Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 305–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:49:47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Монотонно линейно связанное чебышёвское множество является солнцем

А. Р. Алимов

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства X называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x$ ее ближайших точек из M состоит из одной точки. К примеру, в $C[0, 1]$ хорошо известными примерами чебышёвских множеств являются подпространство многочленов степени не выше t и множество рациональных дробных функций $R_{n,m}$.

Подмножество M пространства X называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что

$$y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x] \quad \text{для всех } \lambda \geq 0; \quad (1)$$

множество M называется *строгим солнцем*, если $P_M x \neq \emptyset$ для любой точки $x \in X \setminus M$ и утверждение (1) имеет место любого $y \in P_M x$. Замкнутое множество M называется α -солнцем, если для любой точки $x \notin M$ существует луч ℓ с вершиной x такой, что для любого $z \in \ell$ имеет место равенство

$$\rho(z, M) = \|z - x\| + \rho(x, M),$$

где $\rho(x, M)$ – расстояние от точки x до множества M . Всякое солнце является α -солнцем.

В конечномерном пространстве X каждое чебышёвское множество является линейно связным солнцем. В бесконечномерном случае чебышёвское множество не обязано быть ни солнцем, ни быть связным (см. [1], [2]). Отметим также, что Кощеевым построен пример несвязного солнца в бесконечномерном банаховом пространстве.

Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Следуя [1], говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \text{ext } S^*$; здесь $\text{ext } S^*$ – множество крайних точек единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* .

Замкнутое множество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [3], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой $k(\cdot) \subset M$.

Беренс и Хетцельт [4] установили, что (в наших терминах) подмножество из $\mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда оно монотонно линейно связно. Автором в [3] показано, что монотонно линейно связанное чебышёвское множество в пространстве $C(Q)$ является солнцем, и установлено, что ограниченно компактное строгое солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в $C(Q)$ монотонно линейно связно (Q – метризуемый компакт). В [5] установлено, что произвольное солнце в c_0 монотонно линейно связно и, обратно: произвольное аппроксимативно компактное монотонно линейно связанное множество в c_0 является солнцем. Теорема 1 позволяет расширить последний результат:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00442).

монотонно линейно связное множество в c_0 является α -солнцем. О связности чебышёвских множеств и солнц см. [2]–[7] и цитированные там работы.

Всюду ниже $B(x, r)$ ($\dot{B}(x, r)$) – замкнутый (открытый) шар с центром x и радиусом r , $B := B(0, 1)$ – единичный шар, $\dot{B} := \dot{B}(0, 1)$.

Пусть $f \in \text{ext } S^*$ – крайняя точка единичной сферы S^* сопряженного пространства. Порождаемая функционалом f (аффинная) гиперплоскость $\{x \in X \mid f(x) = d\}$ называется *экстремальной гиперплоскостью*.

Зингеру и Гаркави принадлежит удачная идея использовать в общих теоремах экстремальные функционалы единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* . В частности, Зингером получен следующий результат [8]: Пусть $G \subset X$ – линейное подпространство, $x \in X \setminus G$. Предположим, что для x существует элемент наилучшего приближения g_0 из G . Тогда найдется экстремальная гиперплоскость H_0 , проходящая через точку g_0 , отделяющая 0 от шара $B(x, \|x - g_0\|)$ и являющаяся опорной к нему.

Как следствие для произвольного $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{f \in S^*} f(x) = \sup_{f \in \text{ext } S^*} f(x); \quad (2)$$

и, далее, пусть $y, x \in X$, $y \neq x$, $p := (y - x)/\|y - x\|$. Обозначим через Σ_p множество функционалов из S^* , достигающих в точке p своего максимума на единичном шаре B . Тогда [9; лемма 3.1]

$$\dot{K}(y, x) = \{z \mid f(z) < f(y) \text{ для всех } f \in \Sigma_p\} = \{z \mid f(z) < f(y) \text{ для всех } f \in \Sigma_p \cap \text{ext } S^*\}. \quad (3)$$

Здесь

$$\dot{K}(y, x) := \bigcup_{r>0} \dot{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|)$$

– открытый опорный конус к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y (см. [9], [10]).

Также из указанного результата Зингера следует, что любая точка, не лежащая в замкнутом шаре, отделима от него посредством экстремальной (аффинной) гиперплоскости.

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Монотонно линейно связное множество в линейном нормированном пространстве является α -солнцем.*

В качестве следствия из теоремы 1 мы имеем

ТЕОРЕМА 2. *Монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему 2 можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений связности. В частном случае пространства типа $C(Q)$ теорема 1 была получена в [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть M – монотонно связное множество в X , не являющееся α -солнцем. Тогда согласно [10; лемма 3] найдутся точки $x \notin M$ и $y \in S(x, \rho(x, M))$ такие, что $\dot{K}(y, x) \cap M \neq \emptyset$. Не ограничивая общности, считаем, что $x = 0$ и $\rho(x, M) = 1$. Пусть $u \in M \cap \dot{K}(y, x)$, и пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, – непрерывная монотонная кривая, соединяющая y и u , $k(0) = y$, $k(1) = u$. По определению опорного конуса найдется $r > 0$ такое, что $u \in \dot{B}(z_r, \alpha_r) \subset \dot{K}(y, x)$, $y \in S(z_r, \alpha_r)$, где $z_r = -ry + (r+1)x$, $\alpha_r = (r+1)$. Обозначим $\dot{k}(\cdot) := k(\cdot) \setminus \{u, y\}$. Тогда, в силу (2) $\dot{k}(\cdot) \subset \dot{B}(z_r, \alpha_r) \subset \dot{K}(y, x)$.

Предположим, что $\dot{k}(\cdot) \cap \dot{B} = \emptyset$. Выберем последовательность точек $v_n \in \dot{k}(\cdot)$, $v_n \rightarrow y$. В силу указанного результата Зингера об отделимости экстремальной гиперплоскостью для каждого n найдутся функционал $f_n \in \text{ext } S^*$ и число $d_n \geq 1$ такие, что экстремальная

гиперплоскость $\{z \mid f_n(z) = d_n\}$ отделяет точку v_n от шара B . Так как кривая $k(\cdot)$ монотонна, то $f_n(v_n) \in [f_n(y), f_n(u)]$. Поскольку шар B^* w^* -компактен, последовательность (f_n) имеет в слабой топологии предельную точку $f \in S^*$. Поскольку $d_n \rightarrow 1$, то $f(y) = 1$ и $f(u) \geq 1$. В силу (3) последнее противоречит исходному предположению $u \in \mathring{K}(y, x)$.

Итак, случай $\mathring{k}(\cdot) \cap \mathring{B} = \emptyset$ невозможен. Но случай $\mathring{k}(\cdot) \cap \mathring{B} \neq \emptyset$ также невозможен, поскольку по предположению $\mathring{B} \cap M = \emptyset$, а $k(\cdot) \subset M$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ответ на обратный вопрос в общем случае не известен. В этой связи упомянем, что существуют примеры конечномерных пространств любой размерности ≥ 3 , в которых существует не монотонно линейно связное чебышёвское множество (конечно, являющееся солнцем). В качестве таких пространств можно взять пространство со свойством $\overline{\text{ext}} S^* = S^*$. Феллис [11] показал, что в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. Далее, для любого $n \geq 3$ Царьков [12] построил пример пространства X_n размерности n со свойством $\overline{\text{ext}} S^* = S^*$, содержащего неограниченное невыпуклое чебышёвское множество M ; при этом любое ограниченное чебышёвское множество в X_n выпукло. Таким образом, такое множество M служит примером не монотонно линейно связного чебышевского солнца. Отметим также, что в двумерном пространстве каждое чебышёвское множество (и даже солнце) монотонно линейно связно.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания и указание на возможность рассмотрения изучаемого вопроса в большей общности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Brosowski, F. Deutsch, J. Lambert, P. D. Morris, *Math. Ann.*, **212**:2 (1974), 89–101.
- [2] М. И. Карлов, И. Г. Царьков, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 967–978.
- [3] А. Р. Алимов, *Матем. сб.*, **197**:9 (2006), 3–18. [4] H. Berens, L. Hetzelt, *Aequationes Math.*, **27**:3 (1984), 274–287. [5] А. Р. Алимов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 3–18.
- [6] И. Г. Царьков, *Матем. заметки*, **40**:2 (1986), 174–196. [7] В. А. Кошечев, *Матем. заметки*, **80**:5 (2006), 790–792. [8] I. Singer, *Math. Ann.*, **159**:5 (1965), 344–355. [9] Л. П. Власов, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66. [10] Е. В. Ошман, *Изв. вузов. Матем.*, 1970, № 9, 78–82.
- [11] R. R. Phelps, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 976–983. [12] И. Г. Царьков, *Матем. заметки*, **36**:1 (1984), 73–87.

А. Р. Алимов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alexey.alimov@gmail.com

Поступило

24.02.2010

Исправленный вариант

28.04.2011