Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Астахов, Об аддитивности пространства плотно-
стей потенциалов простого слоя с конечным интегралом
Дирихле и суммируемости нормальных производных
гармонических функций из W_2^1 на липшицевых поверх-
ностях, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 659–
664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8758>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:21:46

Об аддитивности пространства плотностей потенциалов простого слоя с конечным интегралом Дирихле и суммируемости нормальных производных гармонических функций из W_2^1 на липшицевых поверхностях

В. И. Астахов

Устанавливается принадлежность пространству Лебега на липшицевых поверхностях нормальных производных кусочно-гармонических функций, а также плотностей поверхностных потенциалов простого слоя с конечным интегралом Дирихле.

Библиография: 9 названий.

Рассматривается объединение $\Gamma = \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k$ конечного числа N замкнутых кусочно-гладких липшицевых поверхностей Γ_k , $k = 1, \dots, N$. Предполагается, что последние имеют конечную лебегову меру, не соприкасаются, а Γ делит трехмерное физическое пространство Ω на две части Ω^+ и Ω^- так, что бесконечно удаленная точка (б.у.т.) примыкает к Ω^+ , ориентировано единичной внешней нормалью $\bar{n}$ и целиком уместается в шаре Ω_R с границей Γ_R достаточно большого радиуса R .

Интерес представляет гильбертово пространство $H_\sigma(\Gamma)$:

$$(\sigma_1, \sigma_2)_{H_\sigma} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\sigma_1(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \sigma_2(M) d\Gamma_M, \quad \|\sigma\|_{H_\sigma} = (\sigma, \sigma)_{H_\sigma}^{1/2} \quad (1)$$

с вещественными элементами $\{\sigma\}$, определенными на Γ как функционалы

$$\int_\Omega \text{grad } \psi \text{ grad } \varphi_\sigma d\Omega = \int_\Gamma \psi \sigma d\Gamma, \quad (2)$$

где $\psi \in H(\Omega) : \Delta\psi = 0$ вне Ω_R , $\psi(M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0(1/r)$ со скалярным произведением и нормой вида

$$(\psi_1, \psi_2)_H = \int_\Omega \text{grad } \psi_1 \text{ grad } \psi_2 d\Omega, \quad \|\psi\|_H = (\psi, \psi)_H^{1/2}, \quad (3)$$

$\varphi_\sigma \in H_\sigma(\Omega)$ – подпространству в $H(\Omega)$, образованному гармоническими вне Γ элементами $\{\Delta\varphi_\sigma = 0 \text{ вне } \Gamma, \varphi_\sigma \in H_\sigma(\Omega)\}$. Остальные обозначения – общепринятые, причем производные в (2), (3) понимаются в смысле Соболева [1], а интегралы по

Ω – в смысле Лебега [2]. В отличие от (2), (3) смысл интегралов в (1) подлежит уточнению, которое будет раскрыто ниже.

Принимая во внимание свойства поверхностных потенциалов [3] и первое тождество Грина [4], естественно именовать элемент $\varphi_\sigma \in H_\sigma(\Omega)$ *потенциалом простого слоя* (ППС) уравнения Лапласа, а σ – его плотностью на Γ . ППС и, аналогично, потенциалы двойного слоя (ПДС) с конечным интегралом Дирихле, а также операторы и уравнения теории потенциала в условиях кусочно-гладкой липшицевой Γ систематически изучены в [5]. Некоторые важные, но не решенные в [5] вопросы, составляют предмет данной работы. В частности, на основе предельных соотношений для ППС в [5] показано, что φ_σ имеет интегральное представление

$$\varphi_\sigma(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad (4)$$

в котором интеграл правой части равенства можно понимать, например¹, как предел сходящейся по норме (3) последовательности обычных (несобственных при $M \in \Gamma$) интегралов с ограниченными и кусочно-непрерывными плотностями $\sigma_k \in \tilde{C}(\Gamma)$, $k = 1, 2, \dots$. С такими плотностями потенциалы (4) обладают известными свойствами, а их нормы в терминах плотностей имеют вид (1). Другими словами, значения скалярных произведений и норм для плотностей из $H_\sigma(\Gamma)$ совпадают со значениями скалярных произведений и норм соответствующих потенциалов в $H_\sigma(\Omega)$, причем $H_\sigma(\Gamma)$ можно рассматривать как замыкание множества $\tilde{C}(\Gamma)$ ограниченных и кусочно-непрерывных на Γ функций по норме (1). Ясно, что указанное совпадение норм и замкнутость пространства $H_\sigma(\Omega)$ обеспечивают принадлежность потенциалов с предельными (идеальными) плотностями из $H_\sigma(\Gamma)$ пространству $H_\sigma(\Omega)$.

Отметим, что вопрос о том, будут ли интегралы в (1), (4) для предельных элементов лебеговы, остается открытым. Ответ на этот вопрос, а также ряд других полезных следствий дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, причем Γ' и Γ'' имеют ненулевую лебегову меру. Пусть также $\sigma = \sigma' + \sigma''$, причем $\sigma' = 0$ на Γ'' , $\sigma'' = 0$ на Γ' почти всюду. Тогда, если σ – элемент $H_\sigma(\Gamma)$, то σ' и σ'' тоже являются элементами этого пространства. И наоборот, если в указанных условиях $\sigma' \in H'_\sigma(\Gamma)$, $\sigma'' \in H''_\sigma(\Gamma)$, то и $\sigma \in H_\sigma(\Gamma)$, где $H'_\sigma(\Gamma)$ и $H''_\sigma(\Gamma)$ понимаются как замыкания по норме (1) после замены Γ на Γ' или Γ'' подмножеств $\tilde{C}'(\Gamma)$ и $\tilde{C}''(\Gamma)$ из $\tilde{C}(\Gamma)$ с элементами, равными нулю, соответственно, на Γ'' и Γ' .

СЛЕДСТВИЕ 1. Элементы σ пространства $H_\sigma(\Gamma)$ – суммируемые функции, т.е. $H_\sigma(\Gamma)$ содержится в $L_1(\Gamma)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Интегралы в (1), (4) лебеговы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Нормальные производные на Γ гармонических вне Γ функций из соболевского пространства $W_2^1(\Omega_R)$ суммируемы.

¹Другой вариант – как предел сходящейся по норме (3) последовательности ППС с гладкими носителями плотностей (см. [5]).

Отметим, что нетривиальной является только первая часть теоремы в условиях, когда поверхности Γ' и Γ'' разомкнуты. На доказательстве этой части и сосредоточим внимание. Содержащееся в ней утверждение будет верно, если

$$H'_\sigma(\Gamma) + H''_\sigma(\Gamma) = H_\sigma(\Gamma). \quad (5)$$

Ясно также, что $H'_\sigma(\Gamma)$ и $H''_\sigma(\Gamma)$, элементы которых считаем определенными на Γ (доопределяем нулями на Γ'' и Γ' соответственно), – подпространства в $H_\sigma(\Gamma)$. Поэтому нарушение (5) означает, что в $H_\sigma(\Gamma)$ имеются ненулевые элементы, ортогональные как $H'_\sigma(\Gamma)$, так и $H''_\sigma(\Gamma)$. Пусть σ – один из таких элементов и φ_σ – соответствующий ему потенциал (4). Указанная ортогональность означает, что

$$\int_{\Gamma'} \varphi_\sigma \sigma' d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma''} \varphi_\sigma \sigma'' d\Gamma = 0 \quad \text{для всех } \sigma' \in H'_\sigma(\Gamma), \quad \sigma'' \in H''_\sigma(\Gamma), \quad (6)$$

в том числе и для плотностей, подчиняющихся равенствам

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{\sigma'(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q = \varphi_\sigma(M), \quad M \in \Gamma', \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma''} \frac{\sigma''(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q = \varphi_\sigma(M), \quad M \in \Gamma'', \quad (7)$$

понимаемым в смысле теории следов элементов $W_2^1(\Omega_R)$. Существование таких $\sigma' \in H'_\sigma(\Gamma)$ и $\sigma'' \in H''_\sigma(\Gamma)$ обеспечивается вариационным принципом и теоремой Рисса [6].

Убедимся в этом на примере первого равенства из (7), рассматривая его как интегральное уравнение первого рода относительно σ' . В обозначениях [5] оно выглядит как

$$K_{\sigma\tau}\sigma' = 2\varphi_\sigma \quad \text{на } \Gamma', \quad (8)$$

где $K_{\sigma\tau}$ – оператор:

$$K_{\sigma\tau}\xi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad M \in \Gamma.$$

Заметим, что в наших условиях не только левая, но и правая части равенства (8) определены на Γ . Поэтому есть возможность продолжить (8) на Γ с помощью проектора P' : $P'\xi = \xi$ на Γ' , $P'\xi = 0$ на Γ'' , так что вместо (8) будем иметь

$$A'\sigma' = \varphi'_\sigma, \quad (9)$$

где $A' = P'K_{\sigma\tau}/2$, $\varphi'_\sigma = P'\varphi_\sigma$.

Далее возьмем в качестве исходного пространства подпространство $L'_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$:

$$(\xi_1, \xi_2)_{L_2} = \int_{\Gamma} \xi_1 \xi_2 d\Gamma, \quad \|\xi\|_{L_2} = (\xi, \xi)_{L_2}^{1/2}, \quad (10)$$

образованное элементами $L_2(\Gamma)$, равными нулю на Γ'' почти всюду. Ясно, что $\tilde{C}'(\Gamma)$ плотно, а P' – ортопроектор в $L'_2(\Gamma)$. Так же очевидно, что A' – линейный оператор, поэтому для применения вариационного принципа остается проверить самосопряженность и положительность A' в смысле скалярного произведения из (10) на элементах $\tilde{C}'(\Gamma)$. Имеем

$$\begin{aligned} 2(A\xi_1, \xi_2)_{L_2} &= (P'K_{\sigma\tau}\xi_1, \xi_2)_{L_2} = (K_{\sigma\tau}\xi_1, P'\xi_2)_{L_2} = (K_{\sigma\tau}\xi_1, \xi_2)_{L_2} \\ &= (\xi_1, K_{\sigma\tau}\xi_2)_{L_2} = (P'\xi_1, K_{\sigma\tau}\xi_2)_{L_2} = (\xi_1, P'K_{\sigma\tau}\xi_2)_{L_2} \\ &= 2(\xi_1, A'\xi_2)_{L_2} \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in \tilde{C}'(\Gamma), \end{aligned} \quad (11)$$

где использованы самосопряженность ортогопроектора [7] и симметричность ядра оператора $K_{\sigma\tau}$.

Теперь с учетом промежуточного равенства из (11) найдем

$$(A'\xi, \xi)_{L_2} = \frac{1}{2}(K_{\sigma\tau}\xi, \xi)_{L_2} = \int_{\Gamma} \varphi_{\xi} \left(\frac{\partial \varphi_{\xi}^{-}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{\xi}^{+}}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} |\text{grad } \varphi_{\xi}|^2 d\Omega > 0$$

для всех $\xi \in \tilde{C}'(\Gamma)$, $\|\xi\|_{L_2} > 0$, так как иначе $\varphi_{\xi} \equiv 0$ в Ω^+ , $\varphi_{\xi} = \text{const}$ в Ω^- и, следовательно, $\xi = 0$ на Γ почти всюду. Здесь φ_{ξ} – ППС (см. (4)) с плотностью ξ , $\partial \varphi_{\xi}^{\pm} / \partial n$ – предельные значения его нормальных производных на гладких участках Γ , а также использованы свойства ППС и первое тождество Грина с учетом асимптотики данного потенциала и его производных в окрестности бесконечно удаленной точки.

Согласно вариационному принципу [6] установленного выше достаточно, чтобы уравнение (9) и вариационная задача

$$F(\sigma') = (A'\sigma', \sigma')_{L_2} - 2(\varphi'_{\sigma}, \sigma')_{L_2} \rightarrow \min \quad (12)$$

были эквиваленты в энергетическом пространстве оператора A' , которое у нас совпадает с $H'_{\sigma}(\Gamma)$, а с учетом свойств ортогопроектора P' функционал $F(\sigma')$ может быть переписан в виде

$$F(\sigma') = \|\sigma'\|_{H_{\sigma}}^2 - 2(\varphi_{\sigma}, \sigma')_{L_2}, \quad \sigma' \in H'_{\sigma}(\Gamma).$$

Остается убедиться в ограниченности функционала $\mathfrak{F}(\xi) = (\varphi_{\sigma}, \xi)_{L_2}$ в $H'_{\sigma}(\Gamma)$. Имеем

$$|\mathfrak{F}(\xi)| = |(\varphi_{\sigma}, \xi)_{L_2}| = |(\sigma, \xi)_{H_{\sigma}}| \leq \|\sigma\|_{H_{\sigma}} \|\xi\|_{H_{\sigma}} \quad \text{для всех } \xi \in H_{\sigma}(\Gamma)$$

(использовалось неравенство Коши–Буняковского [7]); следовательно, и для всех $\xi \in H'_{\sigma}(\Gamma)$, а также $\|\mathfrak{F}\| \leq \|\sigma\|_{H_{\sigma}}$. Отсюда в силу теоремы Рисса заключаем, что вариационная задача (12), а с ней и уравнение (9), имеют в $H'_{\sigma}(\Gamma)$ единственное решение σ' , причем $\|\sigma'\|_{H_{\sigma}} \leq \|\sigma\|_{H_{\sigma}}$. Второе уравнение из (7) исследуем аналогично, после чего убеждаемся в существовании $\sigma'' \in H''_{\sigma}(\Gamma)$ и получаем оценку $\|\sigma''\|_{H_{\sigma}} \leq \|\sigma\|_{H_{\sigma}}$.

Подстановка (7) в (6) дает

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma'} \frac{\sigma'(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \sigma'(M) d\Gamma_M = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma''} \int_{\Gamma''} \frac{\sigma''(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \sigma''(M) d\Gamma_M = 0, \quad (13)$$

откуда в силу положительности (см. (11)) входящих в (13) интегральных операторов с ядром $1/r_{QM}$, соответственно, в $L'_2(\Gamma)$ и $L''_2(\Gamma)$ следует $\sigma' = 0$ на Γ' , $\sigma'' = 0$ на Γ'' почти всюду, а из (7) – $\varphi_{\sigma} = 0$ на $\Gamma' \cup \Gamma''$. Но поскольку φ_{σ} – гармоническая вне Γ функция, равномерно стремящаяся к нулю в бесконечно удаленной точке, окончательно имеем $\varphi_{\sigma} = 0$ в Ω и по теореме о скачке нормальных производных ППС на гладких участках (применяем к сходящейся к φ_{σ} последовательности ППС с плотностями из $\tilde{C}(\Gamma)$) получим $\sigma = 0$ почти всюду на Γ . Итак, условиям ортогональности (6) отвечает в $H_{\sigma}(\Gamma)$ лишь нулевой элемент, что и доказывает рассматриваемое утверждение теоремы.

Перейдем к обсуждению следствий. Для элементов из $H_\sigma(\Gamma)$, сохраняющих знак на Γ , суммируемость устанавливается следующим образом. Возьмем последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ неотрицательных функций из $\tilde{C}(\Gamma)$, сходящуюся по норме (1) к $|\sigma| \in H_\sigma(\Gamma)$. С такими функциями интегралы в (1), очевидно, имеют лебеговский смысл, а последовательность $\|\sigma_1\|_{H_\sigma}, \|\sigma_2\|_{H_\sigma}, \dots$ просто сходится. Для произвольного элемента последней справедлива оценка

$$\|\sigma_k\|_{H_\sigma}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\sigma_k(Q)|}{r_{QM}} d\Gamma_Q |\sigma_k(M)| d\Gamma_M \geq \frac{1}{d} \left(\int_\Gamma |\sigma_k| d\Gamma \right)^2 = \frac{1}{d} \|\sigma_k\|_{L_1}^2, \quad (14)$$

где $d = 2R$, поэтому из сходимости в $H_\sigma(\Gamma)$ немедленно следует сходимость в $L_1(\Gamma)$. В частности, это означает, что все решения задачи Робена [8] из $H_\sigma(\Gamma)$ – суммируемые функции.

В общем случае положим $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где $\sigma' = (|\sigma| + \sigma)/2$, $\sigma'' = (\sigma - |\sigma|)/2$, а через Γ' и Γ'' обозначим носители функций, соответственно σ' и σ'' . Ясно, что $\Gamma' \cup \Gamma'' \subset \Gamma$, а σ' и σ'' не меняют знаки на своих носителях. По доказанному выше $\sigma' \in H'_\sigma(\Gamma)$, $\sigma'' \in H''_\sigma(\Gamma)$, а поскольку их знаки на Γ сохраняются, согласно (14) имеют место оценки

$$\|\sigma'\|_{H_\sigma} \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \|\sigma'\|_{L_1}, \quad \|\sigma''\|_{H_\sigma} \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \|\sigma''\|_{L_1},$$

и в силу аддитивности пространства $L_1(\Gamma)$ [2] заключаем, что $\sigma \in L_1(\Gamma)$. Этого достаточно [9], чтобы интегралы в (1), (4) для предельных элементов $H_\sigma(\Gamma)$ существовали в смысле Лебега. Таким образом, второе следствие также подтверждено.

Рассмотрим вопрос о суммируемости нормальных производных $\partial\varphi_\sigma^\pm/\partial n$ на Γ , ППС $\varphi_\sigma \in H_\sigma(\Omega)$. В обозначениях [5]

$$\frac{\partial\varphi_\sigma^\pm}{\partial n} = \frac{(\mp\sigma + K_{\sigma\sigma}\sigma)}{2},$$

где $K_{\sigma\sigma}$ – интегральный оператор:

$$K_{\sigma\sigma}\xi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \xi(Q) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad M \in \Gamma,$$

действующий в $H_\sigma(\Gamma)$ с нормой [5], $\|K_{\sigma\sigma}\|_{H_\sigma} = 1$. Таким образом, имеем $\partial\varphi_\sigma^\pm/\partial n \in H_\sigma(\Gamma)$ для всех $\sigma \in H_\sigma(\Gamma)$, что по доказанному выше означает $\partial\varphi_\sigma^\pm/\partial n \in L_1(\Gamma)$. Это же заключение, очевидно, распространяется на нормальные производные $\partial\varphi^-/\partial n$ или $\partial\varphi^+/\partial n$ любой гармонической в Ω^- или $\Omega_R \setminus \Omega^-$ функции φ из классов, соответственно, $W_2^1(\Omega^-)$ или $W_2^1(\Omega_R \setminus \Omega^-)$, например, ПДС с носителем плотностей Γ , поскольку такие функции можно продолжить в Ω_R элементами $W_2^1(\Omega_R)$ и, следовательно, представить в области гармоничности потенциалами из $H_\sigma(\Gamma)$ [5]. Конечно, если область гармоничности $\Omega_R \setminus \Omega^-$, сферу Γ_R потребуется присоединить к Γ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

- [2] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 5, ГИФМЛ, М., 1959.
- [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1972.
- [4] Н. Е. Кочин, *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*, Изд-во АН СССР, М., 1961.
- [5] В. И. Астахов, “Поверхностные потенциалы, операторы и уравнения теории потенциала в энергетических пространствах”, *Математические методы в физике, технике и экономике*, Юбилейный сборник научных работ кафедры прикладной математики ЮРГТУ (НПИ), Ред. журн. Изв. вузов. Электромеханика, Новочеркасск, 2001, 5–34.
- [6] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [7] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, т. 1, Вища школа, Харьков, 1977.
- [8] Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики*, Гостехтеориздат, М., 1953.
- [9] Л. Шварц, *Математические методы для физических наук*, Мир, М., 1965.

В. И. Астахов

Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

E-mail: v.astakhov@mail.ru

Поступило

15.07.2009