Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, О нижней оценке функции Ван дер Вардена, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:24:16

О нижней оценке функции Ван дер Вардена

Д. А. Шабанов

1. Введение и история задачи. В 1927 г. Ван дер Варден доказал (см. [1]) знаменитую теорему об арифметических прогрессиях. Данная теорема утверждает, что в любой раскраске множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины. Теорема Ван дер Вардена является одним из фундаментальных результатов теории Рамсея. Ее эквивалентная формулировка звучит следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 (Ван дер Варден, 1927). *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \geq 2$ существует такое минимальное число $W(n, r)$, что для каждого натурального $N \geq W(n, r)$ в любой r -цветной раскраске множества $\{1, 2, \dots, N\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n .*

Функцию $W(n, r)$ из теоремы 1 принято называть *функцией Ван дер Вардена*. Оригинальное доказательство теоремы Ван дер Вардена дает очень слабые оценки $W(n, r)$ даже для $r = 2$, из него лишь следует, что $W(n, 2) \leq A(n)$, где $A(n)$ – это функция Аккермана. Подробнее об этом можно прочитать в обзоре [2]. Наилучшая верхняя оценка в общем случае была получена Гауэрсом (см. [3]). Он доказал, что если $r \leq (\log_2 \log_2 N)^{c_n}$, где $c_n = 2^{-2^{n+9}}$, то $W(n, r) \leq N$. В частном случае $n = 3$ данная оценка была улучшена Грэмом и Шолимоши (см. [4]):

$$W(3, r) \leq 2^{2^{cr}},$$

где c – некоторая абсолютная положительная константа.

Первая нетривиальная нижняя оценка для $W(n, r)$ была получена Эрде́шем и Радо в 1952 г. (см. [5]). Они доказали, что

$$W(n, r) \geq \sqrt{2(n-1)r^{n-1}}.$$

В дальнейшем эта оценка для больших (по сравнению с n) значений r была улучшена Мозером в 1960 г. (см. [6]), который для некоторой абсолютной константы $C > 0$ обосновал неравенство

$$W(n, r) \geq nr^{C \ln r}. \quad (1)$$

Результат Эрде́ша и Радо был асимптотически улучшен Шмидтом (см. [7]). Он доказал существование такой абсолютной константы $c > 0$, что для всех $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполнено

$$W(n, r) \geq r^{n - c\sqrt{n \ln n}}. \quad (2)$$

В частном случае, когда n – простое число, а $r = 2$, Берлекамп установил (см. [8]) соотношение $W(n+1, 2) > n2^n$.

Последние наилучшие нижние оценки в задаче о $W(n, r)$ были получены с помощью применения вероятностных методов в теории гиперграфов. Напомним ряд определений. *Гиперграфом* H называется пара $H = (V, E)$, где V – некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин*, а E – совокупность различных подмножеств множества V , которые называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -равномерным*,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294) программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8784.2010.1) и гранта Президента РФ (грант № МК-3429.2010.1).

если каждое его ребро состоит ровно из n вершин. Раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра гиперграфа являются неоднородными. *Хроматическим числом* (обозначение $\chi(H)$) гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множества вершин. Если $\chi(H) \leq r$, то H называется *r -раскрашиваемым*.

В знаменитой совместной работе Эрдёша и Ловаса (см. [9]) был установлен следующий результат, дающий достаточное условие r -раскрашиваемости n -равномерного гиперграфа.

ТЕОРЕМА 2 (Эрдёш, Ловас, 1973). *Если степень каждой вершины n -равномерного гиперграфа H не превосходит $r^{n-1}/(4n)$, то $\chi(H) \leq r$.*

Доказательство данной теоремы в существенной степени опиралось на известное утверждение теории вероятностей, называемое локальной леммой, которая как раз впервые и была получена в [9]. Следствием из теоремы 2 явилась оценка функции $W(n, r)$:

$$W(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4n} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (3)$$

Очевидно, что оценка (3) асимптотически улучшает предыдущий результат Шмидта (2). В 1990 г. Сабо получил [10] наилучшую на сегодняшний день нижнюю оценку $W(n, r)$ в случае $r = 2$. Он доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $W(n, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon}$. Таким образом, фактически Сабо обосновал неравенство вида

$$W(n, 2) \geq 2^n n^{-|o(1)|}. \quad (4)$$

2. Новые результаты. Основным результатом данной работы является новая асимптотическая нижняя оценка функции Ван дер Вардена $W(n, r)$. Сформулируем сначала улучшение теоремы 2 Эрдёша и Ловаса.

ТЕОРЕМА 3. *Если степень каждой вершины n -равномерного гиперграфа H не превосходит величины*

$$d = \left(\frac{\sqrt{6}-2}{4}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}},$$

то $\chi(H) \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы основано на применении локальной леммы, а также метода случайной раскраски вершин гиперграфа в r цветов, который был предложен в работе [11].

Из теоремы 3 вытекает следующая нижняя оценка функции Ван дер Вардена $W(n, r)$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$W(n, r) \geq \left(\frac{\sqrt{6}-2}{4}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Несложно понять, что полученная нами оценка (5) улучшает оценку Эрдёша и Ловаса (3) при $n \geq 15$. Но, в то же время, (5) асимптотически хуже результата Сабо (4), если $r = 2$. В случае же, когда параметр r экспоненциально велик по сравнению с n ($n = o(\ln r)$), наилучшей остается оценка Мозера (1). В следующем пункте мы выведем теорему 4 из теоремы 3.

3. Доказательство нижней оценки функции Ван дер Вардена. Итак, пусть заданы $n \geq 3$ и $r \geq 2$. Пусть также $N \geq n$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим гиперграф

$$H_N = (V_N, E_N), \quad V_N = \{1, 2, \dots, N\},$$

а E_N – это совокупность всех арифметических прогрессий длины n , которые содержатся в множестве V_N . Ясно, что H_N – n -равномерный гиперграф. Из построения также вытекает, что для каждого N гиперграф H_N вложен в гиперграф H_{N+1} (в том смысле, что $V_N \subset V_{N+1}$ и $E_N \subset E_{N+1}$). Тогда

$$\chi(H_N) \leq \chi(H_{N+1}). \quad (6)$$

Далее, из определения величины $W(n, r)$ следует, что

$$W(n, r) = \min\{N : \chi(H_N) > r\}. \quad (7)$$

Рассмотрим произвольное число $x \in V_N$. Сколько арифметических прогрессий длины n из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ содержат x ? Каждая такая прогрессия однозначно определяется порядковым номером x в этой прогрессии, а также разностью прогрессии. Порядковый номер может меняться от 1 до n , а разность – от 1 до $(N-1)/(n-1)$. Таким образом, для любой вершины $x \in V_N$ ее степень в гиперграфе H_N не превосходит $n(N-1)/(n-1)$. Поэтому из теоремы 3 следует, что если выполняется неравенство

$$N \leq \left(\frac{\sqrt{6}-2}{4} \right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1,$$

то $\chi(H_N) \leq r$. Из данного соотношения, а также из (6) и (7) получаем окончательную оценку (5) функции Ван дер Вардена. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. L. van der Waerden, *Nieuw Archief*, **15** (1927), 212–216. [2] И. Д. Шкредов, *УМН*, **61:6** (2006), 111–178. [3] W. T. Gowers, *Geom. Funct. Anal.*, **11:3** (2001), 465–588. [4] R. Graham, J. Solymosi, *Topics in Discrete Mathematics*, Algorithms Combin., **26**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 129–132. [5] P. Erdős, R. Rado, *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), 417–439. [6] L. Moser, *Canad. Math. Bull.*, **3** (1960), 23–25. [7] W. M. Schmidt, *Duke Math. J.*, **29:1** (1962), 129–140. [8] E. R. Berlekamp, *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 409–414. [9] P. Erdős, L. Lovász, *Infinite and Finite Sets*, v. II (Keszthely, 1973), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1975, 609–627. [10] Z. Szabó, *Random Structures Algorithms*, **1:3** (1990), 343–360. [11] Д. А. Шабанов, *Матем. заметки*, **85:6** (2009), 951–954.

Д. А. Шабанов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gold-amber@yandex.ru

Поступило
10.11.2009