Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Филевич, Об оценке величины исключительного множества в лемме о логарифмической производной, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 603–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 04:35:38

УДК 517.53

ОБ ОЦЕНКЕ ВЕЛИЧИНЫ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА В ЛЕММЕ О ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

П. В. Филевич

В работе получена точная оценка величины исключительного множества в лемме о логарифмической производной.

Библиография: 6 названий.

1°. Как известно, ряд соотношений между характеристиками мероморфных и, в частности, целых функций выполняются вне некоторого исключительного множества $E \subset [1; +\infty)$, о котором известно чаще всего, что оно имеет конечную меру или конечную логарифмическую меру. Такими являются, например, соотношения между максимумом модуля $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, максимальным членом $\mu_f(r) = \max\{|f^{(n)}(0)/n!| \times r^n : n \geq 0\}$ и центральным индексом $\nu_f(r) = \max\{n \geq 0 : |f^{(n)}(0)/n!| r^n = \mu_f(r)\}$ в известных теоремах Вимана–Валирона для целых функций (см., например, [1], [2, с. 17–29]), соотношения между характеристиками Неванлинны в лемме о логарифмической производной [3, с. 122] и второй основной теореме Неванлинны о распределении значений [3, с. 127] для мероморфных функций.

Из слов О. Б. Скаскива автору известно, что в устном разговоре с ним И. В. Островский ставил вопрос (открытый и сейчас) о возможности получения точной оценки величины исключительного множества $E(\varepsilon, f)$ в следующем неравенстве Вимана–Валирона:

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r) \quad (r \geq 1, \quad r \notin E(\varepsilon, f)).$$

(Классическая оценка такая: $\int_{E(\varepsilon, f)} r^{-1} dr < +\infty$, т. е. $E(\varepsilon, f)$ имеет конечную логарифмическую меру для любого $\varepsilon > 0$ и любой целой функции f .) Понятно, что аналогичные вопросы можно рассматривать и по отношению к исключительным множествам в других соотношениях. В этой работе получена точная оценка величины исключительного множества в лемме о логарифмической производной.

2°. Пусть H – класс положительных, непрерывных, возрастающих к $+\infty$ на $[1; +\infty)$ действительных функций, а L – подкласс выпуклых относительно $\ln r$ на $[0; +\infty)$ функций из H . Как обычно,

$$\rho(h) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln r}$$

– порядок функции $h \in H$ ($0 \leq \rho(f) \leq +\infty$). Порядок мероморфной функции f – это порядок ее характеристической функции Неванлинны $T_f \in L$.

Пусть $m_f(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$ – характеристическая функция приближения мероморфной функции f к ∞ . Тогда по лемме о логарифмической производной [3, с. 122] для любой мероморфной функции f выполняется оценка

$$m_{f'/f}(r) = O(\ln T_f(r) + \ln r) \quad (r \rightarrow +\infty, \quad r \notin E(f)), \quad (1)$$

где $E(f)$ – исключительное множество, отсутствующее в (1) для функций конечного порядка, т. е. для таких функций $m_{f'/f}(r) = O(\ln r)$ ($r \rightarrow +\infty$).

Хейман [4] (см. также [3, с. 123]), опровергая известное предположение Неванлинны, показал, что для функций бесконечного порядка исключительное множество в соотношении (1), вообще говоря, существует. В связи с этим вопрос о получении точной оценки величины исключительного множества выглядит достаточно естественным. Лучшая из известных оценок приведена в [2, с. 37]: для любой мероморфной функции f множество $E(f)$ в соотношении (1) можно подобрать так, что

$$\int_{E(f)} r^{n-1} dr < +\infty, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

Следующая теорема указывает на невозможность дальнейшего улучшения этой оценки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h \in H$. Тогда для того чтобы для любой мероморфной функции f существовало множество $E(f) \subset [1; +\infty)$ такое, что одновременно выполняются соотношения (1) и $\int_{E(f)} h(r) dr < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(h) < +\infty$.

Достаточность условия $\rho(h) < +\infty$ следует из оценки (2). Необходимость получим из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $h \in H$, $\rho(h) = +\infty$. Тогда существует целая функция f такая, что:

- 1) $\nu_f(r) \leq h(r)$ ($r \geq r_0$);
- 2) $M_f(r) \leq (2 + o(1))\mu_f(r)$ ($r \rightarrow +\infty$);
- 3) для множества $E_1(\varepsilon, f) = \{r > 1 : T_{f'}(r) > (1 + \varepsilon)T_f(r)\}$ при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\int_{E_1(\varepsilon, f)} h(r) dr = +\infty$.

Доказательство теоремы 2 будет приведено ниже. Сначала покажем, как из теоремы 2 получить необходимость условия $\rho(h) < +\infty$ в теореме 1. Пусть $h \in H$, $\rho(h) = +\infty$, а f – целая функция, обладающая свойством 3) из теоремы 2. Если теперь предположить, что для функции f соотношение (1) выполняется с множеством $E(f)$, для которого $\int_{E(f)} h(r) dr < +\infty$, то такая же оценка выполняется и для множества $E_2(\varepsilon, f) = \{r > 1 : m_{f'/f}(r) > \varepsilon T(r, f)\}$ при любом $\varepsilon > 0$. (Это следует из того, что функция f , как легко видеть, является трансцендентной, а для таких функций $T_f(r)/\ln r \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.) Далее, так как

$$T_{f'}(r) = m_{f'}(r) \leq m_f(r) + m_{f'/f}(r) = T_f(r) + m_{f'/f}(r), \quad (3)$$

то множество $E_1(\varepsilon, f)$ содержится в множестве $E_2(\varepsilon, f)$, т. е. $\int_{E_1(\varepsilon, f)} h(r) dr < +\infty$. Получаем противоречие, поэтому в предположении справедливости теоремы 2 теорема 1 доказана.

Отметим еще одно следствие из теоремы 2. Как известно, рост мероморфной функции f часто связывают с ростом ее характеристики $T_f \in L$ (это видно, например, из определения порядка мероморфной функции). Обозначим для любой $l \in L$ через $M(l)$ множество мероморфных функций f таких, что $T_f(r) \leq l(r)$ ($r \geq r_1(f)$). Главный вывод из следующей теоремы состоит в том, что существуют мероморфные функции бесконечного порядка и сколь угодно медленного роста, для которых не упоминать об исключительном множестве в соотношении (1) нельзя.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $l \in L$. Для того чтобы для любой $f \in M(l)$ выполнялось соотношение

$$m_{f'/f}(r) = O(\ln T_f(r) + \ln r) \quad (r \rightarrow +\infty), \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\rho(l) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия $\rho(l) < +\infty$ в теореме 3 очевидна, поскольку тогда каждая функция $f \in M(l)$ имеет конечный порядок. Докажем необходимость.

Пусть $l \in L$, $\rho(l) = +\infty$, $k(r) = rl'(r)$ ($r \geq 0$), т.е. $k(r)$ – производная по $\ln r$ от $l(r)$. Ясно, что $k \in H$, причем, как хорошо известно (см., например, [3, с. 63]), $\rho(k) = +\infty$.

Положим $h(r) = (k(r))^{1/2}$ ($r \geq 0$). Тогда $h \in H$, $\rho(h) = +\infty$. Пусть, далее, f – целая функция из теоремы 2 со свойствами 1)–3). Для нее соотношение (4), понятно, не выполняется. Легко видеть, что $f \in M(l)$. Действительно, так как $k(r)/\nu_f(r) \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$), а $\nu_f(r)$ – производная по $\ln r$ от $\ln \mu_f(r)$, то, воспользовавшись правилом Лопиталя, получаем $l(r)/\ln \mu_f(r) \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$). Тогда в силу неравенства $T_f(r) \leq \ln^+ M_f(r)$ и свойства 2) функции $f \in M(l)$ и теорема 3 доказана.

3°. Докажем теорему 2. Построение функции f будем вести хорошо известным методом, которым пользуется и Хейман [4] (см. также [3, с. 123–124]) для построения целой функции с исключительным множеством в соотношении (1). Идея оценки величины исключительного множества заимствована из работы автора [5].

Пусть $h \in H$, $\rho(h) = +\infty$. Тогда, очевидно, существует последовательность действительных чисел $\{c_n\}$ такая, что $c_0 \geq 2$, $c_{n+1} \geq 2c_n$ при $n \geq 0$, $h(c_0) \geq 2$, $\ln^{-1} c_{n+1} \times \ln[h(c_{n+1})] \geq [h(c_n)] + 1$ при $n \geq 0$. Рассматривая последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n = [h(c_{n-1})]$ при $n \geq 1$, получаем, что

$$\lambda_{n+1} \geq c_n^{\lambda_n+1} \geq 2\lambda_n. \quad (5)$$

Пусть $a_0 = 1$ и $a_n = (c_0^{\lambda_1-\lambda_0} c_1^{\lambda_2-\lambda_1} \dots c_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}})^{-1}$ при $n \geq 1$. Тогда, воспользовавшись неравенствами (5), имеем $a_n \leq c_{n-1}^{-(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \leq c_{n-1}^{-\lambda_n/2}$. Следовательно, функция $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$ – целая. Докажем, что эта функция и является искомой.

Действительно, так как $a_n/a_{n+1} = c_n^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$ при $n \geq 0$, то непосредственно легко проверить (или см., например, [6]), что $\mu_f(r) = a_n r^{\lambda_n}$ и $\nu_f(r) = \lambda_n$ для всех $r \in [c_{n-1}; c_n]$ при любом $n \geq 1$. Отсюда получаем $\nu_f(r) \leq h(r)$ ($r \geq c_0$), т.е. свойство 1) функции f установлено.

Далее, при $n \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \right) \lambda_k a_k c_n^{\lambda_k} &= \mu_f(c_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \frac{c_k^{\lambda_{k+1}-\lambda_k} c_{k+1}^{\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}} \dots c_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}}{c_n^{\lambda_n-\lambda_k}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \lambda_k \frac{c_n^{\lambda_k-\lambda_{n+1}}}{c_{k-1}^{\lambda_k-\lambda_{k-1}} c_{k-2}^{\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2}} \dots c_{n+1}^{\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}}} \right) \\ &\leq \mu_f(c_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left(\frac{1}{2} \right)^{\lambda_n-\lambda_k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \lambda_k \left(\frac{1}{2} \right)^{\lambda_k-\lambda_{n+1}} \right) \\ &= o(\mu_f(c_n)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $M_f(c_n) = (2 + o(1))\mu_f(c_n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Так как $\ln M_f(r)$ и $\ln \mu_f(r)$ — соответственно выпуклая и линейная функции относительно $\ln r$ на отрезке $[c_n; c_{n+1}]$, то максимум разности $\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)$ (а, следовательно, и частного $M_f(r)/\mu_f(r)$) на этом отрезке достигается в одной из точек c_n или c_{n+1} . Поэтому

$$M_f(r) = (2 + o(1))\mu_f(r) \quad (r \rightarrow +\infty), \quad (6)$$

и тем самым свойство 2) функции f доказано.

Перейдем к доказательству свойства 3). При $n \rightarrow +\infty$ равномерно по $\varphi \in [0; 2\pi)$, согласно неравенствам (5) выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |f'(c_n e^{i\varphi})| &\geq \lambda_{n+1} a_{n+1} c_n^{\lambda_{n+1}-1} \lambda_n a_n c_n^{\lambda_n-1} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \right) \lambda_k a_k c_n^{\lambda_k} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - o(1) \right) \mu_f^2(c_n). \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (6), откуда получаем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_{f'}(r)}{T_f(r)} \geq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_{f'}(r)}{\ln \mu_f(r)} \geq 2.$$

С другой стороны, из (3) и леммы о логарифмической производной следует, что

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_{f'}(r)}{T_f(r)} \leq 1.$$

Зафиксируем, далее, любые ε , δ и α , удовлетворяющие неравенствам $0 < \varepsilon < \delta < \alpha < 1$. Так как $T_f(r) \leq (1 + \delta)(1 + \varepsilon)^{-1} \ln \mu_f(r)$ при $r \geq r_2 \geq c_0$, то $E_3(\delta, f) = \{r > r_2 : T_{f'}(r) > (1 + \delta) \ln \mu_f(r)\}$ — подмножество множества $E_1(\varepsilon, f)$. Отметим, что множество $E_3(\delta, f)$ является открытым, в связи с чем его можно представить в виде объединения счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Выберем из этого объединения бесконечную последовательность $\{(x_n; y_n)\}$ интервалов, для которых при любом $n \geq 0$ выполнены условия:

- 1) $x_n < y_n < x_{n+1}$;
- 2) $T_{f'}(t_n) = (1 + \alpha) \ln \mu_f(t_n)$ для некоторой точки $t_n \in (x_n; y_n)$.

Ясно, что $T_{f'}(x_n) = (1 + \delta) \ln \mu_f(x_n)$, $T_{f'}(y_n) = (1 + \delta) \ln \mu_f(y_n)$. Поэтому

$$\ln \mu_f(y_n) - \ln \mu_f(x_n) > \frac{T_{f'}(y_n)}{1 + \delta} - \frac{T_{f'}(x_n)}{1 + \alpha} > (\alpha - \delta) T_{f'}(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Следовательно,

$$\int_{E_1(\varepsilon, f)} h(r) dr \geq \int_{\cup_{n=0}^{+\infty} (x_n; y_n)} \frac{\nu_f(r)}{r} dr = \int_{\cup_{n=0}^{+\infty} (x_n; y_n)} d \ln \mu_f(r) = +\infty,$$

и теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hayman W. K. The local growth of power series; a survey of the Wiman–Valiron method // Canad. Math. Bull. 1974. V. 17. № 3. P. 317–358.
- [2] Виттих Г. В. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.
- [3] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
- [4] Hayman W. K. On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. A. 1965. V. 14. P. 93–128.
- [5] Філевич П. В. До теореми Лондона про співвідношення Бореля для цілих функцій // Укр. матем. ж. 1998. Т. 50. № 11. С. 1578–1580.
- [6] Шеремета М. Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 215–226.

Львовский государственный университет им. И. Франко

Поступило
17.02.1999