Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Аппроксимация функции z^α рациональными дробями в области с нулевым внешним углом, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 761–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:25:45

Аппроксимация функции z^α рациональными дробями в области с нулевым внешним углом

А. А. Пекарский

Рациональные приближения функции z^α , $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, изучались в работах Ньюмена, Гончара, Буланова, Вячеславова, Андерссона, Шталя и других авторов. В настоящей работе исследуется порядок наилучших рациональных приближений указанной функции в области с нулевым внешним углом с вершиной в точке $z = 0$. Полученные результаты показывают, в частности, что условия, налагаемые на границу области в неравенстве типа Джексона, доказанного автором в 2001 году для наилучших рациональных приближений в пространстве В. И. Смирнова, нельзя существенно ослабить.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Основные результаты. Приведем необходимые обозначения. Пусть K – компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $C(K)$ – пространство функций, непрерывных на K , и $C_A(K)$ – подпространство $C(K)$, состоящее из функций, аналитических во внутренних точках K (если таковые имеются). Для $f \in C(K)$ определим норму $\|f\|_{C(K)} = \max\{|f(z)| : z \in K\}$. Пусть $\mathcal{R}_n$ – множество рациональных функций степени не выше n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Введем

$$R_n(f)_{C(K)} = \inf\{\|f - r_n\|_{C(K)} : r \in \mathcal{R}_n\}$$

– наилучшее равномерное рациональное приближение $f \in C(K)$. В случае $f \in C_A(K)$ будем применять также обозначения $\|f\|_{C_A(K)}$ и $R_n(f)_{C_A(K)}$. Для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ будем рассматривать функцию $f_\alpha(z) = z^\alpha$, аналитическую в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и удовлетворяющую условию $f_\alpha(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$.

Равномерные рациональные приближения функция $f_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, на отрезке $[0, 1]$ изучались (см., например, [1]) в работах Ньюмена, Гончара, Буланова, Вячеславова, Шталя и других авторов. Шталем [2] получен следующий наиболее сильный результат:

$$R_n(f_\alpha)_{C[0,1]} \sim 4^{\alpha+1} |\sin \pi \alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В работах Андерссона [3] и автора [4] изучались наилучшие равномерные приближения этой функции в замкнутом круге $\overline{D}$, где $D = \{z : |z - 1| < 1\}$. Именно, в следующем соотношении нижняя оценка получена Андерссоном, а верхняя – автором:

$$R_n(f_\alpha)_{C_A(\overline{D})} \asymp e^{-\pi\sqrt{2\alpha n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для $0 < \beta < \pi$ введем область $\Omega_\beta = \{z : |z| < 1, |\arg z| < \pi - \beta\}$ с внешним углом, равным 2β в точке $z = 0$. В [4] получено также соотношение

$$R_n(f_\alpha)_{C_A(\bar{\Omega}_\beta)} \asymp e^{-2\sqrt{\pi\alpha\beta n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе мы будем рассматривать наилучшие приближения функции f_α в области с нулевым внешним углом в точке $z = 0$. Именно, для $\gamma > 1$ в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ введем область

$$G_\gamma = \{x + iy : x^2 + y^2 < 1, |y| > |x|^\gamma \text{ при } x \leq 0\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $\gamma > 1$. Тогда существуют положительные величины $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, зависящие лишь от α и γ , такие, что при $n = 2, 3, 4, \dots$

$$c_1 \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/(\gamma-1)} \leq R_n(f_\alpha)_{C_A(\bar{G}_\gamma)} \leq c_2 \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\alpha/(\gamma-1)}.$$

При $0 < p < \infty$ мы будем рассматривать также наилучшие приближения f_α в пространствах Лебега $L_p[0, 1]$, Харди $H_p(D)$ и Смирнова $E_p(Q)$. Определения этих пространств смотрите ниже в пп. 2, 3. Наилучшие приближения в указанных пространствах вводятся аналогично, как в пространствах $C(K)$ и $C_A(K)$, т.е. путем замены нормы $\|\cdot\|_{C(K)}$ на квазинормы $\|\cdot\|_{L_p[0,1]}$, $\|\cdot\|_{H_p(D)}$ и $\|\cdot\|_{E_p(Q)}$.

Андерссон [3] для $1 < p < \infty$ и $\alpha \in (-1/p, +\infty) \setminus \mathbb{Z}$ получим следующие соотношения:

$$R_n(f_\alpha)_{L_p[0,1]} \asymp n^{1/(2p)} \exp\left(-2\pi\sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{p}\right)n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$R_n(f_\alpha)_{H_p(D)} \asymp n^{1/(2p)} \exp\left(-\pi\sqrt{2\left(\alpha + \frac{1}{p}\right)n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для E_p -приближений в области G_γ нами получена следующая теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Если $0 < p < \infty$, $\alpha \in (-1/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}$ и $\gamma > 1$, то

$$R_n(f_\alpha)_{E_p(G_\gamma)} \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{(\alpha+1/p)/(\gamma-1)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Задача о приближении функции f_α в области G_γ рассматривается в связи со следующей теоремой типа Джексона, полученной автором в [5]. Пусть Q – односвязная ограниченная область со спрямляемой жордановой границей ∂Q , функция f аналитична в Q , $0 < p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $1/\sigma = s + 1/p$ и $f^{(s)} \in E_\sigma(Q)$. Тогда (при указанных ниже условиях на ∂Q) и $f \in E_p(Q)$ и

$$R_n(f)_{E_p(Q)} \leq \frac{c}{n^s} \|f^{(s)}\|_{E_\sigma(Q)}, \quad n = s, s+1, s+2, \dots, \quad (1.1)$$

где $c > 0$ и не зависит от f . Неравенство (1.1) получено в [5] при следующих условиях на ∂Q : ∂Q – кривая Лаврентьева при $0 < p < \infty$; ∂Q – кривая Альпера или Радона при $p = \infty$. Отметим, что указанные области не имеют ни внутренних ни внешних нулевых углов. В [5] показано также, что если область Q имеет нулевой внутренний угол, то при указанных значениях p , s и σ (исключая лишь случай $p = \infty$ и $s = 1$)

не выполняется импликация

$$f^{(s)} \in E_\sigma(Q) \Rightarrow f \in E_p(Q) \quad (1.2)$$

и, значит, неравенство (1.1) также не имеет места.

В работе [6] установлено, что импликация (1.2) справедлива для широкого класса областей Q , имеющих нулевые внешние углы. В частности, (1.2) выполняется для области $Q = G_\gamma$. Согласно теоремам 1 и 2 для области $Q = G_\gamma$ и функции $f = f_\alpha$ при $\alpha \in (-1/p, (\gamma - 1)s - 1/p) \setminus \mathbb{Z}$ неравенство (1.1) не выполняется, хотя $f_\alpha^{(s)} \in E_\sigma(G_\gamma)$.

По-видимому, в случае $0 < p < \infty$ класс областей Q , для которых выполняется (1.1), совпадает с множеством областей, граница которых ∂Q является кривой Лаврентьева. В случае $p = \infty$ ответ на аналогичный вопрос, скорее всего, более сложный, и мы не решаемся сделать какое-либо предположение. Проблема обобщения полиномиальной теоремы Джексона для комплексной области, поставленная С. Н. Никольским, подробно изучалась В. К. Дзядыком, В. И. Белым, В. В. Андриевским, Е. М. Дынькиным, Н. А. Широковым и другими авторами. Этому посвящен обзор Белого [7]. Отметим еще препринт Андриевского [8], в котором получены некоторые результаты о наилучших полиномиальных приближениях аналитических функций в областях, имеющих нулевые внешние углы.

Ввиду сказанного выше наибольший интерес в теоремах 1 и 2 представляют нижние оценки. Поэтому их доказательству мы уделим основное внимание. Доказательство верхних оценок будет схематичным.

Предварительный вариант этой статьи изложен в [9].

2. Одна экстремальная задача для рациональных функций. Доказательство теорем 1, 2 основано на теоремах 3, 4, представляющих самостоятельный интерес. Для формулировки теорем 3 и 4 введем дополнительные обозначения.

Пусть I – замкнутое множество в $\mathbb{C}$, принадлежащее некоторой локально-спрямляемой кривой или конечному семейству таких кривых. Предположим, что $|I|$ – линейная мера Лебега множества I , конечна и положительна. Через $L_p(I)$, $0 < p \leq \infty$, обозначим пространство Лебега комплексных измеримых функций f на I с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p \leq \infty$)

$$\|f\|_{L_p(I)} = \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(I)} = \operatorname{ess\,sup}_{z \in I} |f(z)|.$$

Если $f \in C(I)$, то, очевидно, $\|f\|_{L_\infty(I)} = \|f\|_{C(I)}$. Через $L_0(I)$ обозначим пространство измеримых на I функций f таких, что

$$-\infty \leq \int_I \log |f(z)| |dz| < \infty.$$

Для $f \in L_0(I)$ определим *среднее геометрическое*

$$\|f\|_{L_0(I)} = \exp \left(\frac{1}{|I|} \int_I \log |f(z)| |dz| \right).$$

Очевидно, функционал $\|\cdot\|_{L_0(I)}$ на $L_0(I)$ не является квазинормой. Если I – отрезок $[a, b]$, то вместо $C([a, b])$ и $L_p([a, b])$ пишем соответственно $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$.

В следующей теореме 3 и далее будет применяться функция

$$\lambda(x) = \log(1 + x^2) + 2x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\delta > 0$ и I – замкнутое множество на $\mathbb{R}$ с $0 < |I| < \infty$; $I^\pm$ – проекции множества I на прямые $\operatorname{Im} z = \pm\delta$. Тогда для любой рациональной функции $r_n \not\equiv 0$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\frac{\|r_n\|_{L_0(I^+)}}{\|r_n\|_{L_0(I^-)}} \leq \exp\left(n\lambda\left(\frac{4\delta}{|I|}\right)\right).$$

Для доказательства теоремы 3 нам необходимы лемма 1 и теорема 4.

ЛЕММА 1. Пусть $\delta > 0$ и I – замкнутое множество на $\mathbb{R}$ с $0 < |I| < \infty$. Тогда для любого $\xi \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\int_I \log \left| \frac{x + i\delta - \xi}{x - i\delta - \xi} \right| dx \leq \frac{|I|}{2} \lambda\left(\frac{4\delta}{|I|}\right). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\operatorname{Im} \xi > 0$, то $|x + i\delta - \xi| < |x - i\delta - \xi|$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и, значит, в этом случае неравенство (2.1) выполняется. Поэтому будет считать $\xi = \alpha - i\beta$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Таким образом, нам достаточно показать, что при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \geq 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_I \log \frac{(x - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}{(x - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2} dx \leq \frac{|I|}{2} \lambda\left(\frac{4\delta}{|I|}\right). \quad (2.2)$$

Подынтегральная функция в (2.2) является четной относительно прямой $x = \alpha$ и убывает на полуоси $[\alpha, +\infty)$. Поэтому интеграл в левой части (2.2) будет наибольшим, когда

$$I = [\alpha - \gamma, \alpha + \gamma], \quad \gamma = \frac{|I|}{2}.$$

Таким образом, нам остается показать, что при всех $\gamma > 0$ и $\beta \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$J(\beta) := \int_0^\gamma \log \frac{t^2 + (\delta + \beta)^2}{t^2 + (\delta - \beta)^2} dt \leq \gamma \lambda\left(\frac{2\delta}{\gamma}\right). \quad (2.3)$$

Функция $J(\beta)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, $J(0) = J(+\infty) = 0$ и $J(\beta) > 0$ при $0 < \beta < \infty$. Следовательно, $J(\beta)$ достигает наибольшего значения при некотором $\beta \in (0, +\infty)$. Покажем, что

$$\max_{0 < \beta < \infty} J(\beta) = J(\delta). \quad (2.4)$$

Интеграл в (2.3) можно продифференцировать по параметру $\beta \in [0, \delta) \cup (\delta, +\infty)$. Используя это, несложно убедиться, что

$$J'(\beta) = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\delta + \beta} + \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\delta - \beta} \right), \quad \beta \in [0, \delta) \cup (\delta, +\infty).$$

Следовательно, $J'(\beta) > 0$ при $0 \leq \beta < \delta$ и $J'(\beta) < 0$ при $\delta < \beta < +\infty$. Таким образом, равенство (2.4) доказано.

Далее несложно найти, что

$$J(\delta) = \int_0^\gamma \log \frac{t^2 + 4\delta^2}{t^2} dt = \gamma \left[\log \left(1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2} \right) + \frac{4\delta}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\delta} \right] = \frac{|I|}{2} \lambda \left(\frac{4\delta}{|I|} \right).$$

Этим лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\delta > 0$ и I – замкнутое множество на $\mathbb{R}$ с $0 < |I| < \infty$. Тогда для любого алгебраического многочлена $p_n \not\equiv 0$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\int_I \log \left| \frac{p_n(x + i\delta)}{p_n(x - i\delta)} \right| dx \leq \frac{n|I|}{2} \lambda \left(\frac{4\delta}{|I|} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для $n = 0$ неравенство очевидно, считаем $n \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности, будем считать, что степень $p_n(z)$ равна n . Тогда многочлен $p_n(z)$ можно записать в виде

$$p_n(z) = a \prod_{k=1}^n (z - \xi_k),$$

где $a \neq 0$, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – нули $p_n(z)$, выписанные с учетом кратности. Остается воспользоваться леммой 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В случае $n = 0$ данное неравенство очевидно: обе его части равны 1. Пусть $n \geq 1$ и $r_n(z) = p_n(z)/q_n(z)$, где $p_n(z)$ и $q_n(z)$ – алгебраические многочлены степени не выше n . Имеем

$$\int_I \log \left| \frac{r_n(x + i\delta)}{r_n(x - i\delta)} \right| dx = \int_I \log \left| \frac{p_n(x + i\delta)}{p_n(x - i\delta)} \right| dx + \int_I \log \left| \frac{\bar{q}_n(x - i\delta)}{\bar{q}_n(x + i\delta)} \right| dx.$$

Очевидно, к обоим слагаемым правой части последнего равенства применима теорема 4. Поэтому

$$\int_I \log \left| \frac{r_n(x + i\delta)}{r_n(x - i\delta)} \right| dx \leq n|I| \lambda \left(\frac{4\delta}{|I|} \right),$$

что равносильно утверждению теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из доказательств, теоремы 3 и 4 являются точными. Например, равенство в неравенстве из теоремы 3 выполняется, когда $I = [-\gamma, \gamma]$ и

$$r_n(z) = \left(\frac{z + i\delta}{z - i\delta} \right)^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\delta > 0$ и I – замкнутое множество на $\mathbb{R}$ с $0 < |I| < \infty$; $I^\pm$ – проекция I на прямые $\operatorname{Im} z = \pm\delta$. Тогда для любой рациональной функции $r_n \not\equiv 0$ степени не выше n имеет место неравенство

$$\frac{\min_{z \in I^+} |r_n(z)|}{\max_{z \in I^-} |r_n(z)|} \leq \exp \left(\frac{4\pi\delta n}{|I|} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$\lambda(x) \leq \pi x \quad \text{при} \quad x > 0, \quad \min_{z \in I^+} |r_n(z)| \leq \|r_n\|_{L_0(I^+)}, \quad \max_{z \in I^-} |r_n(z)| \geq \|r_n\|_{L_0(I^-)}$$

и воспользоваться теоремой 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следствие 1 можно получить также из следующего результата Гончара [10]. Пусть $E, F \subset \mathbb{C}$ – непересекающиеся замкнутые множества положительной логарифмической емкости, а $C(E, F)$ – емкость конденсатора (E, F) . Тогда для любой рациональной функции $r_n(z) \not\equiv 0$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\frac{\min_{z \in F} |r_n(z)|}{\max_{z \in E} |r_n(z)|} \leq \exp\left(\frac{n}{C(E, F)}\right).$$

3. Доказательство нижних оценок из теорем 1 и 2. При доказательстве нижних оценок из теорем 1 и 2 ключевую роль будет играть следствие 1, а также то, что точка $z = 0$ является, точкой ветвления функции f_α . Впервые эта идея успешно была применена Гончаром [11]. Следующая лемма 2 хорошо известна. В качестве t_n можно взять многочлен Тейлора функции f .

ЛЕММА 2. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$, функция f аналитична в круге $|z - z_0| \leq \rho_2$ и $M = \max\{|f(z)| : |z - z_0| \leq \rho_2\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует алгебраический многочлен t_n степени не выше n такой, что

$$|f(z) - t_n(z)| \leq \frac{M\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n \quad \text{при } |z - z_0| \leq \rho_1.$$

Пусть, как и в части 1, $\gamma > 1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем $s_n = n^{-1/(\gamma-1)}$ и отрезок $I_n = [-s_n, -(1/2)s_n]$. Через $I_n^\pm$ обозначим проекции I_n на прямые $\text{Im } z = \pm s_n^\gamma$. Положим $K_n = I_n^+ \cup I_n^-$. Напомним, что функция $f_\alpha(z) = z^\alpha$ для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ введена в части 1.

Нижние оценки из теорем 1 и 2 для наилучших приближений мы получим из следующей леммы 3.

ЛЕММА 3. Если $0 < p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ и $\gamma > 1$, то

$$R_n(f_\alpha)_{L_p(K_n)} \asymp n^{-\alpha/(\gamma-1)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

где положительные величины, скрытые символом $\asymp$, не зависят от n .

Верхняя оценка из (3.1) очевидна:

$$R_n(f_\alpha)_{L_p(K_n)} \leq \max_{z \in K_n} |f_\alpha(z)| \leq 2^{|\alpha|} \cdot n^{-\alpha/(\gamma-1)}.$$

Она включена в (3.1) лишь для полноты формулировки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО нижней оценки из (3.1) для $p = \infty$. Пусть $r_n \in \mathcal{R}_n$ – элемент наилучшего равномерного приближения f_α на K_n . Для краткости положим $R_n = R_n(f_\alpha)_{C(K_n)}$. Таким образом,

$$|f_\alpha(z) - r_n(z)| \leq R_n \quad \text{при } z \in K_n. \quad (3.2)$$

Через $g_\alpha(z)$ обозначим функцию, определенную в полуплоскости $\text{Re } z < 0$ и являющуюся аналитическим продолжением $f_\alpha(z)$ из третьей четверти. С целью применения леммы 2 введем обозначения $z_0 = -(3/4)s_n$, $\rho_1 = (3/8)s_n$ и $\rho_2 = (1/2)s_n$. Несложно убедиться, что при $|z - z_0| \leq \rho_2$ выполняются неравенства

$$4^{-|\alpha|} s_n^\alpha \leq |g_\alpha(z)| \leq \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} s_n^\alpha. \quad (3.3)$$

Поскольку K_n принадлежит кругу $|z - z_0| \leq \rho_1$ при $n \geq 4$, не ограничивая общности, далее считаем $n \geq 4$. Согласно лемме 2 и правой части (3.3), существует алгебраический многочлен $t_n(z)$ степени не выше n такой, что

$$|g_\alpha(z) - t_n(z)| \leq 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n s_n^\alpha, \quad z \in K_n. \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.4) находим, что при $z \in K_n$ и $r_{2n}(z) = r_n(z) - t_n(z)$ выполняется соотношение

$$|[f_\alpha(z) - g_\alpha(z)] - r_{2n}(z)| \leq R_n + 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n s_n^\alpha. \quad (3.5)$$

Для $z \in I_n^-$ имеем $f_\alpha(z) = g_\alpha(z)$, поэтому согласно (3.5)

$$|r_{2n}(z)| \leq R_n + 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n s_n^\alpha, \quad z \in I_n^-. \quad (3.6)$$

Если же $z \in I_n^+$, то с учетом левого неравенства (3.3) получаем

$$|f_\alpha(z) - g_\alpha(z)| = |g_\alpha(z)| \cdot \left| \frac{f_\alpha(z)}{g_\alpha(z)} - 1 \right| \geq 2 \cdot 4^{-|\alpha|} s_n^\alpha |\sin \pi \alpha|. \quad (3.7)$$

В свою очередь, из (3.5) и (3.7) находим

$$|r_{2n}(z)| \geq \left[2 \cdot 4^{-|\alpha|} |\sin \pi \alpha| - 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] s_n^\alpha - R_n, \quad z \in I_n^+. \quad (3.8)$$

Согласно (3.7) и (3.8) к функции $r_{2n}(z)$ на $K_n = I_n^+ \cup I_n^-$ применимо следствие 1. Именно,

$$\frac{\left[2 \cdot 4^{-|\alpha|} |\sin \pi \alpha| - 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] s_n^\alpha - R_n}{R_n + 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{3}{4}\right)^n s_n^\alpha} \leq e^{8\pi}.$$

Очевидно, отсюда следует нижняя оценка из (3.1) для $p = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ИЗ (3.1) для $0 < p < \infty$. Мы будем придерживаться введенных выше обозначений. Пусть $r_{n,p} \in \mathcal{R}_n$ — элемент наилучшего L_p -приближения функции f_α на K_n . Тогда

$$\|f_\alpha - r_{n,p}\|_{L_p(K_n)} = R_n(f_\alpha)_{L_p(K_n)}. \quad (3.9)$$

Для краткости положим $R_{n,p} = R_n(f_\alpha)_{L_p(K_n)}$. Из (3.9) и неравенства Чебышева следует существование замкнутого множества $K'_n \subset K_n$ и постоянной $c_1 = c_1(p) > 0$ таких, что $|K'_n| = (3/4)|K_n|$ и

$$|f_\alpha(z) - r_{n,p}(z)| \leq c_1 R_{n,p}, \quad z \in K'_n. \quad (3.10)$$

В таком случае существует замкнутое множество $J_n \subset I_n$ с $|J_n| = (1/2)|I_n|$, удовлетворяющее следующему условию. Если обозначить через $J_n^\pm$ проекции J_n на прямые $\text{Im } z = \pm s_n^\gamma$, то $J_n^\pm \subset K'_n$. Согласно (3.10) имеем

$$|f_\alpha(z) - r_{n,p}(z)| \leq c_1 R_{n,p}, \quad z \in J_n^+ \cup J_n^-.$$

Далее проводятся те же рассуждения, что и для $p = \infty$ с заменой $I_n^\pm$ на $J_n^\pm$ и R_n на $c_1 R_{n,p}$. Нижняя оценка из (3.1) для $0 < p < \infty$ доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ИЗ ТЕОРЕМЫ 1. Из принципа максимума модуля аналитической функции следует, что

$$R_n(f_\alpha)_{C_A(\overline{G}_\gamma)} \geq R_n(f_\alpha)_{C(K_n)}.$$

Остается воспользоваться леммой 3 с $p = \infty$ и $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

Далее введем [12] пространство В. И. Смирнова $E_p(Q)$, где $0 < p \leq \infty$, а Q – односвязная ограниченная область со спрямляемой жордановой границей ∂Q . Под $E_\infty(Q)$ будем подразумевать пространство ограниченных аналитических функций f в Q , наделенных нормой

$$\|f\|_{E_\infty(Q)} = \sup_{z \in Q} |f(z)|.$$

Для определения $E_p(Q)$ при $0 < p < \infty$ рассмотрим $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность односвязных областей Q_n со спрямляемыми жордановыми границами ∂Q_n , удовлетворяющих условиям: $Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\overline{Q}_n \subset Q$ для всех n ;

$$\bigcup_{n=1}^\infty Q_n = Q.$$

Тогда $f \in E_p(Q)$, если f аналитична в Q и

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{L_p(\partial Q_n)} < \infty$$

хотя бы для одной последовательности $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ с указанными выше свойствами. Это определение пространства $E_p(Q)$ дано М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. Оно эквивалентно оригинальному определению Смирнова.

Если $f \in E_p(Q)$, то для почти всех $\zeta \in \partial G$ функция f имеет некасательно (по отношению к ∂G) предельные значения, которые мы будем обозначать через $f(\zeta)$. Для $f \in E_p(Q)$, $0 < p \leq \infty$, вводится квазинорма (норма при $1 \leq p \leq \infty$)

$$\|f\|_{E_p(Q)} = \|f\|_{L_p(\partial Q)}.$$

Если Q – круг, то $E_p(Q)$ совпадает [12], [13] с пространством Харди $H_p(Q)$.

В части 4 будет применяться также пространство Смирнова $E_p(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$, где K – континуум со спрямляемой границей ∂K . Это пространство и квазинорма в нем вводится аналогично, как и $E_p(Q)$. При этом, в случае $p \neq \infty$ дополнительно предполагается $f(\infty) = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $0 < p < \infty$, $\gamma > 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Если $f \in E_p(G_\gamma)$, то

$$\int_{\partial G_\gamma} |f(z)|^p |dz| \geq c \int_{K_n} |f(z)|^p |dz|,$$

где $c = c(\gamma) > 0$.

Данная лемма следует из теоремы вложения Карлесона [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ИЗ ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $r_{n,p} \in \mathcal{R}_n$ – элемент наилучшего E_p -приближения f_α в G_γ . Согласно лемме 4 получаем

$$R_n(f_\alpha)_{E_p(G_\gamma)} \geq \left(c \frac{|K_n|}{|\partial G_\gamma|} \right)^{1/p} \|f_\alpha - r_{n,p}\|_{L_p(K_n)}.$$

Остается воспользоваться леммой 3 с $0 < p < \infty$ и $\alpha \in (-1/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}$.

4. Доказательство верхних оценок из теорем 1 и 2. Через Ω обозначим область, полученную удалением полуинтервала $(-2, 0]$ из круга $|z| < 2$. Граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из окружности $|\zeta| = 2$, а также верхнего $[-2, 0]^+$ и нижнего $[-2, 0]^-$ отрезков $[-2, 0]$ действительной оси. При $\alpha \in (-1, +\infty) \setminus \mathbb{Z}$ согласно интегральной формуле Коши имеем

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f_\alpha(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega,$$

где $\partial\Omega$ ориентирована в положительном направлении. Если $\zeta \in [-2, 0]^+$, то $\arg \zeta = \pi$ и $\zeta^\alpha = |\zeta|^\alpha e^{\alpha\pi i}$. Если же $\zeta \in [-2, 0]^-$, то $\arg \zeta = -\pi$ и $\zeta^\alpha = |\zeta|^\alpha e^{-\alpha\pi i}$. Следовательно,

$$f_\alpha(z) = g_\alpha(z) + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \varphi_\alpha(z), \quad z \in \Omega, \quad (4.1)$$

где

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=2} \frac{f_\alpha(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < 2, \quad (4.2)$$

$$\varphi_\alpha(z) = \int_{-2}^0 \frac{|x|^\alpha dx}{x - z}, \quad z \notin [-2, 0]. \quad (4.3)$$

Для получения верхних оценок из теорем 1 и 2 мы воспользуемся равенством (4.1). Функция $g_\alpha(z)$ аналитична в круге $|z| < 2$ и, согласно лемме 2, она равномерно приближаема полиномами в круге $|z| \leq 1$ со скоростью геометрической прогрессии. Поэтому при $1 < p \leq \infty$ нам достаточно показать, что $\varphi_\alpha(z)$ – функция Маркова специального вида E_p -приближаема в G_γ с соответствующей скоростью. При этом следует считать $\alpha \in (-1/p, +\infty)$. Итак, для получения верхних оценок из теоремы 1 и теоремы 2 при $1 < p < \infty$ нам достаточно доказать следующие леммы 5 и 6. Условимся через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать некоторые положительные величины, зависящие от указанных параметров.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha > 0$ и $\gamma > 1$. Тогда для любого $n = 2, 3, 4, \dots$

$$R_n(\varphi_\alpha)_{C_A(\overline{G}_\gamma)} \leq c(\alpha, \gamma) \left(\frac{\log n}{n} \right)^{\alpha/(\gamma-1)}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha \in (-1/p, \infty)$ и $\gamma > 1$. Тогда для любого $n = 1, 2, 3, \dots$

$$R_n(\varphi_\alpha)_{E_p(G_\gamma)} \leq c(p, \alpha, \gamma) \left(\frac{1}{n} \right)^{(\alpha+1/p)/(\gamma-1)}.$$

Для доказательства лемм 5 и 6, а также следующей далее леммы 7, введем последовательность

$$x_k = -2 \left(\frac{1}{1 + a(k-1)} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $a = a(\gamma) > 0$ выбрано так, чтобы при каждом k круг

$$\left| z - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| \leq x_{k+1} - x_k$$

лежал вне области G_γ . Несложно убедиться в существовании такого a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$ введем

$$\tau_k = \rho_k^{1/p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x|^\alpha dx,$$

где ρ_k – расстояние от круга

$$\left| z - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$$

до области $\overline{G}_\gamma$. Несложные вычисления показывают, что $\tau_k = O(k^{-(\alpha+1/p)/(\gamma-1)-1/p})$ при $k \rightarrow \infty$. Остается воспользоваться теоремой 1 из [14] (см. также замечание 1 к этой теореме). Лемма 6 доказана.

Для доказательства лемм 5 и 7 нам понадобятся еще функции χ_1 и χ_2 , определенные на $(-\infty, 0]$. Именно, $\chi_1(x) = 1$ на $(-\infty, -2]$, $\chi_1(x) = 0$ на $[-1, 0]$, $\chi_1(x)$ убывает на $[-2, -1]$ и бесконечно дифференцируема на $(-\infty, 0]$. Положим $\chi_2(x) = 1 - \chi_1(x)$ при $x \in (-\infty, 0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$ такое, что $x_m > -1$. Тогда

$$\varphi_\alpha(z) = \varphi_{1,\alpha}(z) + \varphi_{2,\alpha}(z), \quad z \in [-2, 0],$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\alpha}(z) &= \int_{x_1}^{x_m} \frac{|x|^\alpha \chi_1(x/|x_m|)}{x-z} dx, & z \notin [x_1, x_m], \\ \varphi_{2,\alpha}(z) &= \int_{2x_m}^0 \frac{|x|^\alpha \chi_2(x/|x_m|)}{x-z} dx, & z \notin [2x_m, 0]. \end{aligned}$$

Для построения аппроксимирующей рациональной функции для $\varphi_{1,\alpha}(z)$ следует воспользоваться схемой, применяемой нами в работах [5], [14]. Именно, для $z \notin [x_1, x_m]$ имеем

$$\varphi_{1,\alpha}(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|x|^\alpha \chi_1(x/|x_m|)}{x-z} dx =: \sum_{k=1}^{m-1} \psi_{k,\alpha}(z).$$

Каждая функция $\psi_{k,\alpha}(z)$ аналитична в области

$$\left| z - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| > \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$$

и, следовательно, она равномерно приближаема в области

$$\left| z - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| \geq x_{k+1} - x_k$$

посредством частных сумм ряда Лорана со скоростью геометрической прогрессии. Заменяв каждую из функций $\psi_{k,\alpha}$ в указанной области частной суммой ряда Лорана порядка $O(\log m)$, получим, что существует рациональная функция $u(z)$, степень которой равна $O(m \log m)$, и

$$\|\varphi_{1,\alpha} - u\|_{C_A(\overline{G}_\gamma)} \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha/(\gamma-1)}.$$

Несложно также показать, что

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2x_m]} |\psi_{2,\alpha}(z)| \leq c_1(\alpha, \gamma) \left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha/(\gamma-1)}.$$

Этим лемма 5 доказана.

Для получения верхней оценки из теоремы 2 при $0 < p \leq 1$ мы слегка подправим формулу (4.1). Введем $s = [1/p]$ – целую часть $1/p$. Если $\alpha \in (-1/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}$, то $\alpha + s > -1$ и, согласно (4.1)–(4.3),

$$f_{\alpha+s}(z) = g_{\alpha+s}(z) + (-1)^s \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \varphi_{\alpha+s}(z), \quad z \in \Omega.$$

Следовательно,

$$f_\alpha(z) = \frac{\pi g_{\alpha+s}^{(s)}(z) + (-1)^s \sin \pi \alpha \cdot \varphi_{\alpha+s}^{(s)}(z)}{\pi(\alpha+s)(\alpha+s-1) \dots (\alpha+1)}, \quad z \in \Omega.$$

Таким образом, для получения верхней оценки из теоремы 2 при $0 < p \leq 1$ нам достаточно доказать следующую лемму 7.

ЛЕММА 7. Пусть $p \in (0, 1]$, $s = [1/p]$, $\alpha \in (-1/p, +\infty)$ и $\gamma > 1$. Тогда для $n = 2, 3, 4 \dots$

$$R_n(\varphi_{\alpha+s}^{(s)})_{E_p(G_\gamma)} \leq c(p, \alpha, \gamma) \left(\frac{1}{n}\right)^{(\alpha+1/p)/(\gamma-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{N}$ такое, что $x_m > -1$. Тогда

$$\varphi_{\alpha+s}^{(s)}(z) = s!(\theta_{1,\alpha}(z) + \theta_{2,\alpha}(z)), \quad z \notin [-2, 0],$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{1,\alpha}(z) &= \int_{x_1}^{x_m} \frac{|x|^{\alpha+s} \chi_1(x/|x_m|) dx}{(x-z)^{s+1}}, & z \notin [x_1, x_m], \\ \theta_{2,\alpha}(z) &= \int_{2x_m}^0 \frac{|x|^{\alpha+s} \chi_2(x/|x_m|) dx}{(x-z)^{s+1}}, & z \notin [2x_m, 0]. \end{aligned}$$

Согласно основному результату [15] имеем

$$\|\theta_{2,\alpha}\|_{E_p(\overline{\mathbb{C}} \setminus [2x_m, 0])} \leq c_1(p, \alpha, \gamma) \left(\frac{1}{m}\right)^{(\alpha+1/p)/(\gamma-1)}.$$

Используя теорему вложения Карлесона (см., например, [12], [13]), из последнего неравенства получим

$$\|\theta_{2,\alpha}\|_{E_p(G_\gamma)} \leq c_2(p, \alpha, \gamma) \left(\frac{1}{m}\right)^{(\alpha+1/p)/(\gamma-1)}.$$

Для получения аналогичной оценки $R_n(\theta_{1,\alpha})_{E_p(G_\gamma)}$ при $n = O(m)$ следует применить ту же схему, что и при доказательстве леммы 4.2 из [5]. Лемма 7 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation. Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] H. R. Stahl, “Best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$ ”, *Acta Math.*, **190**:2 (2003), 241–306.
- [3] J.-E. Andersson, “Rational approximation to function like x^α in integral norms”, *Anal. Math.*, **14**:1 (1988), 11–25.
- [4] А. А. Пекарский, “Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова”, *Алгебра и анализ*, **7**:2 (1995), 121–132.
- [5] А. А. Пекарский, “Рациональные приближения функций с производными из пространства В. И. Смирнова”, *Алгебра и анализ*, **13**:2 (2001), 165–190.
- [6] А. А. Пекарский, “Пространства Смирнова–Соболева и их вложения”, *Матем. сб.*, **194**:4 (2003), 75–84.
- [7] В. И. Белый, “Современные методы геометрической теории функции комплексного переменного в задачах аппроксимации”, *Алгебра и анализ*, **9**:3 (1997), 3–40.
- [8] В. В. Андриевский, *Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов*, Препринт ИМ АН УССР № 83.12, Киев, 1983.
- [9] А. А. Пекарский, “Рациональная аппроксимация степенной функции в области с нулевым внешним углом”, *Актуальные проблемы анализа*, Сб. научн. трудов, ред. Я. В. Радыно, В. Г. Кротов, Ю. М. Вуцуникян, ГрГУ, Гродно, 2009, 114–130.
- [10] А. А. Гончар, “О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями”, *Матем. сб.*, **78**:4 (1969), 640–654.
- [11] А. А. Гончар, “Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки”, *Матем. сб.*, **94**:2 (1974), 265–282.
- [12] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Pure Appl. Math., **38**, Academic Press, New York, 1970.
- [13] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.
- [14] А. А. Пекарский, “Наилучшие рациональные приближения в комплексной области”, *Теория функций*, Материалы Всесоюзной школы по теории функций, Тр. МИАН СССР, **190**, Наука, М., 1989, 222–233.
- [15] А. А. Пекарский, “Об одном интегральном представлении функций класса H_p при $p \leq 1$ ”, *Докл. НАН Беларуси*, **49**:1 (2005), 27–31.

А. А. Пекарский

Белорусский государственный технологический университет,
г. Минск
E-mail: pekarskii@gmail.com

Поступило

08.03.2010

Исправленный вариант

18.03.2011