе. Для сравнения с теоремой 1 уместно отметить, что, как показано в работе [11], каждая конечно-порожденная нециклическая подгруппа группы $B(m, n)$ равномерно неаменабельна при любом нечетном $n \geq 1003$.

Согласно [4] (см. следствие 0.11), если все счетные подгруппы данной группы G унитаризуемы, то группа G унитаризуема. Любая абсолютно свободная группа ранга ≥ 2 является неунитаризуемой группой, но содержит бесконечную циклическую подгруппу, которая унитаризуема (см. [1], [2]).

Ниже мы ответим на следующий

ВОПРОС. Существует ли неунитаризуемая группа, все счетные подгруппы которой тоже не унитаризуемы?

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого нечетного числа $n = n_1 n_2$, где $n_1 \geq 665$ и $n_2 > 1$, любая бесконечная подгруппа группы $B(m, n)$ неунитаризуема (а всякая конечная подгруппа унитаризуема).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.7 Адяна из [12; гл. VII] (см. также [13]) каждая конечная подгруппа группы $B(m, n)$ циклическая. Остается воспользоваться теоремой 1. Следствие доказано.

Следующей теоремой мы отвечаем на другой естественно возникающий вопрос: существуют ли конечно порожденные неунитаризуемые периодические группы ограниченного периода, отличные от свободных бернсайдовых групп и их нециклических подгрупп?

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = n_1 n_2$ – произвольное нечетное число, где $n_1 \geq 665$ и $n_2 > 1$. Существует континуум неизоморфных 3-порожденных групп, удовлетворяющих тождественному соотношению $x^n = 1$, каждая из которых неунитаризуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим указанные в теореме группы с помощью периодических произведений, введенных Адяном в работе [14].

Как показано в работе [15], для любого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум простых 2-порожденных неизоморфных групп $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$, любая максимальная подгруппа каждой из которых – циклическая группа периода n . Пусть $n = n_1 n_2$ – произвольное нечетное число, где $n_1 \geq 665$ и $n_2 > 1$. Очевидно, имеет место неравенство $n = n_1 n_2 > 1003$. Составим n -периодическое произведение $G_i = \langle a \rangle_n * \Gamma_i$ циклической группы $\langle a \rangle_n$ порядка n с порождающей a с каждой из групп $\Gamma_i \in \{\Gamma_i\}_{i \in I}$.

Рассмотрим любые две группы

$$G_1 = \langle a \rangle_n * \Gamma_1 \quad \text{и} \quad G_2 = \langle a \rangle_n * \Gamma_2,$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \{\Gamma_i\}_{i \in I}$ – неизоморфные 2-порожденные простые группы периода n , и докажем, что группы G_1 и G_2 тоже неизоморфны. Предположим обратное, и пусть $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ – некоторый изоморфизм. Согласно теореме 3 Адяна из [14] группы $\langle a \rangle_n$ и Γ_i вкладываются в G_i в качестве подгруппы, $i = 1, 2$. Нормальное замыкание элемента a в G_1 обозначим через N_1 и покажем, что имеет место изоморфизм $G_1/N_1 \simeq \Gamma_1$. Прежде всего

заметим, что группа G_1/N_1 получается из группы G_1 добавлением к ее системе определяющих соотношений одного соотношения $a = 1$. А из определения периодического произведения следует, что эта же группа получается из группы Γ_1 добавлением к ее системе определяющих соотношений некоторых новых соотношений вида E^n . Так как в группе Γ_1 выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$, то после этих добавлений мы опять получим группу Γ_1 .

Очевидно, имеет место изоморфизм

$$G_1/N_1 \simeq \phi(G_1)/\phi(N_1).$$

Поскольку $\phi(G_1)/\phi(N_1) = G_2/N_2$, где N_2 – нормальное замыкание элемента $\phi(a)$ в группе G_2 , то получаем изоморфизм

$$\Gamma_1 \simeq G_2/N_2.$$

С другой стороны, так как подгруппа $\Gamma_2 < G_2$ – простая группа, то из предположения $N_2 \cap \Gamma_2 \neq \{1\}$ следует включение $N_2 \supset \Gamma_2$. Но из соотношения $N_2 \supset \Gamma_2$ вытекает, что фактор-группа

$$G_2/N_2 = \langle a \rangle_n \overset{n}{*} \Gamma_2/N_2$$

конечна, в то время как она изоморфна бесконечной группе Γ_1 . Противоречие показывает, что $N_2 \cap \Gamma_2 = \{1\}$, и поэтому группа Γ_2 вкладывается в группу $G_2/N_2 = \Gamma_1$ в качестве собственной подгруппы ($\Gamma_1 \not\simeq \Gamma_2$). Но это опять противоречие, поскольку любая собственная подгруппа группы Γ_1 – конечная циклическая группа. Из полученных противоречий следует, что при различных значениях i группы G_i неизоморфны.

То, что построенные нами группы $G_i = \langle a \rangle_n \overset{n}{*} \Gamma_i$ ($i \in I$) неунитаризуемы, следует из того, что каждая из них содержит подгруппу, изоморфную неунитаризуемой группе $B(2, n)$. Действительно, согласно теореме 3 из работы [14] n -периодическое произведение групп удовлетворяет постулату Мальцева, т.е. наследственна по подгруппам. Следовательно, элемент a и любой элемент порядка n подгруппы Γ_i порождают в группе G_i n -периодическое произведение двух циклических групп порядка n , которое согласно теореме 5 Адяна из работы [14] изоморфно группе $B(2, n)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого нечетного числа $n = n_1 n_2$, где $n_1 \geq 665$ и $n_2 > 1$, свободная бернсайдова группа $B(3, n)$ обладает следующими свойствами:

- 1) каждая бесконечная подгруппа группы $B(3, n)$ неунитаризуема,
- 2) группа $B(3, n)$ имеет континуум неизоморфных фактор-групп, каждая из которых неунитаризуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в каждой из групп G_i , построенных при доказательстве теоремы 2, выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$.

В заключение отметим, что, рассмотрев прямое произведение $B(2, n) \times \Gamma_i$ группы $B(2, n)$ с каждой из групп Γ_i , мы получим континуум неизоморфных фактор-групп группы $B(4, n)$, каждая из которых не только неунитаризуема, но и на основании работы [11] равномерно неаменабельна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Dixmier, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12** (1950), 213–227. [2] M. M. Day, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69**:2 (1950), 276–291. [3] L. Ehrenpreis, F. I. Mautner, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **41** (1955), 231–233. [4] G. Pisier, *Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects*, Progr. Math., **248**, Birkhäuser, Basel, 2005, 323–362. [5] N. Monod, N. Ozawa, *J. Funct. Anal.*, **258**:1 (2010), 255–259. [6] С. И. Адян, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1139–1149. [7] В. Л. Ширванян, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1 (1976), 190–208. [8] В. С. Атабекян, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 3–36. [9] A. Yu. Ol'shanskii, *Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras* (St. John's, NF, 2001), Math.

Appl., **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 179–187. [10] В. С. Атабекян, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:1 (2009), 3–21. [11] В. С. Атабекян, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 516–523. [12] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.. [13] С. И. Адян, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **112**, Наука, М., 1971, 64–72. [14] С. И. Адян, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 3–21. [15] В. С. Атабекян, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 495–500.

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило

12.11.2009