Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Королёв, О сходимости неравномерных эргодических средних, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 944–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:36:21

О сходимости неравномерных эргодических средних

А. В. Королев

Изучение неравномерных усреднений вида

$$F_t f(x) = \int_0^\infty f(T_{ts}x) \nu(ds)$$

для полупотоков $\{T_t\}$ с инвариантной мерой μ было начато в работах [1], [2], где было установлено, что для абсолютно непрерывных вероятностных мер ν на полуоси и ограниченных функций f при $t \rightarrow +\infty$ величины $F_t f(x)$ для μ -почти всех x имеют тот же самый предел, что и в случае классического равномерного усреднения в теореме Бирхгофа–Хинчина. Исследование усреднений $F_t f(x)$ было продолжено в работе [3] (см. также [4; гл. 10]), где было выяснено, что для неограниченных функций f может не быть сходимости неравномерных усреднений. Там же были получены дополнительные условия, дающие такую сходимость. Изучению аналогичных вопросов для стохастических уравнений посвящена работа [5]. Случай усреднений с операторной полугруппой рассмотрен в [6]. В данной работе исследуется вопрос о сходимости средних $F_t f(x)$ в $L^p(\mu)$, а также рассматриваются некоторые применения полученных результатов. В частности, речь идет об аналоге эргодической теоремы Винера–Винтернера. В отличие от результатов работ [3], [5], [6], в ряде утверждений этой работы наложено условие слабого перемешивания полугруппы.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – вероятностное пространство. Напомним, что полугруппа $\{T_t\}_{t \geq 0}$ преобразований пространства X , сохраняющих меру μ , называется *слабо перемешивающей* (см. [7; с. 28]), если для всяких двух функций $f, g \in L^2(\mu)$ выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_X f(T_s x) g(x) \mu(dx) - \int_X f d\mu \int_X g d\mu \right|^2 ds = 0.$$

В этом случае оператор U_t , действующий в $L^1(\mu)$ по формуле $U_t f(x) = f(T_t x)$, не имеет собственных функций, отличных от констант (см. [7; с. 35]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ – слабо перемешивающая полугруппа преобразований пространства X , причем соответствующая операторная полугруппа U_t сильно непрерывна, а ν – произвольная вероятностная мера на $[0, +\infty)$, имеющая преобразование Фурье $\hat{\nu}$. Если $\hat{\nu}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то для всякой функции $f \in L^p(\mu)$ при $p \in [1, +\infty)$ выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \int_0^{+\infty} f(T_{ts}x) \nu(ds) - \int_X f(x) \mu(dx) \right\|_{L^p(\mu)} = 0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить доказываемое равенство для $f \in L_p(\mu)$ с нулевым интегралом. Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Применяя теорему Фубини и пользуясь теоремой Бохнера (см. [4; с. 146]), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{+\infty} f(T_{ts}x) \nu(ds) \right\|_{L^2(\mu)}^2 &= \int_X \left[\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(T_{ts}x) f(T_{tu}x) \nu(ds) \nu(du) \right] \mu(dx) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{its\lambda} e^{-itu\lambda} \sigma_f(d\lambda) \right] \nu(ds) \nu(du) \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{its\lambda} \nu(ds) \right|^2 d\sigma_f(d\lambda), \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00536, 08-01-90431-Укр.).

где $\sigma_f(\lambda)$ – спектральная мера функции f относительно T_t . Мера $\sigma_f(\lambda)$ не имеет атомов, поскольку T_t – слабо перемешивающая полугруппа, а среднее функции f равно нулю (см. [7; с. 35]). Пользуясь условием $\hat{\nu}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и применяя теорему Лебега к последнему выражению предыдущего равенства, получаем справедливость равенства (1) для $p = 2$. Случай $p = 2^k$, $k > 1$, проверяется аналогично. Для $1 \leq p < 2^k$ доказываемое равенство следует из неравенства Гёльдера, ввиду которого норма в $L^p(\mu)$ мажорируется нормой в $L^{2^k}(\mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что условия на полугруппу T_t можно ослабить, если вместо слабого перемешивания потребовать эргодичность полугруппы T_t и отсутствие у спектральной меры σ_f атома в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 остается в силе в более общих ситуациях, например, когда полугруппа T_t действует на пространстве $L^1(\mu)$ или в случае n -параметрической полугруппы.

Теперь рассмотрим некоторые случаи сходимости средних F_t μ -почти всюду. Следующее предложение было рассмотрено для случая равномерных дискретных усреднений в [8; с. 66].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\{f_{\alpha,\tau}, \alpha, \tau \in \mathbb{R}^+\}$ – некоторое множество измеримых функций на пространстве X с $\sup_{\alpha,\tau} |f_{\alpha,\tau}| \in L^p(X)$, а $\varrho \in L^q(\lambda)$ – вероятностная плотность, имеющая ограниченный носитель в отрезке $[a, b]$. Пусть $\theta(t) = Q(t)$. Если при $\alpha, \tau \rightarrow +\infty$ мы имеем $f_{\alpha,\tau}(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_{\Theta(t)s,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds = \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x)$$

для μ -почти всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [3] было получено доказываемое равенство для $f_{\Theta(t)s,t}(x) \equiv f(x)$, поэтому можно считать, что $f \equiv 0$. Проведем рассуждения для $\Theta(t) = t$, поскольку в общем случае рассуждения аналогичны. Имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{+\infty} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{rt^{-1}} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_{rt^{-1}}^{+\infty} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Положим $g_r = \sup_{\alpha \geq r, \tau \geq r} |f_{\alpha,\tau}|$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{rt^{-1}} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| &\leq \left(\int_0^{rt^{-1}} f_{ts,t}(T_{ts}x) ds \right)^{p-1} \left(\int_0^{rt^{-1}} \varrho(s) ds \right)^{q-1} \\ &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^r g_0(T_s x) ds \right)^{p-1} \left(\int_0^{rt^{-1}} \varrho(s) ds \right)^{q-1}, \end{aligned}$$

при этом последнее выражение стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Пользуясь предыдущими оценками, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{+\infty} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_{rt^{-1}}^{+\infty} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_{rt^{-1}}^{+\infty} g_r(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{+\infty} g_r(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| = \mathbb{E}^{\mathcal{T}} g_r(x), \end{aligned}$$

где $E^{\mathcal{T}} g_r$ есть условное математическое ожидание f относительно σ -алгебры T_t -инвариантных множеств. Пользуясь тем, что $\int_X g_r(x) \mu(dx) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, окончательно получаем, что

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{+\infty} f_{ts,t}(T_{ts}x) \varrho(s) ds \right| = 0.$$

Предложение доказано.

В работе [9] (см. также [10]) был получен результат, обобщающий эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина (см. [7; с. 17]), согласно которому для всякой эргодической полугруппы T_t и интегрируемой функции $f \in L^1(\mu)$ найдется множество $A \in X$ с $\mu(A) = 1$ такое, что при $x \in A$ и $\lambda \in [0, 2\pi)$ существует предел средних

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\lambda s} f(T_s x) ds$$

при $T \rightarrow +\infty$, причем если полугруппа T_t является слабо перемешивающей и $\lambda \neq 0$, то этот предел равен 0. Рассмотрим средние

$$F_{t,\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{i\lambda ts} f(T_{ts}x) \nu(ds).$$

Приведем утверждение о сходимости средних $F_{t,\lambda}$, которое доказывается аналогично случаю усреднений Козлова–Трещева для эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина (см. [3; теорема 3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть T_t – слабо перемешивающая полугруппа. Тогда для всякой функции $f \in L^p(\mu)$ и всякой вероятностной плотности $\varrho \in L^q(\lambda)$ с ограниченным носителем на $[0, +\infty)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p, q \in [1, +\infty]$, найдется такое множество $A \in X$, что $\mu(A) = 1$ и для всех $x \in A$ и $\lambda \in (0, 2\pi)$ выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda ts} f(T_{ts}x) \varrho(s) ds = 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ определено измеримое отображение T , сохраняющее меру μ . Пусть $g: X \rightarrow (0, +\infty)$ – измеримая функция. Напомним конструкцию, позволяющую построить полупоток T_t на пространстве Ω_g под графиком g , сохраняющий меру μ_g , полученную ограничением меры $\mu \otimes \lambda$ на Ω_g , где λ – мера Лебега. Полугруппа T_t действует следующим образом: если $t \leq f(x) - s$, то $T_t(x, s) = (x, s + t)$, иначе отождествляют все точки вида $(y, f(y))$ и $(Ty, 0)$ и полагают $T_t(x, s) = (T^k x, u_k)$, где

$$u_k := \sum_{i=1}^k f(T^i) - s - t, \quad k := \min\{l : u_l \geq 0\}.$$

Согласно результату Рудольфа (см. [8]) любой непериодический полупоток с точностью до метрического изоморфизма представляется как полупоток под графиком измеримой на X функции, принимающей только два значения. Пусть $g \equiv 1$ на X и f – измеримая функция на Ω_g . В случае, когда f зависит только от $x \in X$, усреднения Козлова–Трещева выражаются в терминах дискретных неравномерных усреднений общего вида

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} f(T^k x).$$

Действительно, пусть ϱ – вероятностная плотность на $[0, +\infty)$. Тогда выполнено равенство

$$\int_0^{+\infty} T_{ns} f(x, \tau) \varrho(s) ds = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k f(x) \int_{(k-\tau)/n}^{(k-\tau+1)/n} \varrho(s) ds.$$

Проверим это равенство. В нашем случае $T_t(x, \tau) = (T^{[t+\tau]}, \{t+\tau\})$; значит, для всякого k имеем

$$T_{ns}(x, \tau) = \begin{cases} (T^{[ns]+1}x, (\tau + \{ns\}) \bmod 1), & \text{при } s \in \left(\frac{k-\tau}{n}, \frac{k}{n}\right), \\ (T^{[ns]}x, (\tau + \{ns\}) \bmod 1), & \text{при } s \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k-\tau}{n}\right). \end{cases}$$

Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} T^{ns} f(x, \tau) \varrho(s) ds &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{(k-1)/n}^{(k-\tau)/n} T^{k-1} f(x) \varrho(s) ds + \int_{(k-\tau)/n}^{k/n} T^k f(x) \varrho(s) ds \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} T^k f(x) \int_{(k-\tau)/n}^{(k-\tau+1)/n} \varrho(s) ds. \end{aligned}$$

Таким способом из полученных выше результатов о неравномерном усреднении для полупотоков можно вывести новые способы усреднения для дискретного времени.

Автор благодарен профессору В. И. Богачеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. V. Kozlov, D. V. Treschev, *J. Dynam. Control Systems*, **9**:3 (2003), 449–453.
 [2] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 496–506. [3] В. И. Богачев, А. В. Королев, *Докл. РАН*, **412**:3 (2007), 295–301. [4] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, V. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 2007. [5] В. И. Богачев, А. В. Королев, А. Ю. Пилипенко, *Докл. РАН*, **432**:4 (2010), 439–442. [6] А. В. Королев, *Укр. матем. журн.*, **62**:5 (2010), 702–707.
 [7] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
 [8] U. Krengel, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, **12**:4 (1976), 319–338. [9] N. Wiener, A. Wintner, *Amer. J. Math.*, **63**:4 (1941), 794–824. [10] N. Wiener, A. Wintner, *Amer. J. Math.*, **63**:2 (1941), 415–426.

А. В. Королев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: akorolevpro@mail.ru

Поступило

01.02.2010