Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Рос-
совский, О спектральной устойчивости функционально-
дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2011,
том 90, выпуск 6, 885–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:38:42

О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений

Л. Е. Россовский

В звездной ограниченной области рассматривается краевая задача для эллиптического функционально-дифференциального уравнения со сжатием и растяжением аргументов искомой функции в старшей части. Получены оценки изменения собственных значений оператора задачи при внутренних деформациях области.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Краевые задачи для эллиптических и сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ изучались в [1]–[3]. Некоторые спектральные свойства задачи Дирихле – дискретность спектра, полнота и базисность системы корневых функций, были установлены для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений, а также уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов искомой функции [4]. Кроме того, для симметрического дифференциально-разностного оператора был получен главный член спектральной асимптотики [5]. В то же время, вопрос устойчивости собственных значений при возмущении области Ω остается открытым даже в том случае, когда рассматриваемая задача порождает неотрицательный самосопряженный оператор с компактной резольventой в пространстве $L_2(\Omega)$.

Спектральной устойчивостью краевых задач (с разными типами краевых условий) для эллиптических дифференциальных уравнений занимались многие авторы [6]–[10], начиная с известной монографии [11]. В работе [12] предложен единый подход к исследованию спектральной устойчивости общих неотрицательных самосопряженных операторов, использующий вариационные свойства собственных значений и основанный на построении специального *оператора переноса*. Содержательность получаемых на этом пути результатов существенно зависит от регулярности собственных функций (что в значительной степени определяется регулярностью области) невозмущенной задачи и классом рассматриваемых возмущений.

Попытки перенести разработанные методы на функционально-дифференциальные уравнения сталкиваются с определенными трудностями. В разность между

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00268) и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант 2.1.1/5328).

соответствующими вариационными величинами для двух областей (исходной и возмущенной) входят дополнительные новые члены, обусловленные нелокальным характером задачи. В этих членах производные собственных функций интегрируются по некоторым множествам, образованным сдвигами границ как исходной, так и возмущенной областей. При этом геометрическая картина может оказаться достаточно сложной. Но настоящим препятствием является отсутствие априорной гладкости собственных функций. Хорошо известно [1]–[3], что решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений могут иметь сингулярности не только на границе, но и внутри области даже при бесконечно дифференцируемых данных, и такое поведение типично.

В настоящей работе получены некоторые “положительные” результаты об устойчивости собственных значений задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов. С одной стороны, указанный тип уравнений изучен меньше, чем дифференциально-разностные уравнения. Особенно это относится к задаче Неймана, которая всегда интересна с точки зрения спектральной устойчивости. С другой стороны, при некотором естественном техническом предположении (слабый вариант условия звездности) пропадает необходимость громоздких геометрических конструкций. Мы начинаем с вариационной формулы для собственных значений в п. 1. В п. 2 приводятся свойства функциональных операторов, на основе которых в п. 3 формулируются условия неотрицательности и дискретности спектра задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения. Основной результат п. 3 – теорема о внутренней гладкости собственных функций. Пункт 4, являющийся центральным местом работы, содержит оценки изменения собственных значений под действием малых внутренних возмущений $\Omega' \subset \Omega$ области Ω . Относительно свойства полунепрерывности собственных значений (теорема 2) малость возмущения означает, что мера Лебега $|\Omega \setminus \Omega'|$ мала. Для получения обратной оценки некоторые дополнительные ограничения накладываются как на Ω , так и на класс возмущений Ω' . Заключительный п. 5 посвящен обобщениям с точки зрения структуры уравнения.

Напомним известную вариационную формулу, являющуюся основой для сравнения собственных значений. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^N$, обладающая тем свойством, что вложение пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ компактно. Через $a[u, v]$ обозначим непрерывную эрмитову полуторалинейную форму на $H^1(\Omega)$, для которой существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$a[u, u] \geq \gamma \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (1)$$

для всех $u \in H^1(\Omega)$. Более того, предположим, что $a[1, v] = a[u, 1] = 0$. Из (1) немедленно следует, что $a[u, u] = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \text{const}$. Для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ рассмотрим абстрактную обобщенную задачу Неймана нахождения функции $u \in H^1(\Omega)$ из равенства $a[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}$, справедливого при любой функции $v \in H^1(\Omega)$. Соответствующая спектральная задача имеет вид

$$a[u, v] = \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (2)$$

Оценка (1) позволяет ввести эквивалентное скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ по формуле

$$(u, v)'_{H^1(\Omega)} = a[u, v] + (u, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда переписываем тождество (2) в виде

$$(u, v)'_{H^1(\Omega)} = (\lambda + 1)(u, v)_{L_2(\Omega)}$$

и, продолжая стандартным образом, убеждаемся при помощи теоремы Рисса в существовании непрерывного линейного оператора $A: L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, $\|A\| \leq 1$, такого, что

$$(f, v)_{L_2(\Omega)} = (Af, v)'_{H^1(\Omega)} \quad \text{для всех } f \in L_2(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega).$$

Его сужение на $H^1(\Omega)$ является в таком случае компактным положительным оператором в $H^1(\Omega)$, и мы приходим к операторному уравнению $u = (\lambda + 1)Au$ в пространстве $H^1(\Omega)$. Из теоремы Гильберта–Шмидта следует, что собственные значения μ оператора A составляют неубывающую бесконечно малую последовательность $1 = \mu_1 > \mu_2 \geq \dots \rightarrow 0$, а соответствующие собственные функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образуют ортогональный базис в $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$. Везде будем предполагать, что $\|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} = 1$. В терминах исходной задачи имеем последовательность собственных значений λ_n ,

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad \lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1.$$

Очевидно, первое собственное значение $\lambda_1 = 0$ простое и ему отвечает собственная функция $\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$. Собственные функции φ_n удовлетворяют соотношениям

$$a[\varphi_n, \varphi_n] = \lambda_n, \quad a[\varphi_m, \varphi_n] = 0, \quad m \neq n. \quad (3)$$

Для произвольного конечномерного подпространства $L \subset H^1(\Omega)$ положим

$$\lambda(L) = \sup\{a[u, u] : u \in L, \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1\}.$$

ЛЕММА 1 (Вариационный принцип для собственных значений). *Собственные значения λ_n задачи (2) могут быть получены по формуле*

$$\lambda_n = \inf\{\lambda(L) : L \subset H^1(\Omega), \dim L = n\}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого общеизвестного утверждения можно найти, например, в [13; гл. 4] (см. также [14; гл. VI]).

2. Функциональные операторы. Зафиксировав $q > 1$, введем операторы

$$Pu(x) = u\left(\frac{x}{q}\right) = u\left(\frac{x_1}{q}, \dots, \frac{x_n}{q}\right), \quad P^{-1}u(x) = u(qx) = u(qx_1, \dots, qx_n).$$

Когда область задания функции u отлична от $\mathbb{R}^N$, продолжаем u нулем в $\mathbb{R}^N$ перед применением к ней операторов $P^{\pm 1}$. Свойства этих операторов в пространствах Лебега, пространствах Соболева и весовых пространствах В. А. Кондратьева для $\mathbb{R}^N$ и ограниченной области рассматривались в [3], [15], [16].

Пусть теперь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая условию $\bar{\Omega} \subset q\Omega$, $\omega \in \mathbb{C}$, а I есть тождественный оператор. Приведенные ниже леммы 2 и 3 следуют непосредственно из результатов [3].

ЛЕММА 2. Если $|\omega| > q^{N/2}$, то $P - \omega I$ непрерывно и взаимнооднозначно отображает пространство $H^r(\Omega)$ на себя для всех $r = 0, 1, \dots$ и обратный оператор задается формулой

$$(P - \omega I)^{-1}u(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-(k+1)}u(q^{-k}x).$$

ЛЕММА 3. Если $|\omega| > q^{-N/2}$, то $P^{-1} - \omega I$ непрерывно и взаимнооднозначно отображает пространство $L_2(\Omega)$ на себя и обратный оператор имеет вид

$$(P^{-1} - \omega I)^{-1}u(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-(k+1)}u(q^k x).$$

Рассмотрим функциональный оператор вида

$$Ru(x) = \sum_k a_k u(q^{-k}x), \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

где k пробегает конечное подмножество целых чисел (обоих знаков). Оператор R удобно изучать через его преобразование Гельфанда [3], [15]

$$r(\omega) = \sum_k a_k \omega^k, \quad \text{где } \omega \in \mathbb{C}, \quad |\omega| = q^{N/2}.$$

Легко видеть, например, что R самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда функция $r(\omega)$ вещественнозначна (выполнены соотношения $a_{-k} = q^{kN} \bar{a}_k$); самосопряженный оператор R положительно определен тогда и только тогда, когда $r(\omega) > 0$. Кроме того, нули $r(\omega)$ в $\mathbb{C}$ дают разложение R в произведение двучленных операторов, изученных в леммах 2 и 3.

Простейший положительно определенный оператор R состоит из трех слагаемых:

$$Ru(x) = au(x) + bu(q^{-1}x) + q^N \bar{b}u(qx), \quad (6)$$

причем $r(\omega) = a + b\omega + q^N \bar{b}\omega^{-1} > 0$, когда $|\omega| = q^{N/2}$. Записав последнее условие как

$$a + bq^{N/2}e^{i\phi} + q^N \bar{b}q^{-N/2}e^{-i\phi} \equiv a + 2q^{N/2}|b|\cos(\phi + \phi_b) > 0, \quad \phi \in \mathbb{R},$$

получаем $a > 2q^{N/2}|b|$. Нули $r(\omega)$ равны

$$\omega_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 - 4q^N|b|^2}}{2b}, \quad \omega_2 = \frac{q^N \bar{b}}{b\omega_1},$$

причем $|\omega_1| > q^{N/2}$, $|\omega_2|^{-1} > q^{-N/2}$. Таким образом,

$$r(\omega) = b\omega^{-1}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = -b\omega_2(\omega - \omega_1)(\omega^{-1} - \omega_2^{-1}),$$

и оператор (6) представляется в виде

$$R = -b\omega_2(P - \omega_1 I)(P^{-1} - \omega_2^{-1} I). \quad (7)$$

Заметим, что числа $b\omega_1$ и $b\omega_2$ вещественные и отрицательные. Понимая под $*$ сопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^N)$, можем записать

$$(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)^* = q^{-N}P - \bar{\omega}_2^{-1}I = q^{-N}P - \frac{\bar{b}\bar{\omega}_1}{q^Nb}I = q^{-N}(P - \omega_1I),$$

откуда приходим к другому представлению

$$R = -b\omega_2q^{-N}(P - \omega_1I)(P - \omega_1I)^*. \quad (8)$$

3. Задача Неймана для функционально-дифференциального уравнения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область, а оператор R имеет вид (6) и выполнено условие $a > 2q^{N/2}|b|$. Введем полуторалинейную форму $a_{R,\Omega}[u, v]$ на пространстве $H^1(\Omega)$ по формуле

$$a_{R,\Omega}[u, v] = \int_{\Omega} R_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \quad (9)$$

Употребляя нижний индекс у R_{Ω} , мы подчеркиваем, что производные u_{x_i} продолжены нулем вне Ω перед применением оператора R .

Относительно областей сделаем несколько принципиальных предположений:

$$\bar{\Omega} \subset q\Omega, \quad (S1)$$

$$H^1(\Omega) \text{ компактно вложено в } L_2(\Omega), \quad (E1)$$

$$H^1(\Omega) \text{ непрерывно вложено в } L_p(\Omega) \text{ для некоторого } p > 2. \quad (E2)$$

Хорошо известно, что условие (E1) выполнено, например, для всякой ограниченной области с непрерывной границей, а для (E2) достаточно, чтобы ограниченная область удовлетворяла условию конуса. Всякая ограниченная звездная относительно шара область удовлетворяет условию конуса. В то же время, свойство (S1) гораздо слабее звездности относительно шара. Число p в (E2) можно взять равным $2N/(N-2)$, если $N > 2$, и любому числу большему 2 при $N = 2$. Условие (E2) нам понадобится в следующем пункте. Соответствующий материал подробно обсуждается в монографии [17].

Поскольку выполнена оценка (1) (с $\gamma = a - 2q^{N/2}|b| > 0$), все утверждения п. 1 справедливы для $a_{R,\Omega}[u, v]$. При заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество

$$a_{R,\Omega}[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega), \quad (10)$$

отвечает (формально записанной) задаче Неймана для функционально-дифференциального уравнения

$$-\operatorname{div}(R_{\Omega} \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (11)$$

$$R_{\Omega} \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (12)$$

где $\nu(x)$ обозначает единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$. Как обычно, (10) получается из (11), (12) интегрированием по Ω уравнения (11), умноженного на произвольную функцию v , и последующим применением формулы интегрирования по частям. Удовлетворяющую (10) функцию $u \in H^1(\Omega)$ поэтому естественно назвать *обобщенным решением* задачи (11), (12).

Цель этого пункта – доказательство принадлежности $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ решений (10), что будет играть важную роль при оценке собственных значений в следующем пункте.

ЛЕММА 4. Для функций $u \in H^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество

$$a_{R,\Omega}[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (13)$$

эквивалентно тождеству

$$((P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = -(b\omega_2)^{-1}((q^{-1}P - \omega_1I)^{-1}f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (14)$$

на классе $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на представление (7), перепишем интегральное тождество (13) для $u \in H^1(\Omega)$ в виде

$$-b\omega_2((P - \omega_1I)(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (15)$$

Зафиксируем функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$ в последнем тождестве. Благодаря условию (S1) все функции $P^{-k}v(x) = v(q^kx)$ также принадлежат $C_0^\infty(\Omega)$ при $k = 1, 2, \dots$. Поэтому мы подставляем их в (13) вместо v и получаем

$$-b\omega_2((P - \omega_1I)(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla P^{-k}v)_{L_2^N(\Omega)} = (f, P^{-k}v)_{L_2(\Omega)},$$

или

$$(P^k(P - \omega_1I)(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = -(b\omega_2)^{-1}(q^{-k}P^k f, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (16)$$

Используя очевидные соотношения $\nabla P^{-k}v = q^k P^{-k}\nabla v$, $(P^{-k})^* = q^{-Nk}P^k$ и суммируя равенства (16) для всех $k = 0, 1, \dots$ с коэффициентами $-\omega_1^{-(k+1)}$, мы приходим к равенству (14) на основании леммы 2. Следует отметить, что оператор $(q^{-1}P - \omega_1I)^{-1} = q(P - q\omega_1I)^{-1}$ ограничен в $L_2(\Omega)$. Импликация (14) $\Rightarrow$ (13) доказывается аналогично.

ЛЕММА 5. Предположим, что $|\omega_2|^{-1} > q^{1-N/2}$. Тогда для функций $u \in H^1(\Omega)$ и $g \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество

$$((P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (17)$$

эквивалентно тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = ((qP^{-1} - \omega_2^{-1}I)^{-1}g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (18)$$

на классе $v \in H^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $v \in H^1(\Omega)$. Благодаря условию (S1) функции $P^k v(x)$ остаются в $H^1(\Omega)$ при $k = 1, 2, \dots$ и могут заменить v в (17). Имеем

$$\begin{aligned} ((P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla P^k v)_{L_2^N(\Omega)} &= (g, P^k v)_{L_2(\Omega)}, \\ (P^{-k}(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} &= (q^k P^{-k}g, v)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вновь суммирование по $k = 0, 1, \dots$ соотношений (19), умноженных на $-\omega_2^{(k+1)}$, приводит к (18), где оператор

$$(qP^{-1} - \omega_2^{-1}I)^{-1} = q^{-1}(P^{-1} - (q\omega_2)^{-1}I)^{-1}$$

ограничен в $L_2(\Omega)$ по лемме 3. Сейчас потребуем $|\omega_2|^{-1} > q^{1-N/2}$, чтобы иметь $|q\omega_2|^{-1} > q^{-N/2}$. Тождество (17) может быть получено из тождества (18) тем же способом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено более сильное условие

$$a > q^{N/2}(q + q^{-1})|b| \quad (20)$$

на коэффициенты оператора R , и пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда всякое обобщенное решение u задачи (11), (12) принадлежит $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u \in H^1(\Omega)$ есть обобщенное решение задачи (11), (12), то (10) выполняется для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ и, тем более, для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Условие (20) в точности означает неравенство $|\omega_2|^{-1} > q^{1-N/2}$. Применяя последовательно леммы 4 и 5, мы видим, что функция u удовлетворяет интегральному тождеству $(\nabla u, \nabla v)_{L_2^N(\Omega)} = (h, v)_{L_2(\Omega)}$ при произвольной $v \in C_0^\infty(\Omega)$, где функция $h \in L_2(\Omega)$ задается формулой

$$h = (P^{-1} - (q\omega_2)^{-1}I)^{-1}I_\Omega(P - q\omega_1 I)^{-1}f,$$

а оператор I_Ω продолжает функцию нулем вне Ω . Являясь решением уравнения Пуассона в Ω с правой частью из $L_2(\Omega)$, функция u принадлежит $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. Более того, ее H^2 -норма по любой строго внутренней подобласти, скажем $q^{-1}\Omega$, допускает оценку

$$\|u\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leq C_1(\|h\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}) \leq C_2(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

с положительными постоянными C_1, C_2 , зависящими только от Ω и параметров оператора R .

Под обобщенной собственной функцией задачи (11), (12) понимается всякая не равная тождественно нулю функция $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$a_{R,\Omega}[\varphi, v] = \lambda(\varphi, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При выполнении условий (E1), (S1) и (20) все обобщенные собственные функции φ_n задачи (11), (12) принадлежат $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ и удовлетворяют оценке

$$\|\varphi_n\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leq C_2(\lambda_n + 1),$$

где λ_n – собственные значения.

4. Устойчивость собственных значений. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ со свойствами (E1), (E2) и (S1). Возьмем другую область Ω' , удовлетворяющую (E1) и (S1). Эта область Ω' будет рассматриваться в качестве возмущения исходной области Ω . Принципиальное предположение относительно Ω' состоит в том, что она содержится в Ω . Цель этого пункта (и основная цель работы) – сравнить соответствующие собственные значения λ_n и λ'_n форм $a_{R,\Omega}$ и $a_{R,\Omega'}$, где оператор R , заданный формулами (6) и (20), остается неизменным. В основе рассуждений лежит вариационная формула (4). Ее использование строится на оценке выражения $a_{R,\Omega'}[u, u]/\|u\|_{L_2(\Omega')}^2$ на конечномерном линейном подпространстве $M_n \subset H^1(\Omega)$, натянутом на первые n собственных функций φ_i формы $a_{R,\Omega}$ в Ω . В нашем случае это возможно сделать, просто взяв сужения на Ω' функций из $H^1(\Omega)$ (эти сужения, естественно, принадлежат $H^1(\Omega')$). Когда $\Omega' \setminus \Omega \neq \emptyset$, использование вариационной

формулы требует построения специального оператора переноса $T: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega')$; см. [12]. В качестве характеристики близости Ω и $\Omega' \subset \Omega$ мы будем использовать меру $|\Omega \setminus \Omega'|$ и пытаться оценивать разность $\lambda_n - \lambda'_n$ функцией от $|\Omega \setminus \Omega'|$, когда возможно (хотя есть и другие распространенные оценки малости возмущения [8], [12]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор R имеет вид (6), его коэффициенты удовлетворяют неравенству (20), а Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ со свойствами (S1), (E1) и (E2). Тогда существуют постоянные $C > 0$ и $\delta_n > 0$, зависящие только от Ω и R , такие, что для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, удовлетворяющей условиям (S1), (E1) и неравенству $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_n$, неравенство

$$\lambda'_n \leq \lambda_n + Cn(\lambda_n + 1)^2 |\Omega \setminus \Omega'|^{1-2/p} [1 + n(\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^{1-2/p}] \quad (21)$$

выполнено для соответствующих собственным значениям λ_n и λ'_n форм $a_{R,\Omega}$ и $a_{R,\Omega'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение свойства (E2) и неравенства Гёльдера к собственным функциям φ_i формы $a_{R,\Omega}$ в Ω дает ($d = 1 - 2/p > 0$)

$$\begin{aligned} \|\varphi_i\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 &\leq \|\varphi_i\|_{L_p(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d \leq \|\varphi_i\|_{L_p(\Omega)}^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d \\ &\leq C_3 \|\varphi_i\|_{H^1(\Omega)}^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d \leq C_4 (\lambda_i + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d. \end{aligned}$$

Здесь C_3 и C_4 (а также все другие постоянные, возникающие в ходе доказательства) – положительные числа, зависящие только от Ω и R .

Возьмем $u \in M_n$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, так что

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

Тогда

$$\|u\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 \leq C_4 n (\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d,$$

откуда

$$\|u\|_{L_2(\Omega')}^2 = 1 - \|u\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 \geq 1 - C_4 n (\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d. \quad (22)$$

Таким образом,

$$\|u\|_{L_2(\Omega')}^{-2} \leq 1 + 2C_4 n (\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d, \quad (23)$$

если мера $|\Omega \setminus \Omega'|$ достаточно мала, точнее,

$$|\Omega \setminus \Omega'| \leq \delta_n = [2C_4 n (\lambda_n + 1)]^{-1/d}. \quad (24)$$

Благодаря представлению (8) и условию (S1) квадратичную форму $a_{R,\Omega}[u, u]$ от $u \in H^1(\Omega)$ можно переписать следующим образом ($\beta = -q^{-N} b \omega_2$):

$$\begin{aligned} a_{R,\Omega}[u, u] &= \int_{\Omega} R_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} \, dx = \beta \int_{\mathbb{R}^N} (P - \omega_1 I)^* (P - \omega_1 I) I_{\Omega} \nabla u \cdot I_{\Omega} \nabla \bar{u} \, dx \\ &= \beta \int_{\mathbb{R}^N} |(P - \omega_1 I) I_{\Omega} \nabla u|^2 \, dx \\ &= \beta \int_{\Omega} |(P - \omega_1 I) \nabla u|^2 \, dx + q^N \beta \int_{\Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично,

$$a_{R,\Omega'}[u, u] = \beta \int_{\Omega'} |(P - \omega_1 I) \nabla u|^2 dx + q^N \beta \int_{\Omega' \setminus q^{-1} \overline{\Omega'}} |\nabla u|^2 dx \quad (26)$$

для той же функции u . Более точно, в (26) мы имеем дело с сужением u на Ω' . Сравнивая далее (25) с (26) и принимая во внимание очевидное соотношение

$$\beta \int_{\Omega'} |(P - \omega_1 I) \nabla u|^2 dx \leq \beta \int_{\Omega} |(P - \omega_1 I) \nabla u|^2 dx,$$

приходим к ключевому неравенству

$$\begin{aligned} a_{R,\Omega'}[u, u] &\leq a_{R,\Omega}[u, u] + q^N \beta \int_{\Omega' \setminus q^{-1} \overline{\Omega'}} |\nabla u|^2 dx - q^N \beta \int_{\Omega \setminus q^{-1} \overline{\Omega}} |\nabla u|^2 dx \\ &= a_{R,\Omega}[u, u] + q^N \beta \int_{q^{-1}(\Omega \setminus \overline{\Omega'})} |\nabla u|^2 dx - q^N \beta \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq a_{R,\Omega}[u, u] + q^N \beta \int_{q^{-1}(\Omega \setminus \overline{\Omega'})} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Для $u \in M_n$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, имеем

$$\int_{q^{-1}(\Omega \setminus \overline{\Omega'})} |\nabla u|^2 dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{q^{-1}(\Omega \setminus \overline{\Omega'})} |\nabla \varphi_i|^2 dx.$$

В силу следствия 1 и условия (S1) все производные φ_{ix_j} принадлежат $H^1(q^{-1}\Omega)$, что вместе с условием (E2) обеспечивает оценку

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L_p(q^{-1}\Omega)}^2 \leq C_5 \|\varphi_i\|_{H^2(q^{-1}\Omega)}^2 \leq C_6 (\lambda_i + 1)^2.$$

С учетом этих неравенств и неравенства Гёльдера получаем из (27), что

$$a_{R,\Omega'}[u, u] \leq a_{R,\Omega}[u, u] + C_7 n (\lambda_n + 1)^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d.$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенством (23) и принимая во внимание, что верхняя грань $a_{R,\Omega}[u, u]$ на единичной сфере (относительно $L_2(\Omega)$ -нормы) в M_n есть в точности λ_n , мы приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{a_{R,\Omega'}[u, u]}{\|u\|_{L_2(\Omega')}^2} &\leq (1 + 2C_4 n (\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d) (\lambda_n + C_7 n (\lambda_n + 1)^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d) \\ &\leq \lambda_n + Cn (\lambda_n + 1)^2 |\Omega \setminus \Omega'|^d (1 + n (\lambda_n + 1) |\Omega \setminus \Omega'|^d) \end{aligned}$$

на пространстве M_n для всех достаточно малых $|\Omega \setminus \Omega'|$.

Стоит отметить, что сужения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на Ω' линейно независимы и, тем самым, порождают n -мерное подпространство в $H^1(\Omega')$, если $|\Omega \setminus \Omega'| \leq \delta_n$ (см. (22)). Поэтому последнее неравенство вместе с вариационной формулой означают (21).

Для получения оценки снизу обычно приходится накладывать дополнительные ограничения на области Ω и Ω' — хорошо известно, что одной малости $|\Omega \setminus \Omega'|$ недостаточно [6; гл. 6]. Сейчас в дополнение к (S1) мы требуем

$$\Omega \text{ звездная относительно начала координат,} \quad (S2)$$

и ограничиваемся возмущениями $\Omega' \subset \Omega$, для которых существует общая постоянная C_{emb} в теореме о вложении $H^1(\Omega') \subset L_p(\Omega')$, т.е.

$$\|u\|_{L_p(\Omega')} \leq C_{\text{emb}} \|u\|_{H^1(\Omega')}, \quad (\text{E3})$$

где $C_{\text{emb}} > 0$ не зависит ни от $u \in H^1(\Omega')$, ни от Ω' .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В качестве примера такого класса возмущений можно указать все области $\Omega' \subset \Omega$, звездные относительно шаров диаметра не меньше $D > 0$, или все области, удовлетворяющие условию конуса с фиксированными параметрами конуса (см. [17]). Постоянная C_{emb} в (E3) зависит только от D в первом случае, и от параметров конуса во втором случае.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что оператор R имеет вид (6), его коэффициенты удовлетворяют условию (20), ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условиям (S1), (S2) и (E1), и задано число $C_{\text{emb}} > 0$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \dots$ можно указать такое число $0 < \varepsilon_n < 1$, что для любой области Ω' , удовлетворяющей условиям (S1), (E1) и (E3) и такой, что*

$$(1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n,$$

имеет место неравенство

$$\lambda_n \leq \lambda'_n + C'n(\lambda'_n + 1)^2 \varepsilon^{1-2/p} [1 + n(\lambda'_n + 1) \varepsilon^{1-2/p}] \quad (28)$$

для собственных значений λ_n и λ'_n форм $a_{R,\Omega}$ и $a_{R,\Omega'}$ соответственно, где постоянная $C' > 0$ зависит лишь от C_{emb} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что по теореме 2 каждое собственное значение λ'_n есть ограниченная функция от Ω' , когда $(1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega$ для всех достаточно малых ε . Чтобы доказать теорему 3, применим теорему 2 к паре $(1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega'$ и используем то свойство, что собственные значения $\lambda_{(1-\varepsilon)\Omega,n}$ задачи в $(1 - \varepsilon)\Omega$ равны в точности $(1 - \varepsilon)^{-2} \lambda_n$. Действительно, замена $x = \kappa y$, $\kappa = (1 - \varepsilon)^{-1}$, переменных интегрирования в тождестве $\int_{\Omega} R_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx = \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx$ и очевидные соотношения $\nabla v(\kappa y) = \kappa^{-1} \nabla [v(\kappa y)]$, $(R_{\Omega} \nabla u)(\kappa y) = \kappa^{-1} R_{\kappa^{-1}\Omega} \nabla [u(\kappa y)]$ приводят к интегральному тождеству

$$\int_{\kappa^{-1}\Omega} R_{\kappa^{-1}\Omega} \nabla [u(\kappa y)] \cdot \nabla [\bar{v}(\kappa y)] \, dy = \kappa^2 \lambda \int_{\kappa^{-1}\Omega} u(\kappa y) \bar{v}(\kappa y) \, dy$$

(существенно, что оператор R перестановочен с заменой переменных).

В ситуации, когда роль Ω играет переменная область Ω' , а роль Ω' — область $(1 - \varepsilon)\Omega$, необходимо дополнительно проверить независимость соответствующих постоянных C'_3, C'_4, C'_5, C'_6 и C'_7 от Ω' . Для C'_3, C'_4 это очевидно — в условиях теоремы они определяются лишь постоянной вложения C_{emb} и коэффициентами уравнения. Проверим неравенство, аналогичное неравенству (24). Оно превращается в ограничение на ε : поскольку $|\Omega' \setminus (1 - \varepsilon)\Omega| \leq |\Omega \setminus (1 - \varepsilon)\Omega| \leq \varepsilon N |\Omega|$, будем иметь

$$|\Omega' \setminus (1 - \varepsilon)\Omega| \leq [2C'_4 n(\lambda'_n + 1)]^{-1/d},$$

как только

$$\varepsilon \leq (N |\Omega|)^{-1} [2C'_4 n(\lambda'_n + 1)]^{-1/d}.$$

При этом в силу равномерной (по Ω') ограниченности собственных значений λ'_n правая часть последнего неравенства не может быть меньше некоторого числа $\varepsilon_n > 0$.

Далее, имеем $q^{-1}\Omega' \subset q^{-1}\Omega$, в то время как $q^{-1}\bar{\Omega} \subset (1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega'$ для всех достаточно малых ε . Это означает, что компакт $q^{-1}\bar{\Omega}'$ обладает открытой окрестностью (именно, $(1 - \varepsilon)\Omega$), содержащейся в каждой рассматриваемой области Ω' . Поэтому можно применить следствие 1 к собственным функциям φ'_n формы $a_{R,\Omega'}$ и записать оценку

$$\|\varphi'_n\|_{H^2(q^{-1}\Omega')} \leq C'_2(\lambda'_n + 1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

в которой C'_2 не зависит от Ω' и n . То же верно и для C'_5, C'_6 в неравенстве

$$\|\nabla \varphi'_n\|_{L_p(q^{-1}\Omega')}^2 \leq C'_5 \|\varphi'_n\|_{H^2(q^{-1}\Omega')}^2 \leq C'_6(\lambda'_n + 1)^2,$$

а, значит, и для соответствующей постоянной C'_7 . Применение результата теоремы 2 с учетом очевидных неравенств $|\Omega' \setminus (1 - \varepsilon)\Omega| \leq \varepsilon N |\Omega|$ и $\lambda_n < (1 - \varepsilon)^{-2} \lambda_n$ завершает доказательство.

В утверждении ниже под *звездной областью относительно шара* мы понимаем звездную область относительно шара, содержащего начало координат.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что выполнено условие (20) на коэффициенты оператора R , а ограниченная область Ω является звездной относительно шара. Тогда существуют такие числа $C_n > 0, \delta_n > 0$, что неравенство*

$$\lambda'_n \leq \lambda_n + C_n |\Omega \setminus \Omega'|^{1-2/p}$$

выполняется для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, звездной относительно шара и удовлетворяющей условию $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_n$.

Кроме того, для всех областей Ω' , звездных относительно шара диаметра не меньше $D > 0$ и таких, что $(1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega$, выполняется неравенство

$$\lambda'_n \geq \lambda_n - C'_n \varepsilon^{1-2/p},$$

как только $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$. При этом величины $C'_n > 0, 0 < \varepsilon_n < 1$ не зависят от Ω' , а определяются лишь параметром $D > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что звездные относительно шара области обладают свойствами (S1), (E1) и (E2). Если же диаметр шара фиксирован, то можно зафиксировать и постоянную C_{emb} в теореме вложения, т.е. имеет место и (E3) (см. [17] и замечание 1). Остается применить теоремы 2 и 3 и вновь учесть ограниченность относительно Ω' собственных значений λ'_n во второй части теоремы.

5. Обобщения. При тех же предположениях относительно областей рассмотрим более общий функционально-дифференциальный оператор. Пусть полуторалинейная форма $a_{R,\Omega}$ на $H^1(\Omega)$ задана теперь выражением

$$a_{R,\Omega}[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N (R_{ij} \Omega u_{x_i}) \bar{v}_{x_j} dx, \quad u, v \in H^1(\Omega), \quad (29)$$

с (различными) операторами R_{ij} вида (5). Ограничиваясь эрмитовыми формами, мы полагаем $R_{ji} = R_{ij}^*$ или, переходя к символам операторов в смысле п. 2,

$r_{ji}(\omega) = \overline{r_{ij}(\omega)}$ на окружности $|\omega| = q^{N/2}$. Важно иметь алгебраические условия, обеспечивающие выполнение неравенства (1) для эрмитовой формы $a_{R,\Omega}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы самосопряженный матричный оператор

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & \dots & R_{NN} \end{pmatrix} : L_2^N(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_2^N(\mathbb{R}^N) \quad (30)$$

был положительно определен.

ЛЕММА 6. Самосопряженный оператор $\mathbf{R}$ в (30) положительно определен тогда и только тогда, когда эрмитова матрица $\mathbf{r}(\omega) = (r_{ij}(\omega))_{i,j=1}^N$ положительно определена в каждой точке $\omega \in \mathbb{C}$ такой, что $|\omega| = q^{N/2}$, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^N r_{ij}(\omega) \eta_i \bar{\eta}_j > 0, \quad 0 \neq \eta \in \mathbb{C}^N, \quad |\omega| = q^{N/2}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathcal{A}_R$ замыкание операторов вида (5) в банаховой алгебре $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^N))$ всех непрерывных линейных операторов в $L_2(\mathbb{R}^N)$. Тогда $\mathcal{A}_R$ есть коммутативная C^* -алгебра, обладающая тем свойством, что спектр оператора в $\mathcal{A}_R$ совпадает с его спектром в $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^N))$. По теореме Гельфанда–Наймарка [18; гл. 11] существует сохраняющий инволюцию изометрический изоморфизм $\mathcal{A}_R$ на алгебру всех комплексных непрерывных функций $C(S)$, где $S = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = q^{N/2}\}$ есть спектр оператора P в $L_2(\mathbb{R}^N)$. Тожественный оператор I и оператор P переводятся в $r(\omega) \equiv 1$ и $r(\omega) \equiv \omega$ соответственно (см. также [15]).

Теперь рассмотрим матричные алгебры $\mathcal{A}_R^{N \times N}$ и $C(S, \mathbb{C}^{N \times N})$. Первая состоит из всех $(N \times N)$ -матриц с элементами из $\mathcal{A}_R$, действующих на N -мерные векторы, компоненты которых принадлежат $L_2(\mathbb{R}^N)$. Она представляет собой замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(L_2^N(\mathbb{R}^N))$ с инволюцией. Вторая – алгебра всех непрерывных на S матриц порядка $N \times N$. Упомянутый выше изоморфизм естественным образом порождает изоморфизм и этих алгебр, что влечет за собой совпадение спектра оператора $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_R^{N \times N}$ (или в $\mathcal{B}(L_2^N(\mathbb{R}^N))$), что то же самое со спектром матрицы-функции $\mathbf{r}(\omega)$ в $C(S, \mathbb{C}^{N \times N})$. Последний есть объединение всех собственных значений матриц $\mathbf{r}(\omega)$, когда ω пробегает S ,

$$\sigma(\mathbf{r}) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mathbf{r}(\omega) - \mu \mathbf{e}) = 0 \text{ для некоторого } \omega \in S\}.$$

Условие (31) означает положительность $\sigma(\mathbf{r})$, а значит, и $\sigma(\mathbf{R})$. Но для непрерывного линейного оператора в гильбертовом пространстве это эквивалентно положительной определенности.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – произвольная область, $a_{R,\Omega}$ задана посредством (29) и выполнено условие (31). Тогда $a_{R,\Omega}$ есть непрерывная эрмитова полуторалинейная форма на $H^1(\Omega)$ такая, что

$$a_{R,\Omega}[u, u] \geq \gamma \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in H^1(\Omega),$$

с положительной постоянной γ , не зависящей от Ω и u .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [15] было показано, что выполнение последней оценки на более узком классе $u \in C_0^\infty(\Omega)$ для случая ограниченной области Ω , удовлетворяющей условию (S1), эквивалентно более слабому условию

$$\sum_{i,j=1}^N r_{ij}(\omega) \xi_i \xi_j > 0, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N, \quad |\omega| = q^{N/2},$$

на символ оператора, т.е. вещественная часть эрмитовой матрицы $\mathbf{r}(\omega)$ должна быть положительно определена.

Докажем ослабленный вариант теоремы 2 о полунепрерывности собственных значений, не использующий внутреннюю гладкость собственных функций.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a_{R,\Omega}$ задана формулами (29) и (31) и Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая (S1) и (E1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого натурального n существует $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\lambda'_n \leq \lambda_n + \varepsilon \quad (32)$$

выполняется для соответствующих собственных значений в Ω и любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, удовлетворяющей (S1), (E1) и такой, что $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_n обозначает то же, что и в теореме 2. Существование $\delta_1 = \delta_1(n, \varepsilon)$ такого, что

$$\|u\|_{L_2(\Omega')}^2 \leq 1 + \varepsilon \quad \text{для всех } u \in M_n, \quad \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1, \\ \Omega' \subset \Omega, \quad |\Omega \setminus \Omega'| < \delta_1,$$

немедленно следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Сравним $a_{R,\Omega}[u, u]$ и $a_{R,\Omega'}[u, u]$ на конечномерном пространстве M_n .

Под u в $a_{R,\Omega'}[u, u]$ мы понимаем ограничение элемента u из $M_n \subset H^1(\Omega)$ на Ω' . Для любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$ можем записать

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (R_{ij\Omega} u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} R_{ij} (I_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i} + I_{\Omega'} u_{x_i}) \cdot (I_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} \bar{u}_{x_j} + I_{\Omega'} \bar{u}_{x_j}) dx \\ &= \int_{\Omega'} (R_{ij\Omega} u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx + \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} (R_{ij,\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx + 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega'} (R_{ij,\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx, \end{aligned}$$

обозначая через $I_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'}$ оператор продолжения функций нулем вне $\Omega \setminus \bar{\Omega}'$. Суммируя эти равенства по всем $i, j \in \{1, \dots, N\}$, получим

$$a_{R,\Omega}[u, u] = a_{R,\Omega'}[u, u] + a_{R,\Omega \setminus \bar{\Omega}'}[u, u] + 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega'} (R_{ij,\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx. \quad (33)$$

Оценим третье слагаемое справа. Имеем

$$R_{ij,\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i} = \sum_k a_{ijk} (I_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} u_{x_i}) (q^{-k} x),$$

причем функция $I_{\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i}$ локализована в “тонком слое” $\Omega \setminus \overline{\Omega}'$. Поэтому слагаемые, отвечающие неотрицательным индексам k , обращаются в нуль в области интегрирования Ω' . Слагаемые с $k < 0$ дают

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega'} (I_{\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i})(q^{-k}x) \overline{u}_{x_j}(x) dx \right| &\leq \int_{\Omega'} |(I_{\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i})(q^{-k}x)| |u_{x_j}(x)| dx \\ &\leq \int_{q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} |(I_{\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i})(q^{-k}x)| |u_{x_j}(x)| dx \\ &\leq q^{kN} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} \|u_{x_j}\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega'} (R_{ij,\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i}) \overline{u}_{x_j} dx \right| &\leq C_8 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} \sum_{k<0} \|\nabla u\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))} \\ &\leq \gamma \|\nabla u\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega}')}^2 + \frac{C_8^2}{4\gamma} \left(\sum_{k<0} \|\nabla u\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))} \right)^2 \\ &\leq a_{R,\Omega \setminus \overline{\Omega}'}[u, u] + C_9 \sum_{k<0} \|\nabla u\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))}^2 \end{aligned}$$

при помощи следствия 3, где положительные постоянные C_8 и C_9 зависят только от q и коэффициентов R_{ij} ; суммирование производится по конечному набору отрицательных чисел. Таким образом,

$$a_{R,\Omega \setminus \overline{\Omega}'}[u, u] + 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega'} (R_{ij,\Omega \setminus \overline{\Omega}'} u_{x_i}) \overline{u}_{x_j} dx \geq -C_9 \sum_{k<0} \|\nabla u\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))}^2,$$

и из (33) теперь следует

$$a_{R,\Omega'}[u, u] \leq a_{R,\Omega}[u, u] + C_9 \sum_{k<0} \|\nabla u\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))}^2.$$

Вспоминая, что $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$, $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$, получаем неравенство

$$a_{R,\Omega'}[u, u] \leq a_{R,\Omega}[u, u] + C_9 \sum_{k<0} \sum_{m=1}^n \|\nabla \varphi_m\|_{L_2(q^k(\Omega \setminus \overline{\Omega}'))}^2. \quad (34)$$

На основе этого неравенства и абсолютной непрерывности интеграла Лебега можно выбрать такое число $\delta_2 = \delta_2(n, \varepsilon)$, что

$$a_{R,\Omega'}[u, u] \leq a_{R,\Omega}[u, u] + \varepsilon \leq \lambda_n + \varepsilon \quad (35)$$

для всех $u \in M_n$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и всех подобластей Ω' , удовлетворяющих (S1) и (E1) и таких, что $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_2$. Завершаем доказательство, рассуждая аналогично теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (34) показывает, что только сужения собственных функций $a_{R,\Omega}$ на строго внутреннюю подобласть $q^{-1}\Omega$ участвуют в оценке разности

между $a_{R,\Omega}[u, u]$ и $a_{R,\Omega}[u, u]$. Однако, в ситуации, когда нет информации о внутренней регулярности собственных функций, мы используем более грубое неравенство (35). В заключение остановимся на частном случае формы (29), для которой остаются справедливыми результаты п. 3 и могут быть получены непосредственные аналоги теорем 2 и 3 и следствия 2.

Предположим, что все функциональные операторы R_{ij} в (29) пропорциональны одному и тому же оператору вида (5),

$$R_{ij} = a_{ij}R, \quad Ru(x) = \sum_k a_k u(q^{-k}x), \quad a_{ij}, a_k \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Чтобы удовлетворить условию (31), полагаем

$$\text{матрица } (a_{ij})_{i,j=1}^N \text{ положительно определенная эрмитова,} \quad (37)$$

$$r(\omega) \equiv \sum_k a_k \omega^k \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{k_0} a_k \omega^k + q^{kN} \bar{a}_k \omega^{-k} > 0, \quad \omega \in S. \quad (38)$$

Можем без ограничения общности считать $a_{k_0} \neq 0$. Легко видеть, что $r(\omega)$ в (38) имеет в точности k_0 корней $\omega = \omega_k$ с $|\omega_k| < q^{N/2}$, в то время как остальные $\omega_{k_0+k} = q^N / \bar{\omega}_k$, $|\omega_{k_0+k}| > q^{N/2}$, $k = 1, \dots, k_0$. Получаем следующее разложение:

$$R = (-1)^{k_0} a_{k_0} \omega_1 \cdots \omega_{k_0} \prod_{k=1}^{k_0} (P - \omega_{k_0+k} I) \prod_{k=1}^{k_0} (P^{-1} - \omega_k^{-1} I).$$

Для того, чтобы имел место аналог леммы 5, мы должны потребовать

$$|\omega_k|^{-1} > q^{1-N/2}, \quad k = 1, \dots, k_0.$$

Ввиду этого мы усиливаем условие (38), полагая

$$r(\omega) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{k_0} a_k \omega^k + q^{kN} \bar{a}_k \omega^{-k} \neq 0, \quad q^{N/2} \leq |\omega| \leq q^{1+N/2} \quad (39)$$

(будучи вещественной и непрерывной на связном множестве S , функция $r(\omega)$ не меняет знак и может считаться положительной в S без ограничения общности).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a_{R,\Omega}[u, v]$ задана формулами (29) и (36), выполнены условия (37) и (39), а ограниченная область Ω обладает свойствами (S1) и (E1). Тогда всякое решение тождества

$$a_{R,\Omega}[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega),$$

при фиксированной $f \in L_2(\Omega)$ принадлежит пространству $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. В частности, все собственные функции φ_n формы $a_{R,\Omega}$ принадлежат $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ и удовлетворяют оценке

$$\|\varphi_n\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leq C_{10}(\lambda_n + 1),$$

где λ_n суть соответствующие собственные значения, а постоянная $C_{10} > 0$ зависит только от Ω и коэффициентов формы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Те же рассуждения, что и в доказательствах лемм 4, 5, позволяют свести исходное тождество

$$\sum_{i,j=1}^N (a_{ij} R u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega),$$

для функции $u \in H^1(\Omega)$ к тождеству

$$\sum_{i,j=1}^N (a_{ij} u_{x_i}, w_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (g, w)_{L_2(\Omega)},$$

справедливому для всех $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Функция $g \in L_2(\Omega)$ непрерывно зависит от $f \in L_2(\Omega)$. Другими словами, u является решением эллиптического уравнения $-\sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i x_j} = g$ в Ω . Внутренняя гладкость вместе с соответствующей оценкой на любом открытом множестве, строго внутреннем по отношению к Ω , следует из хорошо известных результатов для эллиптических уравнений [18; гл. 8], [19; гл. XIV].

Опираясь на теорему 5 и оценку (34), полученную для общего случая, повторением схемы доказательства теоремы 2 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Все утверждения теорем 2, 3 и следствия 2 остаются справедливыми при замене $a_{R,\Omega}$ в (9) формой

$$a_{R,\Omega}[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (R_{\Omega} u_{x_i}) \bar{v}_{x_j} dx,$$

удовлетворяющей условиям (37) и (39).

Автор выражает благодарность профессорам В. И. Буренкову, А. Л. Скубачевскому и А. А. Шкаликову за обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [2] Л. Е. Россровский, А. Л. Скубачевский, “Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина*. Т. 5. *Дифференциальные уравнения* (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.), Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **66**, ВИНТИ, М., 1999, 114–192.
- [3] Л. Е. Россровский, “Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов”, *Тр. ММО*, **62**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2001, 199–228.
- [4] В. В. Подъяпольский, А. Л. Скубачевский, “О полноте и базисности системы корневых функций сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов”, *УМН*, **51:6** (1996), 219–220.
- [5] В. В. Подъяпольский, А. Л. Скубачевский, “Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов”, *Дифференц. уравнения*, **35:6** (1999), 793–800.

- [6] I. Babuška, R. Vybourný, “Continuous dependence of the eigenvalues on the domain”, *Czechoslovak Math. J.*, **15** (1965), 169–178.
- [7] E. B. Davies, “Eigenvalue stability bounds via weighted Sobolev spaces”, *Math. Z.*, **214**:3 (1993), 357–371.
- [8] V. I. Burenkov, E. B. Davies, “Spectral stability of the Neumann Laplacian”, *J. Differential Equations*, **186**:2 (2002), 485–508.
- [9] P. D. Lamberti, M. Lanza de Cristoforis, “A global Lipschitz continuity result for a domain dependent Dirichlet eigenvalue problem for the Laplace operator”, *Z. Anal. Anwendungen*, **24**:2 (2005), 277–304.
- [10] J. K. Hale, “Eigenvalues and perturbed domains”, *Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, 95–123.
- [11] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Т. 1, Гостехиздат, М., 1951.
- [12] V. I. Burenkov, P. D. Lamberti, “Spectral stability of general non-negative self-adjoint operators with applications to Neumann-type operators”, *J. Differential Equations*, **233**:2 (2007), 345–379.
- [13] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **42**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.
- [15] Л. Е. Россовский, “Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **59**:1 (1996), 103–113.
- [16] Л. В. Бородулина, Л. Е. Россовский, “Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргументов в весовых пространствах”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **26**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2007, 37–55.
- [17] V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner-Texte Math., **137**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [18] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [19] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 2. *Спектральная теория*, ИЛ, М., 1966.

Л. Е. Россовский

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: lorossovskii@sci.pfu.edu.ru

Поступило

24.02.2010